

СОЗВ
КОМИТЕТ СТАНДАРТОВ, МЕР И ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ
ПРИ СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СССР

ВСЕСОЮЗНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ИНСТИТУТ МЕТРОЛОГИИ
им. Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

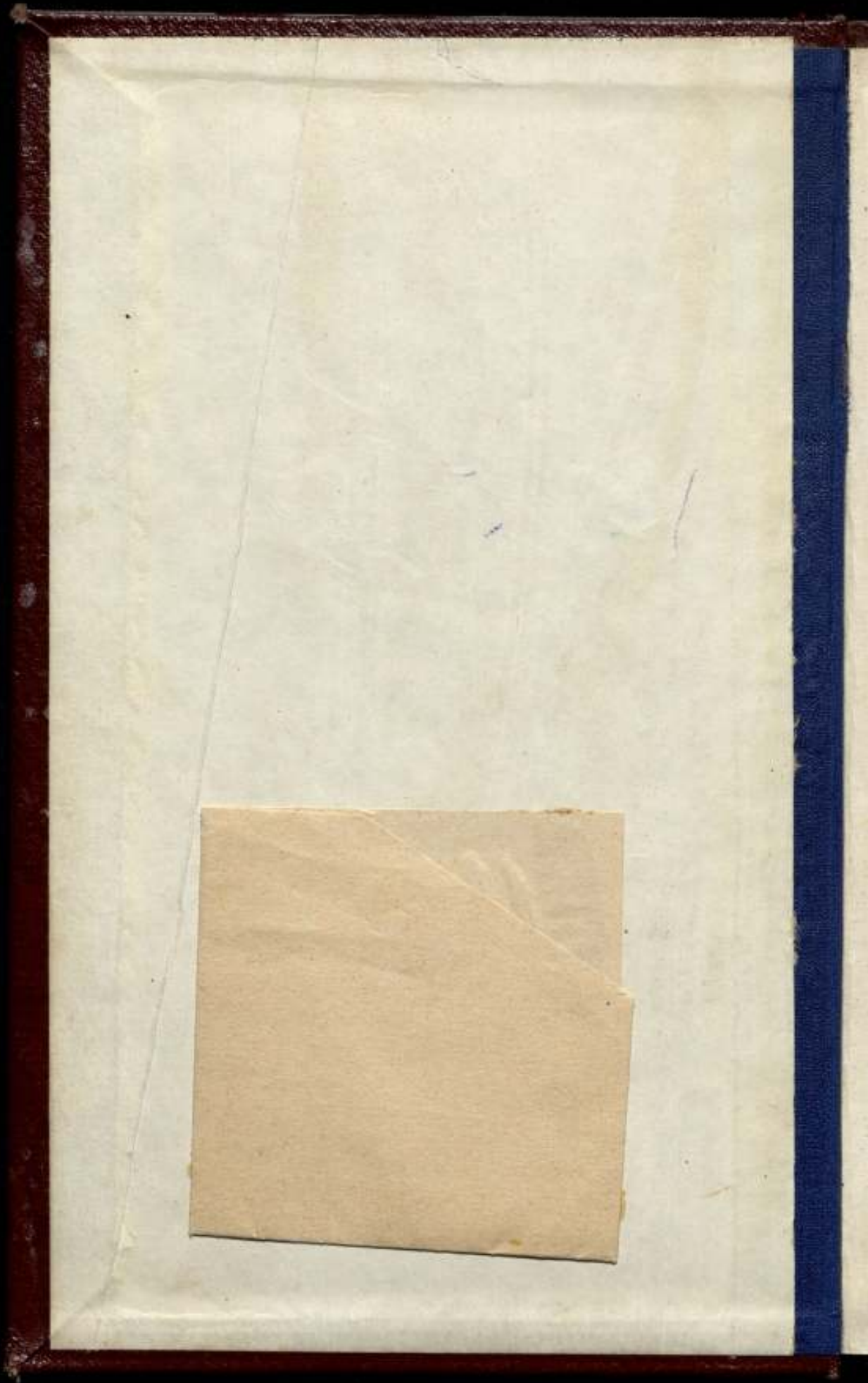
ИССЛЕДОВАНИЯ
ПО МЕТОДИКЕ ОЦЕНКИ
ПОГРЕШНОСТЕЙ
ИЗМЕРЕНИЙ

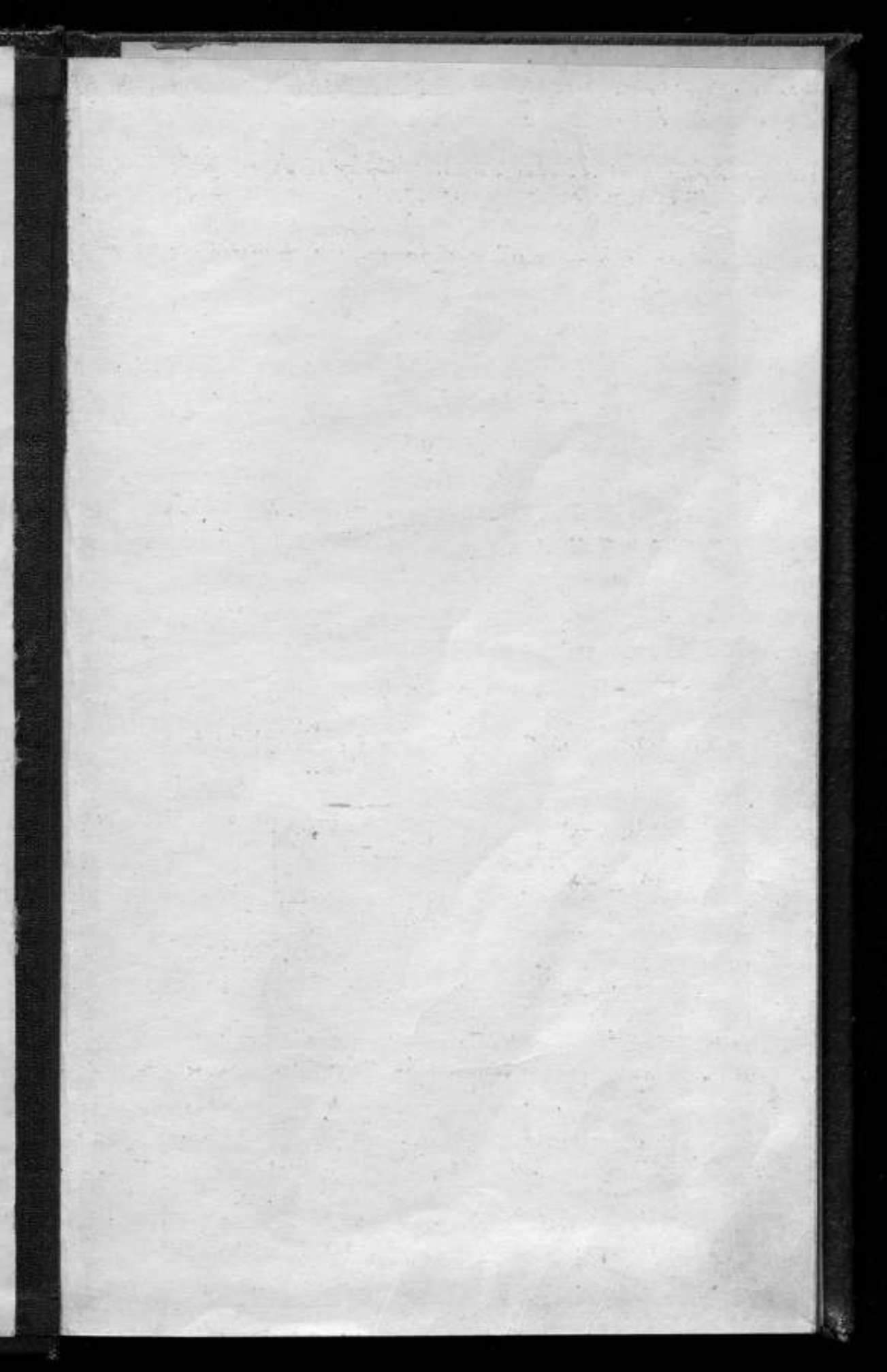
ТРУДЫ ИНСТИТУТОВ КОМИТЕТА

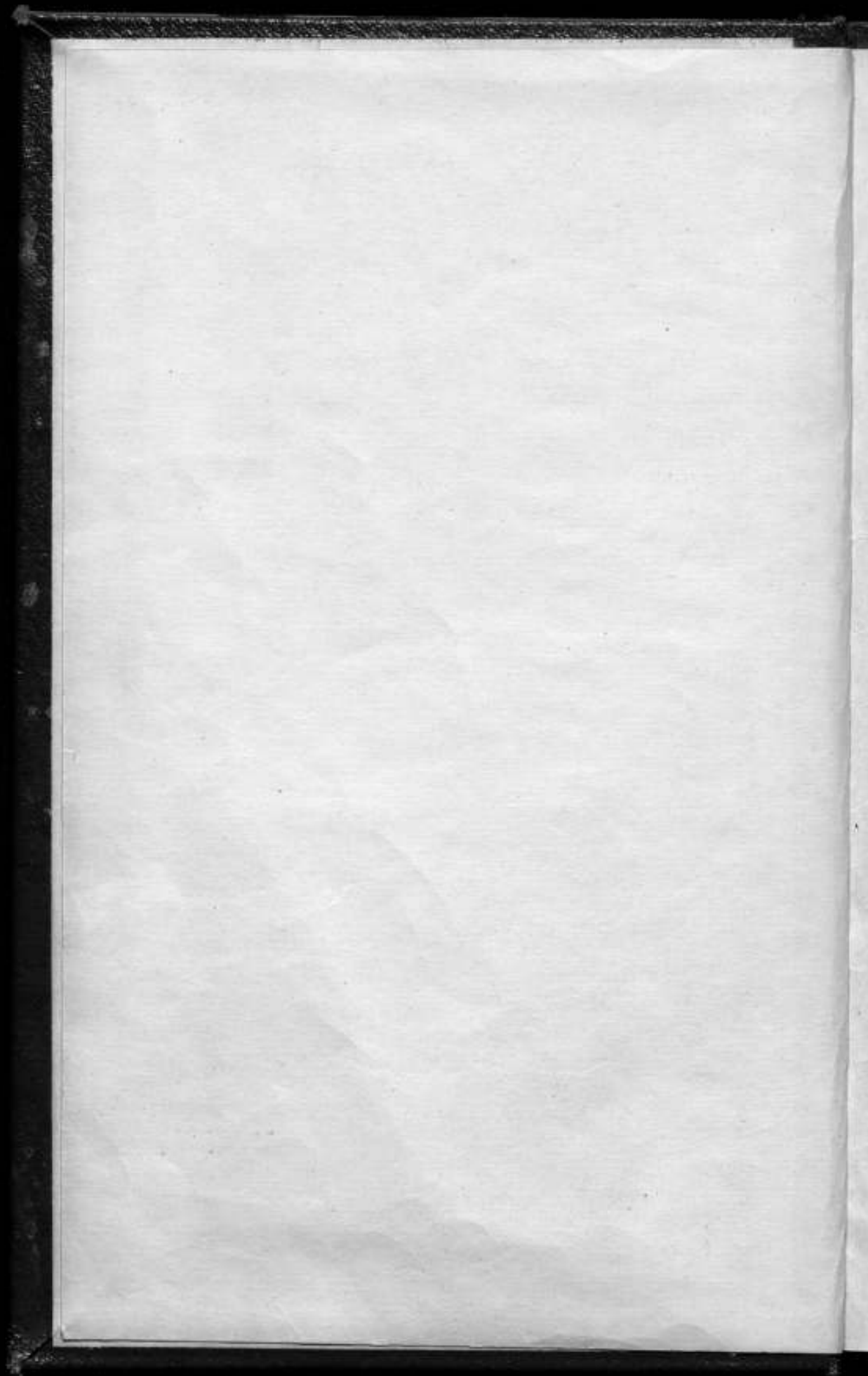
ВЫПУСК 57 (117)

СТАНДАРТГИЗ

МОСКВА — ЛЕНИНГРАД
1982







КОМИТЕТ СТАНДАРТОВ, МЕР И ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ
ПРИ СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СССР

2-й квз.

ВСЕСОЮЗНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
МЕТРОЛОГИИ ИМ. Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

ИССЛЕДОВАНИЯ
ПО МЕТОДИКЕ ОЦЕНКИ
ПОГРЕШНОСТЕЙ
ИЗМЕРЕНИЙ

м 12732 X

ТРУДЫ ИНСТИТУТОВ КОМИТЕТА

ВЫПУСК 57 (117)

Под редакцией
канд. техн. наук К. П. ШИРОКОВА

БИБЛИОТЕКА
Всесоюзного научно-исследова-
тельского института метрологии
имени Д. И. Менделеева

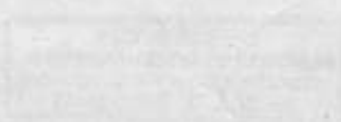
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО СТАНДАРТОВ
СТАНДАРТИЗ

МОСКВА — ЛЕНИНГРАД
1962

№ 2-5

ИССЛЕДОВАНИЯ
ПО МЕТОДИКЕ ОЦЕНКИ
ПОДВИЖНОСТИ
СЕРДЦА

1958



Ответственный редактор
д-р техн. наук проф. В. О. АРУТЮНОВ

ни
ва
по
в
но

ус
пр
пр
де
ми
ук

ны
не
ве
по
ст

то
ме
(М
по
ду

М
ос
ко
ны
сл

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современные достижения науки и техники во многом обязаны развитию и усовершенствованию средств измерения, расширению охватываемых ими областей и диапазонов, усложнению выполняемых функций, повышению точности. Средства измерения входят неотъемлемой частью в сложные регулирующие и автоматические устройства, определяя в основном правильность их функционирования.

Быстрый рост производства и применения средств измерения требует усиления внимания к вопросам оценки погрешностей измерительных приборов и точности выполняемых с их помощью измерений. Следует признать, что несмотря на то, что достаточно глубоко разработаны разделы математической статистики, приложимые к оценке погрешностей, многие вопросы остаются неясными и отсутствуют четкие практические указания, которые могли бы быть рекомендованы для общего применения.

Особенно неблагоприятно положение с оценкой погрешностей сложных измерительных устройств, состоящих из ряда звеньев и применяемых не только в статическом, но и в динамическом режиме, когда измеряемая величина подвержена быстрым изменениям и появляются дополнительные погрешности вследствие запаздывания в звеньях измерительного устройства.

Следует отметить, что и за рубежом эти вопросы не получили еще достаточной разработки и не нашли должного отражения в работах различных международных организаций, связанных с измерительной техникой (Международная организация мер и весов, Международная организация по стандартизации, Международная электротехническая комиссия, Международная организация законодательной метрологии и др.).

Большой вклад в вопрос о методах оценки погрешностей сделан проф. М. Ф. Маликовым в его «Основах метрологии» (М., 1949), где обобщены основные сведения о методах и средствах измерений. Книга М. Ф. Маликова в отношении классификации средств измерений, терминологии и основных способов обработки результатов точных измерений и по сие время служит для многих авторитетным и исчерпывающим источником. Однако

труд М. Ф. Маликсва имеет в виду в основном класс измерений, связанных с хранением и поддержанием единиц, т. е. измерения в статическом и притом в возможно более стабильном режиме. Многие вопросы оценки точности, волнующие широкие круги лиц, строящих и применяющих приборы, например оценка совместного действия возмущающих воздействий или погрешности регистрации быстро протекающих процессов, в этой монографии конкретному рассмотрению не подвергнуты.

Вторая монография по метрологии «Очерки об исходных измерениях» проф. П. М. Тиходеева (М.—Л., 1954) также посвящена измерениям в статическом режиме, и хотя в ней в большей степени использован аппарат математической статистики, она также не претендует на решение всех конкретных вопросов, возникающих в практике измерений.

Учитывая большую потребность в конкретных и обоснованных указаниях по оценке точности измерений и измерительных приборов, ВНИИМ взял на себя инициативу по выявлению и координации работ, проводимых в этой области в различных организациях. В мае 1960 г. во ВНИИМ было созвано совещание, привлечшее свыше 120 участников от 50 организаций. На совещании был сделан ряд сообщений о работах по методике оценки погрешностей и в решении были сформулированы первоочередные задачи в этой области. Было признано необходимым приступить к согласованной научно-исследовательской работе по накоплению и обработке опытного и статистического материала по отдельным видам измерительных приборов с целью разработки и издания рекомендаций и нормативов по оценке погрешностей отдельных групп приборов и отдельных видов измерений. Для лучшей координации работ и регулярного обмена опытом было сочтено целесообразным организовать при ВНИИМ комиссию по методам оценки погрешностей, пригласив заинтересованные организации, участвующие в работе по унификации методов оценки погрешностей, выделить в нее своих представителей.

В решении совещания было также отмечено, что в проводимых работах следует учитывать необходимость нормализации параметров приборов, служащих для оценки их точности, а также способов суммирования расчетных погрешностей при определении как допускаемой, так и предельной погрешности. Должны быть также определены доверительные пределы и установлены единые уровни вероятности. Существенной задачей должна являться экспериментальная разработка и проверка формул для оценки погрешностей приборов, включаемых в стандарты, инструкции Комитета и технические условия заводов-изготовителей, с целью их уточнения и унификации.

Необходимо разработать рекомендации по оценке погрешностей измерения при нестационарных и единичных процессах. В связи с высокими требованиями к точности измерений, предъявляемыми во многих случаях современной техникой, когда вместе с тем невозможно введение всех поправок, важную роль играет определение допускаемых отклонений условий измерений от нормальных, а также нижних границ числа повторных измерений, обеспечивающего необходимую точность. Особое внимание

должно быть обращено на разработку вопросов оценки точности средств измерения, применяемых в различных автоматических устройствах.

Поскольку для установления взаимопонимания важное значение имеет устранение разнобоя в терминологии, следует уделить большое внимание созданию единой терминологии. Должна быть также установлена единая система обозначений. Совещание сочло целесообразным практиковать выпуск трудов институтов Комитета, посвященных вопросам оценки погрешностей, и, в частности, подготовить к изданию сборник работ, использовав материалы совещания.

В соответствии с вышеизложенными решениями совещания при ВНИИМ была создана комиссия для координации работ по методике оценки погрешностей под председательством заместителя директора ВНИИМ по научной части. В комиссию вошли представители организаций, выразивших согласие участвовать в этой работе. Комиссия провела первые заседания, на которых были обсуждены подлежащие решению задачи.

В настоящий сборник включены те из доложенных на совещании работ, которые были представлены их авторами в подготовленном для опубликования виде. Значительная часть их относится к общим вопросам оценки погрешностей сложных приборов. В работе В. Л. Кана кратко изложены общие указания по методике и приемам оценки погрешностей сложных приборов. Работа Н. А. Чехонадского посвящена наиболее общим выражениям для погрешностей измерительного устройства, учитывающим погрешности, присущие самому устройству и вызываемые внешними воздействиями, и пригодным как для статического, так и для динамического режима работы. В статье Б. Е. Рабиновича рассматривается метод определения суммарной погрешности при известных значениях погрешностей отдельных узлов или деталей прибора, элементов метода или средних погрешностей. Частный, но представляющий интерес вопрос о способе определения относительных погрешностей измерения комплексных величин рассмотрен в статье Ф. Б. Гриневича и К. Б. Карандеева. Большому кругу вопросов, связанных с нахождением оптимальных параметров измерительных устройств, действующих в динамическом режиме, и в частности интегрирующих приборов, посвящена работа В. А. Волконского и А. С. Немировского. Помещается также статья А. С. Немировского «Методическая ошибка дискретного интегрирования», в которой рассмотрены погрешности интегрирования в случае стационарного случайного процесса, в частности, применительно к расходомерам. Наконец, помещается статья А. Н. Карташевой, рассматривающая вопрос об оценке надежности методики поверки прибора с помощью кривых вероятности признания прибора годным.

Кроме указанных выше работ, доложенных на совещании, в сборник включены следующие три статьи, поступившие позже, но также имеющие отношение к тематике сборника.

В статье М. А. Гольдинова рассматривается вопрос о методике повышения точности определения передаточных функций линейных динамических

систем, имеющий большое значение при исследовании приборов, входящих в автоматические устройства.

В статье Н. А. Смирновой изложена разработанная во ВНИИМ методика оценки погрешностей при сличениях эталонов килограмма и вытекающие из нее изменения порядка сличений эталонов. В этой статье рассматривается конкретный вид измерений, однако она не выпадает из общего направления сборника как преследующая цель изучения погрешностей и повышения точности измерений и, кроме того, она интересна в методологическом отношении.

Наконец, в сборник включена статья К. П. Широкова о разработанном во ВНИИМ проекте рекомендации «Основные метрологические термины и определения». Этот проект составлен с учетом отзывов многих организаций, которым он рассылался в нескольких последовательных редакциях. Намечено его издание в качестве рекомендации ВНИИМ, однако целесообразно его предварительное опубликование с целью быстрее доведения до сведения широких кругов специалистов и внесения возможных уточнений.

Предполагая продолжить публикацию сборников работ по методике оценки погрешностей, дирекция ВНИИМ обращается ко всем ведущим работы в этой области с просьбой сообщить во ВНИИМ следующие сведения: заглавие, фамилию автора, аннотацию работы, а также возможный срок присылки. Все эти сведения позволили бы более конкретно планировать выпуск сборников.

Редактор

В. Л. КАН
ВНИИМ

К ВОПРОСУ ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ СЛОЖНЫХ ПРИБОРОВ (КОМПЛЕКТОВ)

Кратко изложены общие соображения по методике и приемам оценки погрешностей сложных (состоящих из нескольких блоков) приборов. В приложении сформулированы краткие указания по анализу погрешностей отдельных блоков, входящих в сложный прибор.

Сложный прибор (комплект) состоит из нескольких приборов или блоков, передающих данные с одного из них на другой и, возможно, связанных между собой обратной связью. Таким образом, для каждого сложного прибора характерна некоторая структурная схема, могущая иметь в общем случае сложный (разветвленный) вид. При этом различные элементы такой схемы могут иметь самый разнообразный характер. Вопрос о нахождении погрешностей для таких схем требует прежде всего их классификации. Даже для более ограниченных случаев чисто механических «последовательных» цепей теория оказывается достаточно сложной [1]. Обобщение, опять-таки только для частных случаев, произведенное М. Л. Быховским [2], требует весьма сложного и трудно применимого к частным задачам аппарата, и тем не менее не охватывает встречающихся на практике случаев. В связи с этим можно высказать следующие положения, с которыми, по нашему мнению, нужно считаться при рассмотрении вопроса о погрешностях сложных приборов.

1. Не может быть единого общего правила, пригодного для каких угодно приборов. Вопрос должен решаться конкретно, в зависимости от вида физического явления и назначения прибора.

2. Следует различать вопрос оценки погрешности индивидуального сложного прибора и оценки погрешности партии приборов при их массовом производстве.

3. В обоих случаях одного знания предельной погрешности блоков, входящих в прибор, недостаточно для оценки работы сложного прибора. Следует иметь по крайней мере:

а) систематическую погрешность каждого блока в нормальных условиях;

б) систематические погрешности блока при предельных допустимых отклонениях основных внешних факторов, влияющих на работу блока;

в) случайную погрешность блока в зависимости от внешних факторов, если они ее изменяют. Эти величины должны быть определены заранее (см. Приложение).

4. В том случае, если требуется определить не погрешность отдельного сложного прибора, а погрешности таких приборов при массовом производстве, вместо «а» и «б» п. 3 можно иметь распределение систематических погрешностей партий блоков, применяемых в сложных приборах. Если

эти распределения подчиняются нормальному (гауссовому) закону, то можно их объединить со случайными погрешностями, и в этом случае говорить о единой погрешности совокупности приборов (блоков), применяемых при конструировании данного сложного прибора.

5. Имея в распоряжении указанные в п. 3 погрешности отдельных блоков и располагая структурной схемой сложного прибора, указывающей расположение и взаимодействие отдельных блоков, а также в случае необходимости — взаимные помехи, можно по известным формулам рассчитать систематическую и случайную погрешность сложного прибора в различных условиях его работы. После этого величина $a + k\sigma$, где a — систематическая погрешность, k — коэффициент, зависящий от выбранной вероятности, σ — средняя квадратическая случайная погрешность, представит предельную погрешность многоблочного прибора.

6. Вычисленная предельная погрешность должна быть проверена экспериментально, по крайней мере, — в типовых случаях. Если при этом процент выхода за предельную погрешность не будет превышать соответствующего выбранной вероятности, а общий характер распределения будет гауссовским (смещенным), то прибор следует признать годным.

7. При массовом выпуске сложных приборов для предельной погрешности вместо формулы п. 5 следует взять формулу

$$a + k \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma^2},$$

где a — средняя систематическая погрешность партии приборов (блоков);

σ_1 — средняя квадратическая погрешность, вычисляемая для партии приборов;

σ — средняя квадратическая погрешность, вычисляемая для одного прибора;

k — имеет прежнее значение.

Эти погрешности также должны определяться как при нормальных условиях, так и при предельно допустимых отклонениях от нормальных условий.

8. При определении погрешностей сложных приборов по п. 7 (при массовом выпуске) следует считать допустимым, что определенный процент приборов, соответствующий заданной доверительной вероятности, т. е. величине k , даст предельную погрешность, большую, чем указанная в п. 7, при этом она не должна сильно отличаться от предельной.

9. При вычислении погрешности в п. 7, согласно п. 5, можно сразу объединить для каждого блока часть систематической погрешности, являющейся случайной погрешностью партии, и случайную погрешность самого прибора. Согласно закону сложения дисперсий это приведет к тому же результату: Если систематическая погрешность партии блоков отсутствует, то все сводится к сложению случайных погрешностей. Но это относится только к вычислению предельной погрешности партии сложных приборов, а не отдельного сложного прибора, при вычислении которой по п. 5 нужно учитывать отдельно систематическую и случайную погрешность данных блоков, входящих именно в этот прибор.

10. Определение стабильности работы прибора не может быть сделано только теоретически. Оно должно основываться либо на изучении физических причин, могущих вызывать нестабильность, либо на продолжительном изучении работы (сложного прибора или отдельных блоков) и периодических поверках, либо на сочетании того и другого.

11. Все сказанное выше представляет общие теоретические соображения, которые нуждаются в экспериментальной проверке и теоретической разработке применительно к различным областям измерений и различным типам сложных приборов. В частности нужно:

а) рассмотреть вопрос о структурных схемах сложных приборов, взаимном влиянии и взаимных помехах отдельных блоков;

б) рассмотреть вопрос об учете внешних факторов, о необходимости расчета на случай нормальных внешних условий, на случай отклонения одного или нескольких факторов в допускаемых пределах. При этом нужно прийти к единому соглашению о том, следует ли рассматривать случай одновременного достижения предельных значений всеми внешними факторами или только частью их и какой именно. Этот вопрос особенно важен для сложных приборов вследствие взаимного нагревания, наличия полей и т. п.;

в) установить технику сборки приборов из отдельных блоков: возможную регулировку, подбор блоков с целью взаимной компенсации, если это имеет место, влияние соединений блоков на погрешности и т. п.;

г) вопрос о допустимости при массовом производстве выхода отдельных экземпляров за предельную погрешность, о тех случаях, когда это недопустимо, и о соответствующем выборе коэффициента k .

12. Указанные вопросы являются только частью из многих вопросов, которые могут быть поставлены, и потому их можно рассматривать вместе со всем предыдущим как наметку, которая должна служить первым вариантом плана построения соответствующей работы. Окончательные планы должны быть индивидуальными, в зависимости от вида и типа сложного (многоблочного) прибора.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОБ ИЗУЧЕНИИ ПОГРЕШНОСТИ ОТДЕЛЬНЫХ БЛОКОВ, ИСПОЛЪЗУЕМЫХ В МНОГОБЛОЧНЫХ ПРИБОРАХ

1. Отдельные блоки, используемые в многоблочных приборах (электроизмерительные приборы, термозлементы, трубки Пито, датчики и т. п.), обычно представляют собой устройства, серийно выпускаемые промышленностью.

2. Для определения характеристик сложного прибора недостаточно сведений, даваемых зачастую при этих приборах — предельной погрешности, и допускаемых значений внешних параметров.

3. Требуется установление: а) систематической погрешности данного прибора в нормальных условиях; б) систематических погрешностей, возникающих, если внешние условия отклоняются от нормальных до того или другого предела; в) случайных погрешностей.

4. В случае, если речь идет о партиях приборов, то нужно также установить, подчиняется ли распределение систематических погрешностей партии нормальному закону и равна ли нулю средняя систематическая погрешность. В случае, если заранее есть основание предполагать, что это так, то можно объединить показания (или числовые характеристики) всех приборов партии в один статистический коллектив и проверить нормальность распределения этого коллектива, не изучая отдельных приборов. Однако, если в последующем имеется в виду использовать отдельные приборы в уникальных сложных приборах, то нужно изучать их погрешности отдельно.

5. При анализе погрешностей отдельного прибора (блока) следует провести как физический, так и статистический анализы, т. е. предварительно изучить возможные физические причины погрешностей, попытаться исключить наиболее априори сказывающиеся (или выяснить их влияние) и установить, могут ли остальные факторы являться причиной наблюдаемых погрешностей. Затем проверить нормальный характер распределения случайных погрешностей и выделить систематическую погрешность.

6. Провести все указанное в п. 5 для предельных значений внешних факторов.

7. Если имеется большое число наблюдений при разных комбинациях внешних факторов для различных однотипных приборов, провести изучение собранного материала методами дисперсионного и корреляционного анализов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бородачев Н. А., Основные вопросы теории точности производства, АН СССР, 1950.

2. Быховский М. Л., Основы динамической точности электрических и механических цепей, АН СССР, 1958.

Поступила в редакцию
21/VI 1960 г.

Н. А. ЧЕХОНАДСКИЙ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ СЛОЖНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ, СОСТОЯЩИХ ИЗ РЯДА ОТДЕЛЬНЫХ БЛОКОВ

На основе теории случайных функций рассмотрены в общем виде погрешности, возникающие в сложном измерительном устройстве вследствие возмущений в его звеньях, а также действующих на них измене. Получены выражения для математического ожидания и корреляционной функции величины, наблюдаемой на выходе такого устройства, пригодные для анализа его погрешностей как в квазистатическом, так и в динамическом режимах.

В последнее время все большее применение в технике находят сложные дистанционные измерительные приборы, автоматические измерительные устройства и разного рода телеизмерительные системы, осуществляющие дистанционное измерение разнообразных физических величин, непрерывно изменяющихся во времени.

В этих устройствах, называемых нами в дальнейшем для сокращения измерительными системами, обычно используются электрические методы измерения физических величин, вследствие чего они представляют собой ряд преобразователей — звеньев, соединенных между собой последовательно электрическими связями. В некоторых измерительных системах применяются обратные связи.

Характерной особенностью таких измерительных систем является конструктивное выполнение преобразователей — звеньев системы в виде отдельных блоков, что в ряде случаев дает возможность комплектовать требуемую измерительную систему из имеющихся серийных блоков или же использовать эти блоки в качестве отдельных измерительных приборов.

Измерительные системы, используемые в технике, зачастую работают в сложных эксплуатационных условиях, характеризующихся влиянием различных внешних воздействий на звенья измерительных систем. К таким внешним воздействиям относятся, например, изменения окружающей температуры, линейные и вибрационные ускорения, изменения напряжения питания и т. д.

В результате влияния на систему внешних воздействий в звеньях системы возникают некоторые возмущения, которые трансформируются последующими звеньями системы и на ее выход, искажая этим результат измерения, выполненного системой, т. е. снижая ее точность.

Вследствие того, что указанное обстоятельство является характерным для измерительных систем, работающих в реальных эксплуатационных условиях, при рассмотрении вопросов анализа их погрешностей необходимо исходить, как это отмечалось в литературе [1], из этого наиболее общего случая.

К современным измерительным системам предъявляются весьма жесткие требования в отношении точности измерения, обеспечиваемого системой в эксплуатационных условиях. В ряде случаев погрешность измерения при проведении экспериментальных работ не должна превышать 0,5—1,0%, причем имеется явная тенденция к дальнейшему повышению требований к точности.

Так как отмеченной нами тенденции все большего применения измерительных систем, вызываемой потребностями дальнейшего развития техники, сопутствует увеличение требований к точности таких систем при работе их в сложных эксплуатационных условиях, вопрос о необходимости

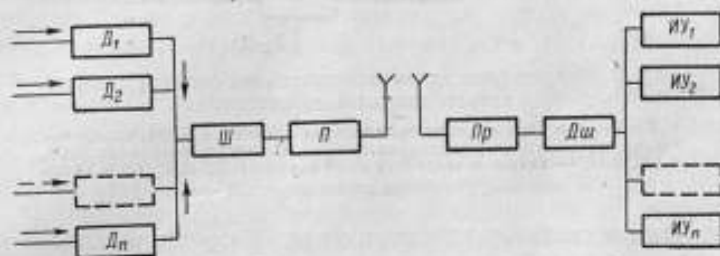


Рис. 1. Структурная схема радиотелеметрической системы.

$Д_1, Д_2, \dots, Д_n$ — датчики; Ш — шифратор; П — передатчик; Пр — приемник; Дш — дешифратор; ИУ₁, ИУ₂, ..., ИУ_n — измерительные устройства отдельных каналов.

дальнейшей разработки теории погрешностей измерительных систем и изыскания методов повышения их точности приобретает первостепенное значение.

Ниже приводятся некоторые материалы работы, выполняемой в этой области автором под руководством профессора, доктора технических наук Н. Н. Шумиловского.

Применяемые в настоящее время в технике измерительные системы могут быть разделены по виду их структурной схемы на два типа:

- измерительные системы, представляющие собой ряд соединенных последовательно звеньев;
- измерительные системы, имеющие на некотором участке параллельно включенные звенья.

В качестве примера измерительной системы первого типа может явиться радиотелеметрическая система, примером измерительной системы второго типа — автоматический потенциометр. Структурные схемы измерительных систем обоих типов приведены на рис. 1 и 2.

В дальнейшем изложении нами будут рассматриваться измерительные системы первого типа, обобщенная структурная схема которой приведена на рис. 3.

Выходная величина $y(t)$ измерительной системы при любом характере изменения входной величины $x(t)$ может быть представлена следующим выражением:

$$y(t) = \int_0^t k(t - \tau) x(\tau) d\tau, \quad (1)$$

где τ — временный параметр;
 $k(t - \tau)$ — импульсная переходная функция измерительной системы.
 Так как звенья измерительной системы в общем случае обладают некоторой инерционностью, то выходная величина системы будет содержать так называемую динамическую погрешность. Последняя зависит как от вида входной функции $x(t)$, так и от динамической характеристики измерительной системы. Методы определения таких характеристик разработаны теорией автоматического регулирования и могут быть полностью использованы в нашем случае.

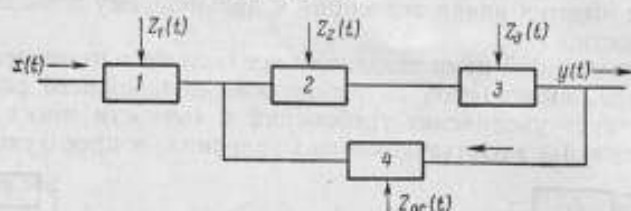


Рис. 2. Структурная схема измерительной системы с параллельно включенным звеном.

1, 2 и 3 — последовательно включенные звенья; 4 — параллельное звено; $x(t)$ — входная величина; $y(t)$ — выходная величина; $Z_1(t)$, $Z_2(t)$, $Z_3(t)$ — внешние воздействия на звенья 1, 2, 3; $Z_{oc}(t)$ — внешнее воздействие на звено обратной связи.

Однако при рассмотрении вопроса о преобразовании входной величины звеньями измерительной системы должны быть учтены некоторые особенности, характерные именно для этих устройств.

Выходная величина измерительной системы, определяемая выражением (1), будет иметь место только в идеальном случае. В действительности же при выполнении системой преобразования входной величины $x(t)$

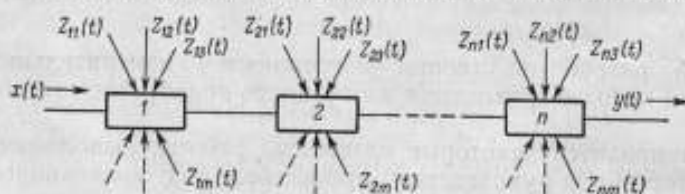


Рис. 3. Обобщенная структурная схема измерительной системы с последовательно включенными звеньями 1, 2, ..., n.

$x(t)$ — входная величина; $y(t)$ — выходная величина; $Z_{ij}(t)$ — внешние воздействия, где i — номер звена; j — номер воздействия.

вследствие несовершенства звеньев системы возникнут некоторые искажения выходной величины $y(t)$. Эти искажения по абсолютному значению отличаются на два порядка от выходной величины и в системах автоматического регулирования обычно не учитываются. При рассмотрении же измерительных систем, обладающих более высокой точностью, эти искажения выходной величины должны обязательно учитываться.

Так как выходная величина измерительной системы является функцией времени, то и искажения, возникающие при выполнении преобразования системой, будут в общем случае также некоторыми функциями времени.

Дополнительное слагаемое $\Delta(t)$, входящее в состав выходной величины системы и возникшее в самой системе при выполнении ею преобразования измеряемой величины, будет нами называться в дальнейшем возмущением первого рода.

Величина возмущения первого рода, возникшего в измерительной системе, может быть определена следующим образом:

$$\Delta(t) = \sum_{i=1}^n \int_0^t k_i^*(t-\tau) \delta_i(\tau) d\tau, \quad (2)$$

где $\delta_i(\tau)$ — возмущение первого рода, возникшее в i -ом звене измерительной системы;

$k_i^*(t-\tau)$ — импульсная переходная функция участка измерительной системы, имеющего звенья от $i+1$ до n .

При работе измерительной системы в реальных эксплуатационных условиях на звенья ее будут оказывать влияние различные внешние воздействия, как например изменения окружающей температуры, изменения напряжения питания, линейные и вибрационные ускорения и т. д. В результате влияния на звенья системы этих внешних воздействий в выходных величинах звеньев возникнут некоторые искажения, которые в достаточно надежных измерительных системах по абсолютному значению имеют тот же порядок, что и возмущения первого рода.

Вследствие того, что внешние воздействия, оказывающие влияние на звенья измерительной системы, являются некоторыми функциями времени, то и искажения, появляющиеся в этом случае в звеньях, также будут изменяться во времени. Однако последняя функциональная зависимость может отличаться от функциональной зависимости во времени самого внешнего воздействия, приведшего к возникновению искажения выходной величины звена. Произойдет это вследствие того, что звенья системы, в общем случае, могут обладать некоторой инерционностью в отношении внешних воздействий. Так например, если температура воздуха, окружающего датчик измерительной системы, резко изменится, то искажение выходной величины датчика не сразу достигнет значения, соответствующего установившемуся значению окружающей температуры. Поэтому при анализе влияния внешних воздействий на звенья измерительной системы необходимо учитывать их динамические характеристики в отношении этих воздействий. В теории автоматического регулирования этот вопрос обычно не рассматривается.

Искажения выходных величин звеньев измерительной системы, возникшие вследствие влияния на систему внешних воздействий и являющиеся величинами, изменяющимися во времени, будем называть в дальнейшем возмущениями второго рода.

Если известны динамические характеристики звеньев в отношении влияющих на них внешних воздействий и сами воздействия, то возмущение второго рода, возникшее в этом случае в системе, может быть представлено формулой

$$e(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_0^t L_{ij}(t-\tau) z_{ij}(\tau) d\tau, \quad (3)$$

где $L_{ij}(t-\tau)$ — импульсная переходная функция участка измерительной системы, состоящего из звеньев от i до n и имеющего дополнительный j -ый вход в i -ом звене;

$z_{ij}(\tau)$ — j -ое внешнее воздействие, влияющее на i -ое звено;

m — количество внешних воздействий, влияющих на измерительное устройство.

Таким образом, влияние внешних воздействий на звенья измерительной системы сводится как бы к проникновению помех в основной канал системы через некоторые дополнительные входы, причем каждое из звеньев системы как бы имеет количество дополнительных входов, равное

количеству разнотипных внешних воздействий, приводящих к возникновению в этом звене возмущений второго рода.

Выше нами была рассмотрена измерительная система в динамическом режиме в наиболее общем случае, т. е. когда измеряемая величина и все внешние воздействия, оказывающие влияние на звенья системы, являются функциями времени, а сама измерительная система обладает инерционностью как по основному каналу, так и по всем дополнительным каналам. Если же измерительная система будет находиться в статическом режиме, т. е. измеряемая величина и ее внешние воздействия будут величинами неизменными во времени, то и возмущения первого и второго рода, возникшие в звеньях системы, превратятся в этом случае в постоянные величины. В этом частном случае возмущение первого рода превратится в величину, обычно называемую основной погрешностью, а возмущение второго рода — в дополнительную погрешность.

Возможен еще режим работы измерительной системы, когда входная величина и внешние воздействия изменяются во времени, но их изменение происходит так медленно, что инерционность системы по основному и всем дополнительным каналам не сказывается. Такой режим работы может быть назван квазистатическим, вследствие чего необходимо отличать основную и дополнительную квазистатические погрешности.

Выше нами рассмотрено влияние внешних воздействий на работу измерительной системы и произведена необходимая классификация возмущений, возникающих в системе при выполнении ею измерения входной величины. Так как процесс измерения в этом случае заключается в многократном преобразовании входной величины, то все погрешности, рассмотренные выше, могут быть отнесены к разряду погрешностей преобразования. Помимо погрешностей преобразования, имеют место также производственные погрешности, возникающие при серийном изготовлении отдельных звеньев измерительной системы и рассматриваемые в теории точности [2, 3].

Законы распределения производственных погрешностей устанавливаются на основе анализа статистических материалов данного производства и зависят от технологического процесса, качества оборудования и инструмента, квалификации рабочих, качества контроля и ряда других факторов. Задачей теории точности является установление рациональной системы допусков при серийном изготовлении измерительной системы, обеспечивающей серийный выпуск системы заданной точности при наличии взаимозаменяемости отдельных ее звеньев.

Анализ производственных погрешностей сложных измерительных приборов достаточно подробно освещен в ряде работ и его дальнейшее развитие выходит за рамки настоящей статьи.

В области анализа погрешностей различных измерительных устройств имеется обширная литература, однако некоторые вопросы не получили еще достаточного освещения. К ним, в частности, относятся следующие:

- 1) разработка единого метода анализа статических и динамических погрешностей;
- 2) разработка методов оценки точности сложных измерительных устройств, состоящих из ряда звеньев и работающих в тяжелых эксплуатационных условиях, характерной особенностью которых является влияние различных случайных внешних воздействий на звенья системы;
- 3) теоретическое обоснование методов повышения точности измерительных систем.

Рассмотрим вопрос о погрешностях линейной измерительной системы, работающей в сложных эксплуатационных условиях.

На основании изложенного выше выходная величина измерительной системы может быть представлена следующим образом:

$$y(t) = \int_0^t k(t-\tau)x(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^n \int_0^t k_i^*(t-\tau)\delta_i(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_0^t L_{ij}(t-\tau)z_{ij}(\tau) d\tau. \quad (4)$$

Приведенное выражение показывает зависимость, существующую между входной и выходной величинами линейной измерительной системы в том случае, когда измеряемая величина, возмущения первого рода и внешние воздействия, оказывающие влияние на измерительную систему, являются заданными функциями времени. В действительности же измерительная система рассчитана для измерения не определенных, заданных функций времени, а для осуществления измерения определенной физической величины при любом характере ее изменения во времени. Поэтому при рассмотрении закона преобразования входной величины измерительной системой эта величина должна рассматриваться в общем случае как некоторая случайная функция времени.

Возмущения первого рода, возникающие в звеньях системы при выполнении ими преобразования измеряемой величины, а также внешние воздействия, влияющие на измерительную систему при ее работе в эксплуатационных условиях, в общем случае также являются случайными функциями времени. Вследствие этого анализ выражения (4), содержащего случайные функции $x(t)$, $\delta_i(t)$ и $z_{ij}(t)$, должен быть выполнен при помощи методов, разработанных современной теорией случайных функций [4]. Существо этих методов сводится, как известно, к тому, что при выполнении необходимых операций со случайными функциями эти операции производятся над их статистическими характеристиками: математическими ожиданиями, корреляционными функциями и взаимными корреляционными функциями связи.

Допустим, что все эти статистические характеристики случайных функций, входящих в выражение (4), нам известны. В этом случае математическое ожидание выходной функции измерительной системы определится зависимостью

$$M[y(t)] = \int_0^t k(t-\tau)M[x(\tau)] d\tau + \sum_{i=1}^n \int_0^t k_i^*(t-\tau)M[\delta_i(\tau)] d\tau + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_0^t L_{ij}(t-\tau)M[z_{ij}(\tau)] d\tau, \quad (5)$$

где $M[x(\tau)]$ — математическое ожидание входной функции измерительной системы;

$M[z_{ij}(\tau)]$ — математическое ожидание j -го внешнего воздействия, влияющего на i -ое звено;

$M[\delta_i(\tau)]$ — математическое ожидание возмущения первого рода, возникшего в i -ом звене.

Корреляционная же функция той же выходной функции может быть представлена зависимостью:

$$\begin{aligned}
 K[y(t, t')] &= \int_0^t \int_0^{t'} k(t-\tau) k(t'-\tau') K[x(\tau, \tau')] d\tau d\tau' + \\
 &+ \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_0^{t'} k_i^*(t-\tau) k_i^*(t'-\tau') K[\delta_i(\tau, \tau')] d\tau d\tau' + \\
 &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_0^t \int_0^{t'} L_{ij}(t-\tau) L_{ij}(t'-\tau') K[z_{ij}(\tau, \tau')] d\tau d\tau' + \\
 &+ R_{x\delta}(t, t') + R_z(t, t') + R_{\delta z}(t, t') + R_\delta(t, t') + R_{xz}(t, t'), \quad (6)
 \end{aligned}$$

где $K[x(\tau, \tau')]$ — корреляционная функция входной функции измерительной системы;

$K[\delta_i(\tau, \tau')]$ — корреляционная функция возмущения первого рода i -го звена;

$R_{x\delta}(t, t')$ — суммарная корреляционная функция связи входной функции и возмущений первого рода измерительного устройства;

$R_{xz}(t, t')$ — суммарная корреляционная функция связи входной функции измерительного устройства со всеми внешними воздействиями;

$R_z(t, t')$ — суммарная корреляционная функция связи всех попарно взятых внешних воздействий;

$R_{\delta z}(t, t')$ — суммарная корреляционная функция связи возмущений первого рода, возникших в звеньях системы с каждым из внешних воздействий, влияющих на систему;

$R_\delta(t, t')$ — суммарная корреляционная функция связи всех попарно взятых возмущений первого рода, возникших в звеньях измерительной системы.

Полученные нами для наиболее общего случая выражения (5) и (6), определяющие математическое ожидание и корреляционную функцию выходной величины измерительной системы в зависимости от таких же характеристик ее входной величины, должны позволить анализировать погрешности, возникающие в различных частных случаях работы этой системы, и установить связи, существующие между погрешностями различного вида. Последнее может быть выполнено, если приведенные выражения применить, например, для анализа статических и динамических погрешностей [5]. В этой работе установлено, что определяемая экспериментальным методом динамическая погрешность по своему физическому смыслу является систематической погрешностью прибора в динамическом режиме. Помимо этой погрешности, при выполнении измерений в динамическом режиме возникает также и случайная погрешность.

Полученные общие выражения могут быть использованы при анализе погрешностей измерительной системы, работающей в квазистатическом и статическом режимах [6—8]. В упомянутых работах установлена интересная особенность суммирования погрешностей в измерительной системе при влиянии на нее случайных внешних воздействий, которая заключается в возможности компенсации систематических составляющих погрешностей. Вследствие этого наличие внешних воздействий может привести в некоторых случаях к уменьшению систематической составляющей погреш-

ности измерительной системы. Случайная же составляющая этой погрешности при влиянии на систему несвязанных случайных внешних воздействий может только увеличиться.

Полученные нами выражения (5) и (6), определяющие погрешность измерительной системы в наиболее общем случае ее работы, должны позволить нам решать ряд весьма важных вопросов, связанных с анализом как статических, так и динамических погрешностей.

В области анализа статических погрешностей большой интерес представляет разработка достаточно обоснованной системы испытаний блоков измерительных систем, обеспечивающей комплектацию системы заданной точности. Этот вопрос может быть решен, по нашему мнению, путем применения общих выражений (5) и (6) для этого частного случая. Этим путем могут быть получены выражения, определяющие систематическую и случайную погрешности устройства в зависимости от таких же составляющих погрешностей звеньев, входящих в это устройство. Так как погрешности звеньев, проходящих испытания, могут отличаться от их расчетных значений, то, исходя из максимально допустимой погрешности измерительного устройства, на величины погрешностей звеньев должны быть установлены соответствующие допуски.

В связи с тем, что в измерительных устройствах все большее применение находят обратные связи, анализ как статических, так и динамических погрешностей измерительных устройств для этих случаев представляет существенный интерес. Анализ таких измерительных устройств может быть выполнен с помощью выражений (5) и (6), наличие же обратных связей должно быть учтено, очевидно, в выражении, определяющем импульсную переходную функцию устройства.

Большой интерес представляет также вопрос анализа погрешностей измерений физических величин, непрерывно изменяющихся во времени, что имеет место при выполнении большинства технических измерений при контроле технологических процессов в промышленности. Анализ погрешностей в таком квазистатическом режиме может быть выполнен с помощью выражений (5) и (6), если допустить, что измеряемая величина изменяется во времени сравнительно медленно, вследствие чего динамические погрешности не возникают. Так как при более быстром изменении измеряемой величины возникнут динамические погрешности, то для разграничения этих режимов работы измерительной системы должен быть разработан соответствующий критерий.

При анализе погрешностей измерительной системы должны рассматриваться как погрешности, присущие самому устройству, так и погрешности, вызываемые влиянием на это устройство внешних воздействий. В результате такого рассмотрения могут быть получены выражения, определяющие погрешность как в квазистатическом, так и в динамическом режимах работы. Полученные выражения должны быть исходными для оценки точности измерительной системы в действительных условиях ее эксплуатации.

Для оценки точности измерительной системы должен быть разработан достаточно обоснованный критерий точности, позволяющий не только определять максимально возможное значение погрешности системы, но и учитывать вероятность совпадения отдельных погрешностей во времени. В этом отношении заслуживает внимания, по нашему мнению, вопрос разработки некоторого интегрального критерия точности аналогично предложенному Н. Г. Бруевичем [2] критерию точности механизмов.

Большой интерес представляет также вопрос использования полученных общих выражений при разработке методов повышения точности измерительных систем.



Кроме того, полученные выражения могут быть использованы, по нашему мнению, для уточнения терминологии и классификации погрешностей, на что после выхода книги М. Ф. Маликова [9] обращалось явно недостаточное внимание.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шумиловский Н. Н. и Свицица Б. С., Основные задачи теории автоматических измерений, Научные основы построения технических средств автоматики, Изд. АН СССР, М., 1957.
2. Бруевич Н. Г., Точность механизмов, Техтеориздат, 1946.
3. Браславский Д. А., Точность и физическая взаимозаменяемость чувствительных элементов, Труды МАТИ, вып. 27, М., 1956.
4. Пугачев В. С., Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, М., 1960.
5. Чехонадский Н. А., О возможности общего подхода к анализу статических и динамических погрешностей, «Измерительная техника», № 3, 1959.
6. Чехонадский Н. А., О некоторых вопросах теоретиковероятностного анализа статических погрешностей измерительных систем, Труды семинара точности механизмов, Институт машиноведения АН СССР, вып. 13, 1959.
7. Чехонадский Н. А., О некоторых вопросах анализа погрешностей измерительных систем, «Измерительная техника», № 10, 1960.
8. Чехонадский Н. А., Об использовании в метрологии методов теории случайных функций, «Измерительная техника», № 2, 1958.
9. Маликов М. Ф., Основы метрологии, Комитет по делам мер и измерительных приборов, М., 1949.

Поступила в редакцию
21/VI 1960 г.

Б. Е. РАБИНОВИЧ
ВНИИМ

МЕТОДИКА СУММИРОВАНИЯ ЧАСТНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ В ОБЛАСТИ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Статья посвящена вопросам расчета суммарной погрешности методами теории вероятностей. Рассмотрены некоторые примеры, часто встречающиеся в практике радиотехнических измерений.

Одной из центральных задач, возникающих при проектировании, производстве, испытаниях и измерениях, является определение практически предельного значения суммарной погрешности прибора или результата косвенного измерения при известных значениях частных погрешностей (погрешностей отдельных узлов или деталей прибора, или средних погрешностей, полученных при обработке рядов прямых измерений).

В широкой практике применяют два способа суммирования частных погрешностей: арифметическое сложение абсолютных предельных значений частных погрешностей (так называемый способ максимума — минимума) и сложение квадратов предельных погрешностей под корнем квадратным (квадратичное суммирование). Ни тот, ни другой способы расчета не являются универсальными и, как показано Н. А. Бородачевым [1, 2], могут давать значительные отклонения от действительного значения суммарной погрешности: первый — в сторону преувеличения, второй — в сторону преуменьшения. Очевидная неоднозначность результата расчета по обоим способам и произвол при выборе того или другого способа вызывают недоразумения.

Между тем, как показано в тех же работах [1, 2], задача определения предельного значения суммарной погрешности однозначно решается, если известны: а) допускаемые значения частных погрешностей (допуски); б) законы распределения погрешностей в полях допусков; в) заданная доверительная вероятность суммарной погрешности.

Неучет последних двух элементов при суммировании допусков и вызывает указанные выше недоразумения.

При наличии случайных составляющих погрешностей понятие предельного значения суммарной погрешности может иметь только статистический смысл, т. е. можно говорить только о вероятности, с которой данное значение погрешности, принятое за предельное, не будет превзойдено. Или, наоборот, можно задаться доверительной вероятностью и определить соответствующее ей значение предельной погрешности. Если вероятность выхода за пределы этого значения практически пренебрежимо мала, то погрешность называют практически предельной.

Наиболее полно вопросы анализа точности измерительных приборов разработаны в области измерений в машиностроении. В упомянутой уже работе [2] методика расчета погрешности замыкающего звена размерной цепи доведена до стадии практических рекомендаций.

В основу указанных рекомендаций положено, как правило, оперирование с допусками, а не со средними квадратическими отклонениями.

При анализе качества производства действительно исходят из известных допускаемых значений погрешностей отдельных узлов и деталей (допусков).

При проектировании (разработке) приборов исходят частично из известных допусков, частично из результатов обработки экспериментальных данных в виде постоянных (систематических) и средних квадратических погрешностей.

При испытаниях основными исходными данными для определения суммарной погрешности являются средние квадратические и постоянные (систематические) погрешности, вычисленные при обработке рядов наблюдений. Однако и здесь приходится учитывать ряд погрешностей, для которых можно установить лишь предельные значения в виде допусков.

Для измерительной техники более общепринятым является оперирование со средними квадратическими погрешностями или дисперсиями, которые получаются непосредственно при обработке результатов измерений. Удобство этого, в частности, заключается в том, что суммирование средних квадратических погрешностей (корень квадратный из суммы квадратов) дает, как известно, среднюю квадратическую погрешность суммарной совокупности независимо от законов распределения частных погрешностей.

Другой особенностью упомянутых рекомендаций является предположение о нормальном законе распределения отклонений замыкающего звена (суммарной погрешности). При наличии доминирующих погрешностей с распределением, отличающимся от нормального, что специфично в ряде случаев для радиоизмерительных приборов, это предположение неправомерно.

Таким образом, актуальной задачей является разработка рекомендаций по определению практически предельной (с заданной доверительной вероятностью) погрешности приборов или методов измерений, или результатов косвенных измерений, основанных на методах теории вероятностей и учитывающих специфику радиоизмерительной техники. В настоящей статье рассматриваются некоторые вопросы, относящиеся к указанной задаче.

1. Методика определения суммарной погрешности

Задачу определения практически предельного значения суммарной погрешности при известных значениях частных погрешностей можно разделить на четыре этапа.

Конечная величина Y (показание прибора, искомый результат косвенного измерения) и первичные величины x_1, x_2, \dots, x_m (значения составляющих элементов прибора, результаты прямых измерений) связаны функциональной зависимостью (уравнением измерения)

$$Y = F(x_1, x_2, \dots, x_m). \quad (1)$$

Первый этап. Находят частные производные функции по каждому независимому аргументу

$$m_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}. \quad (2)$$

Рассчитывают их численные значения при номинальных значениях аргументов. Это будут коэффициенты между приращениями (погрешностями) первичных величин и приращением функции (погрешностью показания прибора или результата измерений), называемые коэффициентами влияния.

Определение коэффициентов влияния аналитическим путем в некоторых случаях может быть очень громоздким. Эта задача может быть решена экспериментально на макете прибора методом так называемых преобразованных цепей, детально развитом М. Л. Быховским [3]. В этом методе макет прибора выступает в роли счетно-решающего устройства, выполняющего операции нахождения частных производных.

Второй этап. Определяют отклонение математического ожидания (или центра группирования) каждой первичной величины x_i от ее номинала X_i и соответствующие дисперсии, приведенные к конечной величине Y .

Здесь могут быть два типичных случая.

а) Исходными являются полученные при измерениях совокупности (ряды) значений для первичных величин. Для каждой первичной величины следует определить отклонение математического ожидания от номинала и дисперсию.

1. Математическое ожидание равно среднему арифметическому значению L_i величины x_i

$$L_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} x_{ik}, \quad (3)$$

где i — порядковый номер первичной величины;

k — порядковый номер значения в ряду;

n — число измерений (значений) в ряду;

x_{ik} — значение однократного измерения.

Отклонение среднего арифметического L_i от номинала X_i (постоянная или систематическая погрешность) равно

$$\theta_i = L_i - X_i. \quad (4)$$

2. Если в уравнение измерения (1) входит случайное значение i -ой величины x_i (результат однократного измерения), то погрешность последнего характеризуется средней квадратической погрешностью ряда измерений (иногда ее называют погрешностью однократного измерения). Для вычисления ее применяют одну из известных формул [4]. Чаще всего пользуются формулой Бесселя

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{k=n} v_{ik}^2}{n-1}}, \quad (5)$$

где $v_{ik} = x_{ik} - L_i$.

В ряде случаев оказывается удобной оценка средней квадратической погрешности по размахам (наибольшим разностям результатов измерений в одной выборке) [5]. Этот способ удобен, когда имеется большое число выборок сравнительно небольшого состава.

Если в уравнение измерения входит математическое ожидание значения i -ой величины (среднее из n значений) L_i , то средняя квадратическая погрешность последнего вычисляется по формуле

$$S_{L_i} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{k=n} v_{ik}^2}{n(n-1)}}. \quad (6)$$

Если $n < 10$, то погрешность S_L должна отмечаться особо (считаться доминирующей, см. стр. 26).

3. Относительное отклонение математического ожидания от номинала, приведенное к Y , равно

$$\Theta_{opt} = \frac{m_i \Theta_i}{Y}. \quad (7)$$

Приведенная относительная средняя квадратическая погрешность равна

$$\sigma_{opt} = \frac{\sigma_i m_i}{Y}. \quad (8)$$

или

$$S_{optL_i} = \frac{S_{L_i} m_i}{Y}. \quad (9)$$

Дисперсии соответственно равны σ_{opt}^2 или $S_{optL_i}^2$.

б) *Исходными являются допускаемые предельные значения (допуски) для первичных величин.* Для каждой первичной величины следует определить отклонение ее математического ожидания от номинала и дисперсию. Отклонение математического ожидания от номинала алгебраически складывается в общем случае из двух частей: из отклонения середины поля допуска от номинала и из отклонения математического ожидания относительно середины поля допуска (при несимметричном законе распределения).

1. Определяют отклонение середины поля допуска от номинала. Если максимальное допускаемое значение величины с номиналом X_i равно $X_{i \max}$, а минимальное $X_{i \min}$, то половина поля допуска (предельное отклонение) равна

$$\delta_i = \frac{X_{i \max} - X_{i \min}}{2}. \quad (10)$$

2. Значение середины поля допуска равно

$$X_{i \text{cp}} = \frac{X_{i \max} + X_{i \min}}{2}. \quad (11)$$

Отклонение середины поля допуска от номинала

$$\Delta_i = X_{i \text{cp}} - X_i. \quad (12)$$

3. Определяют приведенное относительное отклонение середины поля допуска от номинала

$$\Delta_{opt} = \frac{\Delta_i m_i}{Y}. \quad (13)$$

4. Приведенное относительное значение половины поля допуска равно

$$\delta_{opt} = \frac{\delta_i m_i}{Y}. \quad (14)$$

5. Определяют коэффициент относительной асимметрии закона распределения отклонений значений i -ой величины по полю ее допуска, характеризующий величину смещения центра группирования (математического ожидания) Mx_i от середины поля допуска [5]

$$\alpha_i = \frac{Mx_i - X_{i \text{cp}}}{\delta_i}. \quad (15)$$

Значения α_i для различных теоретических и эмпирических законов (типов) распределения приведены в таблицах [2, 6].

6. Определяют приведенное отклонение математического ожидания i -ой величины от середины поля допуска $\alpha_i \delta_{опi}$.

7. Определяют среднее квадратическое отклонение i -ой величины. Связь между искомыми средним квадратическим значением отклонения σ_i и известным предельным отклонением δ_i зависит от закона распределения отклонений в поле допуска.

Для расчета следует воспользоваться приведенными в таблицах [2, 6] значениями коэффициента k_i для различных законов распределения, где k_i — коэффициент относительного рассеяния закона распределения отклонений значения i -ой величины по полю ее допуска, равный отношению среднего квадратического отклонения данного распределения σ_i к среднему квадратическому отклонению нормального распределения σ_n при одинаковых предельных отклонениях $\delta_i = \delta_n$. При этом для нормального закона принято [5, стр. 314]

$$\delta_n = 3\sigma_n. \quad (16)$$

По определению

$$k_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_n}$$

при $\delta_i = \delta_n$, следовательно,

$$\sigma_i = \frac{k_i \delta_i}{3}. \quad (17)$$

Значения k_i для различных законов распределения приведены в таблицах [2, 6].

Для некоторых законов, часто встречающихся в измерениях, значения k_i приведены на стр. 31 и 32.

8. Определяют приведенное относительное среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_{опi} = \frac{k_i \delta_{опi}}{3}. \quad (18)$$

Дисперсия равна

$$\sigma_{опi}^2 = \left(\frac{k_i \delta_{опi}}{3} \right)^2. \quad (19)$$

Часто встречаются комбинации рассмотренных случаев (а) и (б), (см. стр. 21, 22), т. е. для части первичных величин имеются данные (ряды) прямых измерений, а для другой части величин известны лишь предельные значения, внутри которых они могут находиться.

Третий этап. Определяют суммарное относительное отклонение математического ожидания конечной величины от номинального значения [последнее соответствует подстановке в уравнение измерения (1) номинальных значений первичных величин]. Оно складывается из алгебраической суммы приведенных отклонений математических ожиданий всех первичных величин от их номиналов

$$\Theta_{оп\Sigma} = \sum_{i=1}^{i=m} \Theta_{опi} + \sum_{i=1}^{i=m} \Delta_{опi} + \sum_{i=1}^{i=m} \alpha_i \delta_{опi}. \quad (20)$$

Это будет постоянная погрешность конечной величины Y .

Определяют суммарную относительную среднюю квадратическую погрешность, которая равна корню квадратному из суммы дисперсий для независимых частных погрешностей при любых законах распределения последних.

$$\sigma_{\text{ор}\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=m} \sigma_{\text{ор}i}^2 + \sum_{i=1}^{i=m} \left(\frac{1}{3} k_i \delta_{\text{ор}i}\right)^2}. \quad (21)$$

Если два (или более) источника погрешностей не полностью статистически независимы, а имеют корреляционную связь, то под знак корня войдут дополнительно слагаемые вида

$$2\rho_{pq}\sigma_p\sigma_q,$$

где ρ_{pq} — коэффициент корреляции.

Если порознь известны действительные (а не допускаемые) значения $\Theta_{\text{ор}\Sigma}$ и отдельно значения $\sigma_{\text{ор}\Sigma}$ приборов, входящих в сложную систему, то определение соответствующих суммарных погрешностей системы не представляет никаких затруднений: первые, приведенные к конечной величине, суммируются алгебраически, вторые — квадратично.

Четвертый этап. Определяют практически предельное значение суммарной погрешности. Эта погрешность определяется по формуле

$$\Delta_{\text{ор}\Sigma} = \Theta_{\text{ор}\Sigma} \pm \alpha_{\Sigma} \sigma_{\text{ор}\Sigma}, \quad (22)$$

где α_{Σ} — коэффициент, определяемый в общем случае заданной доверительной вероятностью и законом распределения суммарной погрешности.

Задание доверительной вероятности, т. е. вероятности того, что суммарная погрешность не выйдет за пределы $\Delta_{\text{ор}\Sigma}$, производится на основании общих соображений (например, технико-экономических, допускаемого процента брака, степени ответственности измерений, разумного сочетания точности и экономичности прибора и т. п.).

Соответствующее значение практически предельной погрешности будет разным в зависимости от заданной доверительной вероятности.

Очевидно, что для обеспечения сопоставимости результатов измерений и точности различных приборов, особенно приборов широкого применения, должна назначаться одинаковая согласованная доверительная вероятность. При различающихся законах распределения суммарной погрешности и одинаковой доверительной вероятности будут различаться и коэффициенты α_{Σ} .

В подавляющем большинстве случаев суммарное распределение, особенно при большом числе источников погрешностей, считают нормальным, а практически предельной погрешностью считают $3\sigma_{\Sigma}$ (т. е. $\alpha_{\Sigma} = 3$). Последнее условно, но общепринято (известное правило «трех сигма»). Действительно, нормальный закон является предельным при увеличении числа суммируемых погрешностей с любыми законами распределений. В частности, упомянутая ранее методика расчета допусков в машиностроении [1, 2] также исходит из нормального распределения для замыкающего звена размерной цепи.

Однако при наличии доминирующих погрешностей с равновероятным или антимодальным распределением рассчитанная при таком предположении погрешность будет слишком преувеличена. Это можно проиллюстрировать на простом примере. Положим, имеется доминирующая погреш-

ность с равновероятным распределением и предельным значением $\pm l$. Как известно, в этом случае

$$\sigma_l = \frac{l}{\sqrt{3}}. \quad (23)$$

Положим, что остальные погрешности увеличили суммарную среднюю квадратическую погрешность в $(1 + \Delta)$ раз по сравнению с доминирующей

$$\sigma_{\Sigma} = \sigma_l(1 + \Delta) = \frac{l}{\sqrt{3}}(1 + \Delta). \quad (24)$$

Предполагая нормальный закон для суммарной погрешности, находим ее предельное значение по правилу «трех сигма»

$$\Delta_{\Sigma} = \alpha_{\Sigma} \sigma_{\Sigma} = 3\sigma_{\Sigma} = 3 \frac{l}{\sqrt{3}}(1 + \Delta). \quad (25)$$

При $\Delta \rightarrow 0$, т. е. при ничтожном влиянии всех погрешностей, кроме доминирующей, из формулы (25) следует

$$\Delta_{\Sigma} = \sqrt{3}l, \quad (26)$$

в то время как действительное предельное значение погрешности в этом случае равно

$$\Delta_{\Sigma} = l. \quad (27)$$

Преувеличение предельной погрешности в $\sqrt{3}$ раз объясняется неверным предположением о законе распределения суммарной погрешности.

II. Определение коэффициента α_{Σ}

Рассмотрим некоторые встречающиеся в практике законы распределения доминирующей погрешности и определение α_{Σ} .

а) Доминирующая погрешность отсутствует. Как известно, при увеличении числа независимых источников частных погрешностей и отсутствии среди них доминирующей, закон распределения суммарной погрешности стремится к нормальному при любых симметричных законах распределения частных погрешностей. Это распространенный в практике случай, особенно в измерительной. Поэтому в подавляющем большинстве случаев для распределения суммарной погрешности принимается нормальный закон (Гаусса).

Задаваясь вероятностью (доверительной) p того, что погрешность не выйдет за границы, указанные формулой (22), или допускаемой вероятностью $q = 1 - p$ выхода погрешности за эти границы, по таблицам интеграла вероятностей распределения Гаусса, например [7], находят α_{Σ} .

В табл. 1 приведены некоторые значения α_{Σ} .

Таблица 1

p	0,9973	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91	0,90
α_{Σ}	3,00	2,58	2,33	2,17	2,05	1,96	1,88	1,81	1,75	1,60	1,64

Обычно выбирают при этом законе распределения значение коэффициента $\alpha_{\Sigma} = 3$ и соответственно доверительную вероятность 0,9973.

б) Доминирующая погрешность распределена по закону Стюдента. Рассмотрим случай, когда среди частных погрешностей имеется одна средняя квадратическая погрешность

$$S_{\text{опт}} = \frac{m_L S_L}{Y} = \frac{m_L}{Y} \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{k=n} v_k^2}{n(n-1)}}$$

среднего арифметического, найденного по малому числу ($n < 10$) повторных измерений (закон распределения результатов отдельных измерений считается нормальным *). Остальные погрешности в совокупности распределены также по нормальному закону со средним квадратическим значением σ .

Распределение погрешности среднего арифметического подчиняется закону вероятностей для малых выборок (Стюдента). Задаваясь доверительной вероятностью суммарной погрешности p и количеством измерений без одного $k = n - 1$ по таблицам [5] для этого распределения находят нормированный коэффициент t_S . Предельное значение погрешности среднего арифметического L (приведенное) с вероятностью p равно $t_S S_{\text{опт}}$. Далее находят предельное приведенное значение $\alpha_2 \sigma$ остальных погрешностей, кроме доминирующей, распределенных нормально при той же доверительной вероятности p (см. табл. 1). Предельное значение суммарной погрешности находится квадратичным суммированием

$$\Delta_{\Sigma} = \alpha_2 \sigma_{\text{опт}} = \sqrt{(t_S S_{\text{опт}})^2 + (\alpha_2 \sigma)^2}. \quad (28)$$

В практике удобнее пользоваться не значением σ , а средним квадратическим значением всей совокупности погрешностей, включая доминирующую.

$$\sigma_{\Sigma} = \sqrt{S_L^2 + \sigma^2}.$$

В табл. 2—4 и на рис. 1—3 приведены значения коэффициента α_2 , рассчитанные по формуле (28) для некоторых доверительных вероятностей в зависимости от двух параметров: числа измерений n и отношения доминирующей погрешности к суммарной $\frac{S_L}{\sigma_{\Sigma}}$ (значки *оп* для краткости опущены).

Таблица 2

$p = 0,997$

$\frac{S_L}{\sigma_{\Sigma}}$ \ n	4	5	6	7	8	9	10	11	21	∞
0,10	3,10	3,03	3,02	3,01	3,00	2,99	2,98	2,98	2,98	2,97
0,20	3,42	3,18	3,09	3,06	3,04	3,02	3,00	3,00	3,00	2,97
0,31	4,01	3,48	3,33	3,22	3,16	3,14	3,12	3,09	3,03	2,97
0,45	4,78	3,92	3,57	3,42	3,33	3,27	3,21	3,18	3,06	2,97
0,71	6,65	5,00	4,34	4,01	3,78	3,64	3,51	3,45	3,18	2,97
0,89	8,08	5,88	4,96	4,51	4,18	3,98	3,83	3,72	3,30	2,97
0,95	8,55	6,21	5,20	4,70	4,34	4,13	3,92	3,83	3,36	2,97
1,00	8,89	6,44	5,38	4,80	4,44	4,20	4,02	3,89	3,38	2,97

* Однако дисперсия до выполнения указанных измерений неизвестна.

Таблица 3

 $p = 0,99$

$\frac{S_L}{\sigma_Z}$ \diagdown n	4	5	6	7	8	9	11	21	∞
0,10	2,63	2,60	2,60	2,60	2,60	2,59	2,58	2,58	2,58
0,20	2,78	2,68	2,63	2,62	2,62	2,61	2,60	2,59	2,58
0,31	3,09	2,86	2,76	2,73	2,71	2,68	2,65	2,62	2,58
0,45	3,50	3,09	2,94	2,83	2,78	2,76	2,70	2,63	2,58
0,71	4,53	3,74	3,38	3,20	3,06	2,98	2,89	2,70	2,58
0,89	5,30	4,27	3,78	3,50	3,35	3,22	3,04	2,78	2,58
0,95	5,65	4,45	3,92	3,63	3,42	3,32	3,12	2,83	2,58
1,00	5,84	4,60	4,03	3,71	3,50	3,36	3,17	2,84	2,58

Таблица 4

 $p = 0,95$

$\frac{S_L}{\sigma_Z}$ \diagdown n	4	5	6	7	8	9	10	21	∞
0,10	1,98	1,98	1,98						
0,20	2,00	2,00	1,99						
0,31	2,12	2,06	2,04	1,99	2,00				
0,45	2,26	2,08	2,10	2,06	2,04	2,02	2,02		
0,71	2,64	2,40	2,29	2,22	2,18	2,14	2,12	2,02	1,96
0,89	2,98	2,62	2,47	2,35	2,29	2,24	2,20	2,07	1,96
0,95	3,10	2,72	2,53	2,41	2,35	2,28	2,24	2,08	1,96
1,00	3,18	2,78	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26	2,09	1,96

Пример. Одна из первичных величин L определена как среднее арифметическое из $n=7$ измерений. Средняя квадратическая погрешность значения L равна

$$S_L = \sqrt{\frac{\sum \sigma_k^2}{n(n-1)}} = 1\%$$

Среднее квадратическое значение всей совокупности погрешностей, включая доминирующую $\sigma_Z = 2,2\%$.

Найти практически предельное значение суммарной погрешности с доверительной вероятностью $p = 0,997$.

По табл. 2 для $n = 7$ и $\frac{S_L}{\sigma_Z} = 0,45$ находим $\alpha_Z = 3,42$.

$$\Delta_Z = \alpha_Z \sigma_Z = 3,42 \cdot 2,2 = 7,5\%$$

в) Доминирующая погрешность имеет равновероятный закон распределения. Рассмотрим случай, когда среди частных погрешностей имеется одна доминирующая, распределенная по равновероятному закону в пределах ± 1 . Остальные погрешности в совокупности распределены по нормальному закону со средним квадратическим значением σ .

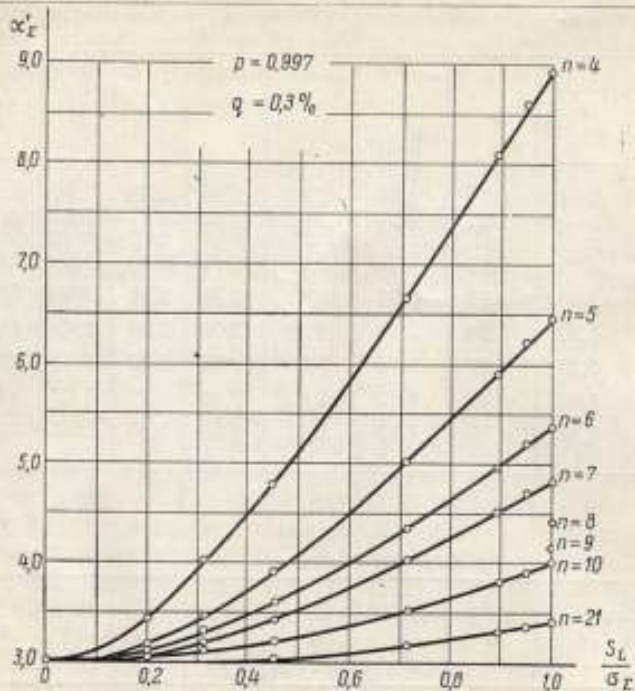


Рис. 1.

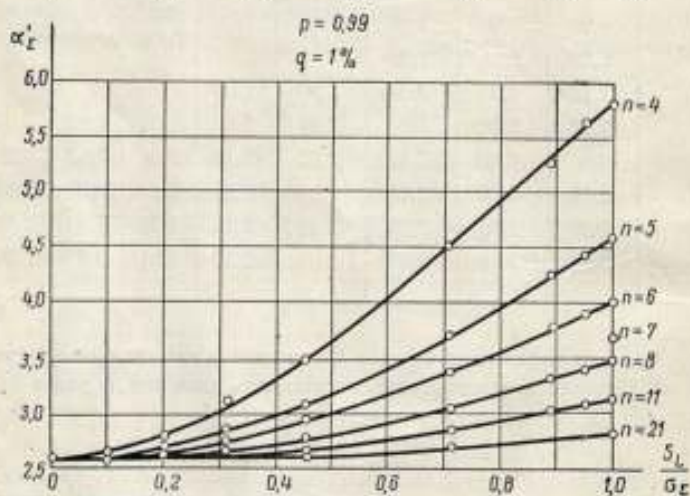


Рис. 2.

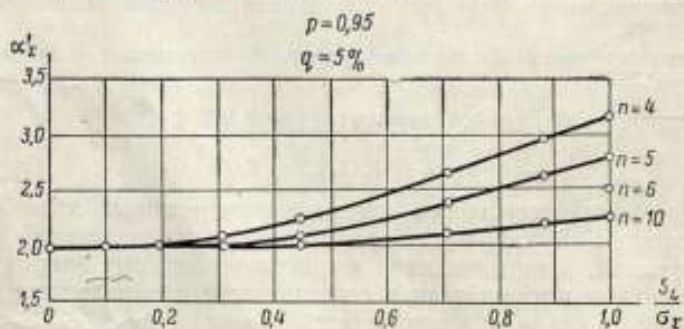


Рис. 3.

Суммарная погрешность распределена в этом случае по закону композиции нормального и равновероятного законов распределения.

В табл. 5 приведены значения α_{Σ} в зависимости от двух параметров: заданной доверительной вероятности суммарной погрешности p и отношения $\frac{l}{\sigma}$.

Таблица 5

$\frac{l}{\sigma}$	$\frac{\sigma_1}{\sigma_{\Sigma}}$	$p = 0,9973$	$p = 0,99$	$p = 0,95$
0	0	3,0	2,58	1,96
2	0,658	2,75	2,42	1,88
3	0,868	2,52	2,25	1,84
6	0,957	2,17	—	1,72
9	0,980	2,00	—	1,70
∞	1,00	1,73	1,71	1,64

Для расчетов иногда удобнее вместо отношения $\frac{l}{\sigma}$ пользоваться отношением (также приведенным в табл. 5) $\frac{\sigma_1}{\sigma_{\Sigma}}$, где $\sigma_1 = \frac{l}{\sqrt{3}}$ — среднее квадратическое значение погрешности с равновероятным законом распределения и $\sigma_{\Sigma} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma^2}$ — среднее квадратическое значение всей совокупности погрешностей, включая равновероятную.

На рис. 4 приведена зависимость α_{Σ} от $\frac{\sigma_1}{\sigma_{\Sigma}}$ при разных p .

г) Доминирующая погрешность с неизвестным законом распределения. Рассмотрим случай, когда среди частных погрешностей имеется одна доминирующая с предельным значением $\pm l$, закон распределения которой неизвестен. Остальные погрешности в совокупности распределены по нормальному закону со средней квадратической погрешностью σ .

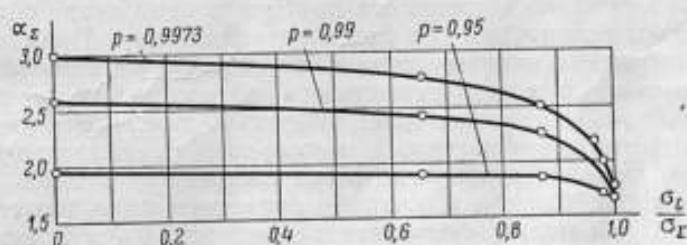


Рис. 4.

Для доминирующей погрешности в этом случае целесообразно выбрать закон равной вероятности.

Можно показать, что если выбрать для неизвестного закон равной вероятности, то ошибка за счет несоответствия выбранного закона действительному в худшем случае не превысит $\pm 20\%$ * от значения суммарной предельной погрешности (при доверительной вероятности ее 0,9973).

Таким образом, расчет коэффициента α_{Σ} в этом случае производится по табл. 5 или рис. 4.

* Эта ошибка соответствует крайним случаям, когда доминирующая погрешность имеет постоянное значение (l) или когда она подчинена нормальному закону $l = 3\sigma_1$. В обоих случаях указанная ошибка ($\pm 20\%$) имеет место при $l = 3\sigma$, уменьшаясь при $l \geq 3\sigma$ в пределе до нуля.

Для приборов с широким диапазоном определение суммарной погрешности производят в ряде точек амплитудного и частотного диапазонов. Затем обобщают эти данные в виде графика или эмпирической формулы.

III. О выборе законов распределения для первичных погрешностей при заданных допусках

Ряд источников погрешностей связан с качеством механического изготовления деталей и узлов; здесь целесообразно использовать опубликованный статистический материал. В частности, Н. А. Бородачевым [2] даны рекомендации по выбору коэффициентов α_i и k_i , не отнесенные к конкретному оборудованию и виду производства.

Многие источники погрешностей имеют свою специфику, характерную только для радиотехники. Для правильного учета следует установить для них законы распределения погрешностей. В основу должны лечь опытные данные. В работе П. П. Месяцева [8] приведены методика и много примеров обработки опытных данных с целью установления законов распределения.

В том случае, когда нет опытных данных, приходится принять по возможности более обоснованные априорные законы распределения. При определении суммарной погрешности прибора или определении результата измерения для учета погрешностей первичных величин, для которых заданы лишь допуски или предельные из возможных значений, во многих случаях может быть принят принцип равновероятности отдельных значений этих величин внутри заданного интервала, т. е. принят закон равной вероятности. При такой постановке вопроса становится возможным однозначное нормирование погрешности прибора и применение объективных методов испытания прибора при поэлементной поверке. Принятие закона равной вероятности для неизвестного распределения переменной величины внутри допуска $\pm \delta_i$ вместо нормального закона (при условии, что для последнего $3\sigma = \delta_i$) является более надежным, т. е. расчетное значение суммарной погрешности получится несколько большим, чем при выборе нормального закона. Правда, если закон распределения таков, что большие погрешности, близкие к крайним значениям поля допуска, встречаются чаще, чем малые, суммарная погрешность будет преуменьшена. Можно показать, что ошибка за счет отклонения действительного закона от выбранного закона равной вероятности не превысит $\pm 20\%$ от значения суммарной погрешности в худшем случае, если рассматриваемая погрешность доминирующая.

Анализ существа некоторых перечисленных ниже погрешностей, часто встречающихся в радиоизмерениях, показывает, что при отсутствии опытных данных, позволяющих установить законы распределения, целесообразно принимать для них следующие законы как априорные.

Нормальный закон распределения

Предельное значение погрешности (допуск) $\pm \delta_i$; $\sigma_i = \frac{\delta_i}{3}$; $k_i = 1$; $\alpha_i = 0$.

1. Флуктуационные погрешности различного рода, флуктуации эмиссии электронных ламп, флуктуации за счет дробового эффекта, тепловых шумов.

2. Для рядов экспериментальных данных, полученных путем повторных измерений при отсутствии корреляции.

3. Плотность распределения суммарной погрешности, складывающейся из большого числа независимых частных погрешностей при отсутствии доминирующей погрешности.

Закон равной вероятности

Предельное значение погрешности (допуск) $\pm\delta_i$; $\sigma_i = \frac{\delta_i}{\sqrt{3}}$; $k_i = 1,73$;

$\alpha_i = 0$.

1. Округления в ближайшую сторону отсчетов с неточностью до целого (или дольного) деления шкалы.
2. Погрешность уравнивания гальванометра при допустимой неточности $\pm\delta_i$.
3. Неточность значений сопротивлений.
4. Нестабильность напряжения сети внутри заданных пределов отклонения от номинала.
5. Люфтовые ошибки (полный люфт $2\delta_i$).
6. Изменение окружающей температуры в рабочих пределах.
7. Погрешности с неизвестным законом распределения внутри заданных пределов (при отсутствии данных для выбора более обоснованного закона распределения).
8. Неисключенные остатки систематических погрешностей (предельное значение равно $\pm\delta_i$).

Несимметричный закон равной вероятности

Погрешность равновероятна в интервале от 0 до $+2\delta_i$.

Отклонение середины поля допуска от номинала (постоянная погрешность) равно $+\delta_i$; $\sigma_i = \frac{\delta_i}{\sqrt{3}}$; $k_i = 1,73$; $\alpha_i = 0$.

1. Погрешность за счет равномерного изменения напряжения источника питания в интервале между очередными корректировками (например, изменение рабочего тока потенциометра за счет разряда батареи).
2. Погрешность за счет изменения выходных величин при разогреве аппаратуры за короткое время (например, выбег частоты генератора за время измерения).
3. Погрешность за счет несовершенства изоляции (утечек), сопротивление которой задается одним (нижним) допустимым значением (R_{min})

$$2\delta_i \approx \frac{1}{R_{min}}$$

4. Погрешности отсчета при импульсном (ступенчатом) перемещении указателя (значение одной ступени $2\delta_i$).

Закон распределения по треугольнику (Симпсона)

Предельное значение погрешности (допуск) $\pm\delta_i$; $\sigma_i = 0,407 \delta_i$; $k_i = 1,22$; $\alpha_i = 0$.

1. Погрешности измерений длин, углов, отрезков времени и т. п. по двум округленным отсчетам (δ_i — предельная погрешность двух отсчетов).
2. Погрешности измерения ослабления (емкости, индуктивности, сопротивления и т. д.) методом замещения по двум отсчетам (δ_i — удвоенная допустимая погрешность каждого отсчета).

Закон арксинуса (арккосинуса)

Допустимая амплитуда периодического изменения δ_i ; $\sigma_i = \frac{\delta_i}{\sqrt{2}} = 0,707 \delta_i$; $k_i = 2,12$; $\alpha_i = 0$.

1. Все погрешности, имеющие синусоидальный характер, с допустимой амплитудой δ_i и случайной (равновероятной) фазой.

2. Погрешность рассогласования при измерении номинальной мощности генератора (за счет отклонения внутреннего сопротивления генератора и входного сопротивления измерителя мощности от номинального)

$$\Delta_{\text{ог}} \cong -|\Gamma_n|^2 - 2|\Gamma_r||\Gamma_n| \cos \varphi_n,$$

где $|\Gamma_r|$ — модуль коэффициента отражения генератора (постоянная величина);

$|\Gamma_n|$ — модуль коэффициента отражения измерителя мощности (постоянная величина);

φ_n — фазовый угол нагрузки в плоскости $\varphi_r = 0$ и $\Gamma_r > 0$ — случайная величина, распределение которой принято равновероятным в интервале $0-360^\circ$.

Отклонение середины поля допуска от номинала: $\Delta_{\text{ог}} = -\Gamma_n^2$; $\delta_i = 2|\Gamma_r||\Gamma_n|$; $\sigma_i = 1,41|\Gamma_r||\Gamma_n|$.

IV. Об определении суммарной погрешности блочных приборов или установок, состоящих из комплекса приборов

Порядок определения суммарной погрешности в этом случае принципиально ничем не отличается от изложенного ранее порядка суммирования частных погрешностей.

Особенностью данного случая является то, что для каждого блока или прибора, входящего в комплекс, бывает, как правило, известна лишь допускаемая погрешность, без разделения на систематическую и случайную части, без указаний на действительный закон распределения и доверительную вероятность погрешности. Очевидно, что без этих данных строгое определение суммарной погрешности невозможно. Сложение абсолютных значений допускаемых погрешностей дает сильно преувеличенное значение суммарной погрешности, вероятность которого много меньше, чем обычно допускаемая (0,27%).

Для решения задачи, хотя бы с некоторой неопределенностью, остается путь по возможности обоснованного априорного выбора законов распределения для погрешностей каждого составляющего блока.

Облегчающим эту задачу обстоятельством является то, что погрешность каждого из блоков (приборов) является, как правило, совокупностью многих частных погрешностей, вызванных независимыми источниками, что дает основание, имея в виду центральную предельную теорему, считать закон распределения погрешностей каждого блока близким к нормальному и симметричным относительно середины поля допуска.

При отсутствии сведений о соотношении между рассеянием и допуском для данного блока (иначе, о доверительной вероятности допуска) приходится исходить из факта широкой распространенности правила «трех сигма», т. е. принять, что и в данном случае допустимая погрешность равна утроенной средней квадратической. Более осторожно принять соотношение «два сигма», т. е. считать, что допустимая погрешность равна удвоенной средней квадратической [9, стр. 108].

После определения средней квадратической погрешности для каждого блока суммарную погрешность находят, как изложено ранее.

V. Об определении суммарной погрешности при малом числе частных погрешностей

При малом числе частных погрешностей, заданных допусками δ , и имеющих законы распределения, отличные от нормального, определение закона распределения суммарной погрешности и соответствующего коэффициента α_{Σ} при заданной доверительной вероятности оказывается трудоемким и, как правило, не производится.

При механическом применении в этом случае правила «трех сигма», справедливого только для нормального закона суммарной погрешности, может получиться, что рассчитанная таким путем погрешность будет больше, чем сумма предельных значений, т. е.

$$3\sigma_{\Sigma} > \sum_1^m \delta_i.$$

Подобный пример приведен на стр. 25. Очевидно, что это вызывается необоснованным для данного случая выбором $\alpha_{\Sigma} = 3$. Для исключения подобных недоразумений следует при малом числе частных погрешностей, заданных допусками, проверять, не превосходит ли значение предельной погрешности, рассчитанное вероятностным методом, сумму предельных значений. Если это имеет место, то в качестве предельного значения суммарной погрешности, очевидно, следует принять сумму предельных значений частных погрешностей.

Изложенная в настоящей статье методика расчета суммарной погрешности не является, конечно, универсальной и может видоизменяться в зависимости от характера исходных данных. Приведенный в статье выбор априорных законов для различных источников погрешностей также не является универсальным и всеобъемлющим, а должен рассматриваться лишь как примерный. По мере накопления статистического материала по законам распределения различных погрешностей все реже придется прибегать к выбору априорных законов, и расчет суммарной погрешности будет становиться все более обоснованным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бородачев Н. А., Обоснование методики расчета допусков и ошибок размерных и кинематических цепей, Изд. АН СССР, 1943.
2. Бородачев Н. А., Анализ качества и точности производства, М., 1946.
3. Быховский М. Л., Основы динамической точности электрических и механических цепей, Изд. АН СССР, М., 1958.
4. Маликов М. Ф., Основы метрологии, М., 1949.
5. Смирнов Н. В. и Дунин-Барковский И. В., Краткий курс математической статистики для технических приложений, Физматгиздат, 1959.
6. Дунин-Барковский И. В. и Смирнов Н. В., Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть), Гостехиздат, М., 1955.
7. Андреев П. П., Математические таблицы, Госстатиздат, 1952.
8. Месяцев П. П., Применение теории вероятностей и математической статистики при конструировании и производстве радиоаппаратуры, Оборонгиз, 1958.
9. Тиходеев П. М., Очерки об исходных измерениях, Машгиз, М.—Л., 1954.

Поступила в редакцию
16/II 1961 г.

Ф. Б. ГРИНЕВИЧ, К. Б. КАРАНДЕЕВ

Институт автоматки и электрометрии СОАН СССР

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

Показано, что относительные погрешности измерения комплексных сопротивлений должны выражаться отношением составляющих погрешности к модулю сопротивления, а не к соответствующим составляющим комплекса сопротивления, как это обычно делается. В приложении к статье рассматривается с этих позиций способ нормирования погрешностей, принятый в ГОСТ на мосты переменного тока.

В данной работе мы рассмотрим некоторые вопросы, связанные с определением погрешности измерения комплексного сопротивления, которые не получили в известной нам литературе достаточного освещения.*

Качество результата измерения скалярной величины оценивают значением абсолютной или относительной погрешности измерения. Очевидно, качество результата измерения векторной величины (в данном случае — комплексного сопротивления) можно также оценивать по абсолютной или относительной погрешности.

Абсолютную погрешность измерения ΔZ комплексного сопротивления Z можно записать в виде

$$\Delta Z = Z_n - Z, \quad (1)$$

где Z_n — значение комплексного сопротивления, полученное в результате измерений;

Z — действительное значение комплексного сопротивления.

Абсолютная погрешность измерения ΔZ представляет собой некоторый вектор, параметры которого зависят от метода измерения, свойств измерительной цепи, точности подгонки образцовых элементов цепи и т. п. Если векторы Z_n и Z представить в плоскости Z , то возможные пределы изменения вектора ΔZ могут быть изображены некоторой областью $P_{\Delta Z}$.

Отметим довольно очевидное свойство: абсолютная погрешность ΔZ не изменяется при преобразовании системы координат. То же самое относится и к области $P_{\Delta Z}$. Следовательно, погрешность ΔZ и область $P_{\Delta Z}$ являются однозначными характеристиками измерительного процесса или электронизмерительного устройства.

* Исключением является статья проф. С. М. Брагина «Расчет схем для измерения диэлектрических потерь» («Электричество», № 17—18, 1930), где дана сравнительная оценка точности измерения емкости и тангенса угла потерь.

Перейдем к определению относительной погрешности измерения комплексного сопротивления Z .

Существуют различные способы определения этой погрешности. Например, при измерении комплексных сопротивлений по активной R и реактивной X составляющим пользуются относительными погрешностями $\frac{\Delta R}{R}$ и $\frac{\Delta X}{X}$. При измерении параметров конденсаторов C и $\operatorname{tg} \delta$ определяют погрешности $\frac{\Delta C}{C}$ и $\frac{\Delta \operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \delta}$; при измерении параметров L и Q катушек индуктивности определяют погрешности $\frac{\Delta L}{L}$ и $\frac{\Delta Q}{Q}$.

К сожалению, в подавляющем большинстве случаев перечисленные выше относительные погрешности применяются в качестве характеристик точности измерения комплексных сопротивлений без каких-либо оговорок и ограничений, хотя они не только не являются общими, но в ряде случаев совсем ничего не говорят о совершенстве электроизмерительного устройства или точности выполненного эксперимента. Действительно, пусть, например, активная составляющая R комплексного сопротивления $Z = R + jX$ измерена с большой погрешностью, равной $\pm 10\%$, т. е. $\frac{\Delta R}{R} = 0,1$. Можно ли сказать, что измерение проведено плохо и электроизмерительное устройство несовершенно? Очевидно, нет. Если, например, речь идет об измерении параметров конденсатора с углом потерь, не превышающим $0,0001 \text{ рад}$, то устройство, дающее результат измерения R с погрешностью $\pm 10\%$, является высокоточным. Очевидно, можно привести и ряд других примеров. Что касается относительных погрешностей

$\frac{\Delta \operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \delta}$ и $\frac{\Delta Q}{Q}$, то, как нам представляется, их применение лишено вообще какого-либо смысла.

При определении относительной погрешности измерения векторной величины мы будем исходить из следующих двух предпосылок. Во-первых, становится очевидным, что относительная погрешность, так же как и абсолютная, должна быть независимой по отношению к преобразованию системы координат. Если относительная погрешность измерения вектора будет определена без учета этого условия, то она не будет являться однозначной характеристикой качества процесса измерения. Во-вторых, весьма желательно было бы определить относительную погрешность таким образом, чтобы она была вектором, совпадающим по направлению с вектором абсолютной погрешности. Учитывая эти два условия, можно прийти к выводу, что относительная погрешность измерения векторной величины должна быть определена только как отношение абсолютной погрешности к модулю вектора. Так как комплексное сопротивление может рассматриваться как векторная величина, то относительная погрешность σ измерения комплексного сопротивления Z будет равна

$$\sigma = \frac{\Delta Z}{|Z|}. \quad (2)$$

Погрешность σ , определенная согласно выражению (2), может быть принята в качестве основной характеристики точности результата измерения комплексного сопротивления.

Рассмотрим некоторые частные случаи определения погрешности σ и ее составляющих.

При последовательной схеме замещения измеряемого сопротивления $Z = R + jX$ имеем:

$$\begin{aligned}\Delta Z &= \Delta R + j\Delta X = \Delta Z_R + \Delta Z_X; \\ \dot{\sigma} &= \frac{\Delta Z}{|Z|} = \frac{\Delta Z_R}{|Z|} + \frac{\Delta Z_X}{|Z|} = \dot{\sigma}_R + \dot{\sigma}_X,\end{aligned}\quad (3)$$

где ΔZ_R и ΔZ_X , $\dot{\sigma}_R$ и $\dot{\sigma}_X$ — абсолютные и относительные погрешности измерения сопротивления Z по соответствующим составляющим.

Если измеряемое сопротивление Z имеет небольшую реактивную составляющую (например, проволочное «безреактивное» сопротивление), то $|Z| \approx R$ и $\dot{\sigma}_R \approx \frac{\Delta R}{R}$. В противном случае, т. е. при $X \gg R$, можно положить, что $|Z| \approx X$, и тогда $\sigma_X \approx \frac{\Delta X}{X}$.

При измерении параметров конденсаторов качество результата измерений характеризуют погрешностью измерения емкости C и погрешностью измерения тангенса угла потерь $\text{tg } \delta$. При последовательной схеме замещения можно записать, что

$$Z = X (\text{tg } \delta + j),$$

тогда

$$\begin{aligned}\Delta Z &= \Delta X (\text{tg } \delta + j) + X \Delta \text{tg } \delta = \Delta Z_X + \Delta Z_{\text{tg } \delta}; \\ \dot{\sigma} &= \frac{\Delta Z}{|Z|} = \frac{\Delta Z_X}{|Z|} + \frac{\Delta Z_{\text{tg } \delta}}{|Z|} = \dot{\sigma}_X + \dot{\sigma}_{\text{tg } \delta}.\end{aligned}\quad (4)$$

Из формулы (4) следует, что при $\text{tg } \delta \ll 1$

$$\left. \begin{aligned}|\sigma_X| &= |\sigma_C| = \left| \frac{\Delta X (\text{tg } \delta + j)}{X \sqrt{1 + \text{tg}^2 \delta}} \right| = \frac{\Delta C}{C} \\ |\sigma_{\text{tg } \delta}| &= \frac{X \Delta \text{tg } \delta}{X \sqrt{1 + \text{tg}^2 \delta}} \approx \Delta \text{tg } \delta\end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Из уравнения (5) следует, что оценка точности измерения $\text{tg } \delta$ комплексного сопротивления должна производиться по абсолютной величине $\Delta \text{tg } \delta$, а не по относительной $\frac{\Delta \text{tg } \delta}{\text{tg } \delta}$, как это производится в настоящее время. Это естественно: величины $\text{tg } \delta$ и $\Delta \text{tg } \delta$ являются сами по себе относительными.

При измерении параметров катушек индуктивности качество результата измерения обычно характеризуют погрешностью измерения индуктивности L и погрешностью измерения добротности Q . При последовательной схеме замещения можно записать, что

$$\begin{aligned}Z &= X \left(\frac{1}{Q} + j \right); \\ \Delta Z &= \Delta X \left(\frac{1}{Q} + j \right) + X \left(-\frac{\Delta Q}{Q^2} \right) = \Delta Z_X + \Delta Z_Q; \\ \dot{\sigma} &= \frac{\Delta Z_X}{|Z|} + \frac{\Delta Z_Q}{|Z|} = \dot{\sigma}_X + \dot{\sigma}_Q.\end{aligned}\quad (6)$$

Из уравнения (6) следует, что при $Q \gg 1$

$$\left. \begin{aligned} |\sigma_x| = |\sigma_L| &= \left| \frac{\Delta X \left(\frac{1}{Q} + j \right)}{X \sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}}} \right| = \frac{\Delta L}{L} \\ |\sigma_Q| &= \left| \frac{X \left(-\frac{\Delta Q}{Q^2} \right)}{X \sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}}} \right| \approx \frac{\Delta Q}{Q^2} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Из уравнений (7) следует, что для оценки точности измерения добротности Q комплексного сопротивления должно использоваться отношение $\frac{\Delta Q}{Q^2}$.

В заключение рассмотрим вопрос о соотношении между величинами составляющих погрешности σ при измерении комплексных сопротивлений на мостовых устройствах переменного тока.

Распределение напряжений в мостовой схеме, состоящей из линейных комплексных сопротивлений, может изображаться относительно измеряемого комплексного сопротивления Z некоторой дробно-линейной аналитической функцией $W = W(Z)$. * Приращение выходного напряжения моста $\Delta \dot{U}$, появившееся вследствие изменения Z на ΔZ , будет при этом равно

$$\Delta \dot{U} = \dot{U}_n \frac{\partial W}{\partial Z} \Delta Z, \quad (4)$$

где \dot{U}_n — напряжение питания моста.

Рассмотрим частный случай. Пусть $Z = X(\operatorname{tg} \delta + j)$, и приращение получила только реактивная составляющая. Так как функция W является аналитической, то ее производная не зависит от направления приращения аргумента; поэтому

$$\Delta \dot{U}_X = \dot{U}_n \frac{\partial W}{\partial Z} \Delta Z_X. \quad (8)$$

Аналогично при изменении только величины $\operatorname{tg} \delta$ будем иметь следующие выражения для приращения выходного напряжения:

$$\Delta \dot{U}_{\operatorname{tg} \delta} = \dot{U}_n \frac{\partial W}{\partial Z} \Delta Z_{\operatorname{tg} \delta}. \quad (9)$$

Умножая правые части выражений (8) и (9) на множитель $\frac{Z}{|Z|} e^{-j\varphi}$, равный единице ($\varphi = \arg Z$), и обозначая относительную чувствительность моста $\frac{\partial W}{\partial Z} Z$ через S_0 , можно получить следующие формулы для определения модулей векторов $\Delta \dot{U}_X$ и $\Delta \dot{U}_{\operatorname{tg} \delta}$:

$$\Delta U_X = U_n S_0 \sigma_X;$$

$$\Delta U_{\operatorname{tg} \delta} = U_n S_0 \sigma_{\operatorname{tg} \delta}.$$

* Карандеев К. Б., Мостовые методы измерений, Гостехиздат УССР, Киев, 1953.

Учитывая уравнение (5), окончательно получаем

$$\left. \begin{aligned} \Delta U_X &= U_n S_0 \frac{\Delta C}{C} \\ \Delta U_{tg \delta} &= U_n S_0 \Delta tg \delta \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Из соотношений (10) следует, что приращение напряжения в измерительной диагонали моста пропорционально относительному изменению емкости и абсолютному приращению тангенса угла потерь. Если $\Delta U_X = \Delta U_{tg \delta}$, то $\frac{\Delta C}{C} = \Delta tg \delta$, т. е. относительное изменение емкости и равное ему по величине абсолютное приращение тангенса угла потерь вызывают одинаковые приращения выходного напряжения мостовой схемы. Аналогично можно показать, что при $\Delta U_X = \Delta U_Q$ будет иметь место равенство $\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta Q}{Q^2}$.

Приведенные выше соотношения надо учитывать при оценке точности измерения комплексных сопротивлений и в особенности при определении классов точности мостов переменного тока. Из изложенного следует также, что в общем случае составляющие (например σ_X и σ_R , σ_X и $\sigma_{tg \delta}$, σ_X и σ_Q) погрешности σ должны быть по величине примерно равными или соразмерными. В противном случае могут возникнуть противоречия в требованиях к характеристикам мостовой цепи (чувствительность, стабильность и т. п.) при измерении различных параметров.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В подтверждение необходимости применения изложенного выше способа определения погрешностей рассмотрим следующий пример.

Согласно проекту ГОСТ, на мосты переменного тока, разработанному заводом «Точ-электронприбор»* для моста типа МПНЕ (измерение емкости и индуктивности) класса 5 предусматривается измерение добротности Q в пределах до 500 с погрешностью, не превышающей $(20 + \frac{8}{Q})\%$. Погрешность измерения индуктивности L не должна превышать 5%.

Сравним требования к чувствительности нулевого указателя моста, вытекающие из заданных значений погрешностей по L и по Q , при $Q = 500$. На основании уравнения (7) имеем:

$$|\sigma_Q| = \frac{\Delta Q}{Q^2} \approx 0,0004 = 0,04\%.$$

Так как $\sigma_Q \approx 0,04\%$, а $\sigma_L = 5\%$, то порог чувствительности нулевого указателя моста для обеспечения заданной точности измерения добротности Q должен быть увеличен примерно в 100 раз по сравнению с тем, который необходим для данного класса точности моста. В соответствующее число раз должна быть увеличена точность уравнивания по L и стабильность параметров, в противном случае уравновесить мост при такой чувствительности окажется невозможным. Однако в результате такого повышения характеристик моста получается прибор уже более высокого класса. Возникшее противоречие объясняется тем, что в данном случае в основу определения погрешности измерения параметров комплексных сопротивлений положены формулы, не отражающие действительных соотношений, имеющих место при измерениях комплексных сопротивлений с использованием мостов переменного тока.

* Во время подготовки статьи к печати был опубликован ГОСТ на мосты переменного тока, где, к сожалению, не учтены изложенные выше положения.

М. А. ГОЛЬДИНОВ
ВНИИК

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ПРИБОРОВ С ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

В статье рассматривается погрешность передаточных функций приборов с линейными динамическими системами для случая, когда передаточная функция определяется путем измерения амплитуды входного и выходного сигналов и их фазового сдвига на высоких частотах и экстраполяции полученных данных в рабочей области частот. Показано, что даже при ограниченной точности таких измерений передаточная функция в области рабочих частот определяется с большой точностью.

Метод снятия амплитудных и фазовых частотных характеристик, определяющих в совокупности передаточную функцию, получил широкое распространение при исследовании электрических систем автоматики и электроизмерительных приборов. В последнее время этот метод применяется и в других областях измерения. Знание передаточной функции динамической системы прибора нужно для оценки погрешностей установления рабочей полосы частот и для решения других вопросов, связанных с использованием прибора для измерения переменных величин.

Итак, обеспечение правильности динамических измерений требует измерения передаточной функции прибора. Это возможно производить с помощью установок, вырабатывающих разного рода стандартные сигналы [1]. Одна из установок для генерирования пневматического синусоидального сигнала и для записи как сигнала, так и движения стрелки дифманометра, находящегося под воздействием такого сигнала, создана во ВНИИК. Установка такого же типа для снятия частотных характеристик пневматических компенсационных дифманометров имеется также в Центральном научно-исследовательском институте комплексной автоматизации (ЦНИИКА).

Снятие частотных характеристик возможно в том случае, если динамическая система линейна. При подаче на вход дифманометров типов ДП-430 и ДМ-612 синусоидальных сигналов на выходе мы получили также синусоидальные сигналы для области частот, содержащей не только плоскую, но и наклонную часть амплитудной характеристики. * Эти опыты убеж-

* Опыт подробно описаны в отчете ВНИИК.

дают в том, что указанные дифманометры линейны. Многие типы приборов, применяемых для динамических измерений, также линейны.

Высокой точности нахождения точек амплитудной и фазовой характеристик нельзя достигнуть из-за сложности применяемых установок. Это привело нас к мысли производить измерения на высоких частотах (на наклонной части амплитудной характеристики) и экстраполировать полученные данные в область рабочих частот. Ниже показано, что даже при ограниченной точности таких измерений передаточная функция определяется в области рабочих частот с высокой точностью.

Следует отметить, что для нелинейных систем не предложено характеристик типа передаточной функции и характеризовать их можно только дифференциальным уравнением движения. Экспериментально определить характер уравнения и его параметры в этом случае практически невозможно. Только при малых отклонениях от линейности можно характеризовать приборы передаточными функциями (уточнив для этого случая определение последнего понятия) и учесть дополнительную погрешность, возникающую в результате нелинейности. Этот вопрос в нашей статье не рассматривается.

Надо иметь в виду, что применять предлагаемый метод следует только после экспериментальной проверки динамической системы прибора (синусоидальный сигнал на входе преобразуется в синусоидальный же сигнал на выходе или реакция на скачок меняет только масштаб при разных величинах скачка или разных положениях его относительно нуля шкалы прибора).

Рассмотрим метод, позволяющий при нахождении амплитудной и фазовой частотных характеристик прибора с малой точностью на больших частотах, соответствующих наклонной части амплитудной характеристики, получать с большей точностью значение передаточной функции (амплитудно-фазовой характеристики) в рабочем диапазоне частот. Для этого следует найти передаточную функцию прибора по его схеме* (в виде дробно-рациональной функции с неизвестными коэффициентами), затем экспериментальным путем определить частотные характеристики прибора и аппроксимировать их найденной функцией.

Обычно передаточная функция приборов проста, имеет в знаменателе многочлен 2-го или 3-го порядка и определяется малым числом параметров. Поэтому при практическом применении метода понадобятся небольшое число измерений и простые расчеты. В дальнейшем, однако, будем решать задачу в общем виде, считая, что передаточная функция дробно-рациональна и имеет полиномы степени n в знаменателе и степени m в числителе. Такое решение делает возможным применение метода в случае любого n . Поэтому не следует пугаться кажущейся громоздкости вычислений.

В случае необходимости можно учитывать веса погрешностей определения отдельных точек частотной характеристики. Для этого входящие в приведенные ниже уравнения погрешности должны быть предварительно умножены на соответствующие веса.

Дальнейшего повышения точности нахождения передаточной функции можно достигнуть применением предлагаемого ниже метода в сочетании с методом наименьших квадратов (для этого требуется большее число измерений) или при нескольких измерениях в каждой точке. Эти приемы

* Можно получить ее, записав уравнение движения динамической системы в виде линейного дифференциального уравнения и произвести преобразование Лапласа последнего уравнения.

хорошо известны и их применение нами рассматриваться не будет во избежание усложнения выкладок и увеличения объема статьи.

Из уравнений, полученных при аппроксимации, находят динамические параметры поверяемого прибора. Зная эти параметры и погрешности их измерения, находят погрешность определения передаточной функции прибора в рабочем диапазоне частот. Как известно [2], передаточная функция прибора, имеющего линейную динамическую систему, является дробно-рациональной функцией комплексного параметра и ее всегда можно представить в виде

$$K(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad (n \geq m), \quad (1)$$

где $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1$ — коэффициенты дифференциального уравнения системы;

$p = \alpha + i\omega$ — оператор дифференцирования в преобразовании Лапласа.

По виду передаточной функции на мнимой оси ($p = i\omega$) можно воспроизвести функцию (1) на всей комплексной плоскости. Передаточная функция на мнимой оси, или амплитудно-фазовая характеристика системы, имеет вид

$$K(i\omega) = \frac{b_m (i\omega)^m + b_{m-1} (i\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (i\omega) + b_0}{a_n (i\omega)^n + a_{n-1} (i\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (i\omega) + a_0} = \frac{Z(i\omega)}{X(i\omega)}, \quad (2)$$

где Z и X — преобразование Фурье соответственно от входного и выходного сигналов.

Модуль выражения (2) называется амплитудно-частотной характеристикой

$$A(\omega) = \sqrt{\operatorname{Im}^2 [K(i\omega)] + \operatorname{Re}^2 [K(i\omega)]}. \quad (3)$$

Фазовую частотную характеристику находят по формуле

$$J(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} [K(i\omega)]}{\operatorname{Re} [K(i\omega)]}. \quad (4)$$

Функцию $K(i\omega)$ можно определить, подавая на вход системы гармонический сигнал

$$X(t) = f e^{i\omega t}, \quad (5)$$

(где f — амплитуда; ω — угловая частота), тогда вынужденные колебания выходной величины (отклонения указателя прибора) будут выражаться зависимостью

$$Z(t) = N e^{i(\omega t + \varphi)}. \quad (6)$$

Подставляя X и Z из уравнений (5) и (6) в уравнение (2), получим

$$\frac{b_m (i\omega)^m + b_{m-1} (i\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (i\omega) + b_0}{a_n (i\omega)^n + a_{n-1} (i\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (i\omega) + a_0} = \frac{N}{f} e^{i\varphi} = \frac{N}{f} (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (7)$$

отсюда имеем

$$\frac{N}{f} \left(i \sum a_k i^{k-1} \omega^k + \sum a_k i^k \omega^k \right) (\cos \varphi + i \sin \varphi) = i \sum b_k i^{k-1} \omega^k + \sum b_k i^k \omega^k, \quad (8)$$

где \sum — суммирование по нечетным значениям k ;

$\overset{\circ}{\sum}$ — то же по четным.

Отделяя в формуле (8) действительные части от мнимых, имеем

$$\cos \varphi \sum_{k=0}^n (-1)^{\frac{k}{2}} a_k \omega^k - \sin \varphi \sum_{k=0}^m (-1)^{\frac{k-1}{2}} a_k \omega^k = \frac{f}{N} \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^{\frac{k}{2}} b_k \omega^k; \quad (9)$$

$$\cos \varphi \sum_{k=0}^m (-1)^{\frac{k-1}{2}} a_k \omega^k + \sin \varphi \sum_{k=0}^n (-1)^{\frac{k}{2}} a_k \omega^k = \frac{f}{N} \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^{\frac{k-1}{2}} b_k \omega^k. \quad (10)$$

Нам не известна передаточная функция, т. е. величины a_k и b_k . Поэтому уравнения (9) и (10) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных a_k и b_k .

В выражения для коэффициентов этих уравнений входят величины f/N , ω^k , $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$, определяемые экспериментально путем приложения к системе гармонического воздействия по уравнению (5) и измерения всех интересующих нас величин: частоты ω приложенного воздействия, его амплитуды f , амплитуды колебаний выходной величины N и сдвига фазы между обеими амплитудами φ .

Для решения системы уравнений (9) и (10) подставляют в них значения $u_i = \frac{f_i}{N_i}$, ω_i^k , $\sin \varphi_i$ и $\cos \varphi_i$ в точках амплитудной и фазовой характеристик, взятых в области высоких частот (i — номер точки). Число таких точек должно быть равно $\frac{n+m}{2} - 1$, так как для точки, соответствующей $\omega_0 = 0$, значение $\varphi_0 = 0$, а $u_0 = \frac{f_0}{N_0}$ заранее, известно по данным статической градуировки прибора. Таким образом, по значениям $p = \frac{n+m-2}{2}$ точек частотных характеристик определяются коэффициенты передаточной функции. Выше было указано, что эти точки должны определяться на высоких частотах, соответствующих наклонной части амплитудной характеристики. Именно в этом случае достигается повышенная точность определения передаточной функции в рабочем диапазоне частот, что наглядно видно на рис. 1. На рис. 1 и 2 представлены графики амплитудных и фазовых характеристик приборов, описываемых дифференциальным уравнением второго порядка; графики построены в безразмерных координатах* при различном успокоении.

Из рис. 1 видно, что в рабочем диапазоне частот (там, где погрешность передаточной функции должна быть мала) динамические искажения невелики. Поэтому здесь расстояния между кривыми малы, даже если параметры передаточной функции для нескольких приборов резко отличаются друг от друга. На самых высоких частотах, когда происходит почти полное подавление измеряемого сигнала, частотные характеристики также близки друг к другу. На наклонных участках расстояния между кривыми для систем с отличающимися друг от друга параметрами велики. Поэтому значительные погрешности определения точек наклонных участков характеристик соответствуют весьма малым отклонениям в области рабочих частот.

Таким образом, измеряя с небольшой точностью амплитуды и сдвиги фазы в диапазоне частот, соответствующем наклонным участкам характеристик, и рассчитывая по ним передаточную функцию, мы определяем последнюю в рабочем диапазоне с большей точностью.

* На графике (рис. 1) $u = \frac{1}{V(1-\gamma^2)^2 + (2\beta\gamma)^2}$, где $\gamma = \frac{\omega}{\omega_0}$, ω_0 — собственная частота прибора; β — степень затухания.

На рис. 2 приняты аналогичные обозначения.

Перейдем к изложению метода расчета передаточной функции и ее погрешности. Решая систему уравнений (9) и (10), находим коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$ в виде функций величин $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$.

Так как эти величины измеряются неточно, с погрешностями $\Delta u_0, \Delta u_1, \dots, \Delta u_{n-1}, \Delta \omega_1, \dots, \Delta \omega_{n-1}, \Delta \varphi_1, \dots, \Delta \varphi_{n-1}$, то в определении соответствующих коэффициентов возникают ошибки: $\Delta a_0, \Delta a_1, \dots, \Delta a_n, \Delta b_0, \Delta b_1, \dots, \Delta b_m$.

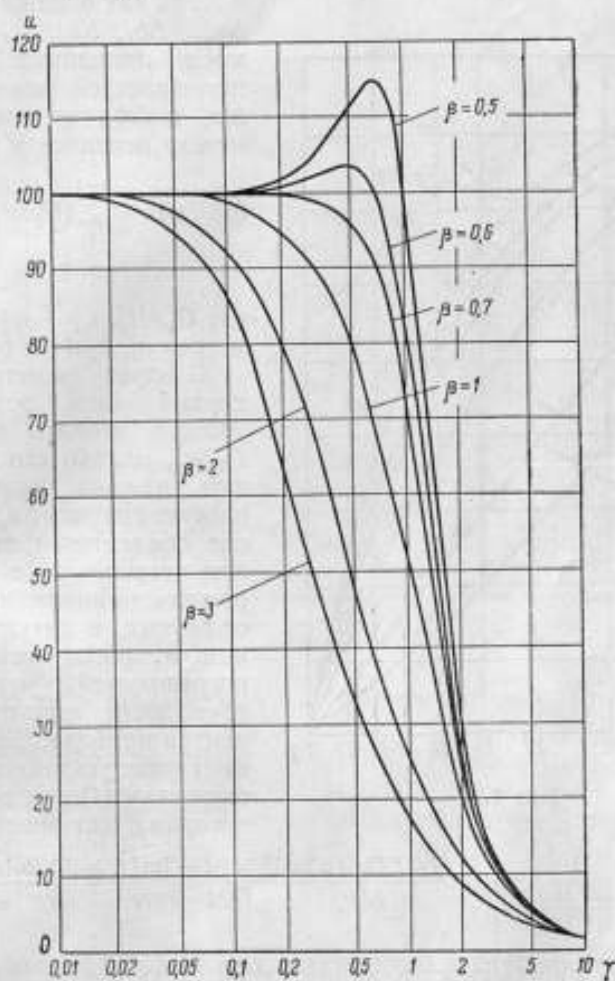


Рис. 1.

Эти ошибки определяются дифференцированием выражений, полученных для $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$ и последующей заменой в них соответствующих дифференциалов погрешностями $\Delta u_0, \Delta u_1, \dots, \Delta u_{n-1}, \Delta \omega_1, \dots, \Delta \omega_{n-1}, \Delta \varphi_1, \dots, \Delta \varphi_{n-1}$.

Находим амплитудно-частотную характеристику

$$A(\omega) = |K(i\omega)| = F(a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m, \omega). \quad (11)$$

В уравнении (11) все величины, кроме ω , определяются расчетом по результатам измерений.

Погрешность значения $A(\omega)$ можно выразить полным дифференциалом функции F :

$$\Delta A(\omega) = \frac{\partial F}{\partial a_0} \Delta a_0 + \frac{\partial F}{\partial a_1} \Delta a_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial a_n} \Delta a_n + \frac{\partial A}{\partial b_0} \Delta b_0 + \frac{\partial A}{\partial b_1} \Delta b_1 + \dots + \frac{\partial A}{\partial b_m} \Delta b_m. \quad (12)$$

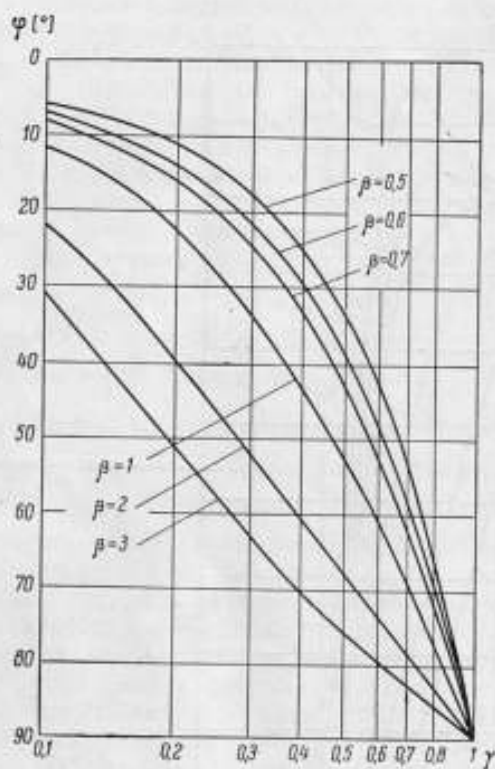


Рис. 2.

$$\Delta \varphi(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{\text{Im}^2[K(i\omega)]}{\text{Re}^2[K(i\omega)]}} \times \frac{\text{Re}[K(i\omega)] \Delta \text{Im}[K(i\omega)] - \text{Im}[K(i\omega)] \Delta \text{Re}[K(i\omega)]}{\text{Re}^2[K(i\omega)]}. \quad (14)$$

По аналогии с погрешностью амплитудной характеристики (13) погрешность (14) можно представить в виде

$$\Delta \varphi(\omega) = \sum_1^{p-1} (R_i \Delta u_i + P_i \Delta \omega_i + Q_i \Delta \varphi_i), \quad (15)$$

где R_i, P_i, Q_i — функции параметров a_i, b_i и частоты ω .

По найденным значениям $A(\omega)$, $\Delta A(\omega)$ и $\Delta \varphi(\omega)$ определим погрешность амплитудно-фазовой характеристики $\Delta K(i\omega)$.

Обратимся к рис. 3, где на комплексной плоскости показано точное значение K и его среднее значение K_{cp} , определяемое значениями амплитуды A_c и сдвига фаз φ_c с математическими ожиданиями $M\Delta$ и $M\Delta\varphi$:

Так как ошибки $\Delta a_0, \Delta a_1, \dots, \Delta a_n, \Delta b_0, \Delta b_1, \dots, \Delta b_m$ являются линейными функциями погрешностей измерений $\Delta u_i, \Delta \omega_i$ и $\Delta \varphi_i$, то уравнение (12) можно переписать в виде

$$\Delta A(\omega) = \sum_1^{p-1} (G_i \Delta u_i + H_i \Delta \omega_i + L_i \Delta \varphi_i), \quad (13)$$

где G_i, H_i, L_i — функции параметров a_i, b_i и частоты ω .

Следует заметить, что в первый член формулы (13) должно входить произведение $G_0 \Delta u_0$, однако его можно считать равным нулю, так как следует принять $\Delta u_0 = 0$. Последнее объясняется тем, что Δu_0 есть погрешность в статическом режиме, не вносящая, в отличие от других, в результат измерения в динамическом режиме погрешностей, вызванных неточностями изготовления элементов прибора. Далее отыскиваем фазовую частотную характеристику (4) и ее погрешность, которая будет равна

$$\left. \begin{aligned} m_A &= M\Delta A = \sum_{i=1}^p (G_i M \Delta u_i + H_i M \Delta \omega_i + L_i M \Delta \varphi_i) \\ m_\varphi &= M\Delta \varphi = \sum_{i=1}^p (R_i M \Delta u_i + P_i M \Delta \omega_i + Q_i M \Delta \varphi_i) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

На рис. 3 показан также эллипс равных вероятностей для совместного распределения случайных величин $\delta A = \Delta A - M\Delta A$ и $\Delta \delta \varphi = A(\Delta \varphi - M\Delta \varphi)$. Так как Δu_i , $\Delta \omega_i$ и $\Delta \varphi_i$ — погрешности измерения

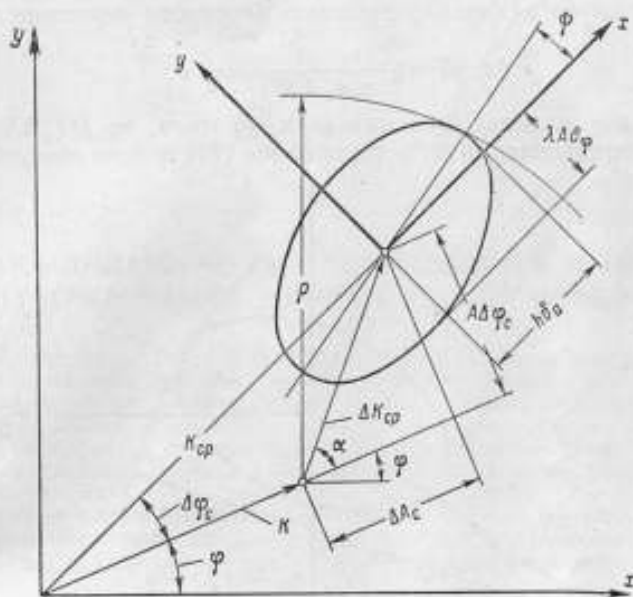


Рис. 3.

и их можно считать независимыми случайными величинами с нормальным законом распределения, то и δA и $\Delta \delta \varphi$ имеют нормальные распределения с параметрами: средние равны нулю, дисперсии

$$\left. \begin{aligned} \sigma_A^2 &= D\delta A = D\Delta A = \sum_{i=1}^p (G_i^2 M \Delta u_i^2 + H_i^2 M \Delta \omega_i^2 + L_i^2 M \Delta \varphi_i^2) - (M\Delta A)^2 \\ \sigma_\varphi^2 &= D\delta \varphi = D\Delta \varphi = \sum_{i=1}^p (R_i^2 M \Delta u_i^2 + P_i^2 M \Delta \omega_i^2 + Q_i^2 M \Delta \varphi_i^2) - (M\Delta \varphi)^2 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

(так как Δu_i , $\Delta \omega_i$, $\Delta \varphi_i$ — взаимно независимы) и коэффициент корреляции

$$r = \frac{\sum_{i=1}^p (G_i R_i M \Delta u_i^2 + H_i P_i M \Delta \omega_i^2 + L_i Q_i M \Delta \varphi_i^2) - M\Delta A M\Delta \varphi}{\sigma_A \sigma_\varphi} \quad (18)$$

Вероятность попадания точки, определяющей вектор K передаточной функции [3], внутрь эллипса

$$\frac{(x - m_A)^2}{\sigma_A^2} - 2r \frac{(x - m_A)(y - Am_\varphi)}{A\sigma_A\sigma_\varphi} + \frac{(y - Am_\varphi)^2}{A^2\sigma_\varphi^2} = \lambda^2 \quad (19)$$

есть
$$P(\lambda) = 1 - e^{-\frac{\lambda^2}{2(1-r^2)}} \quad (20)$$

Например, при

$$\lambda = 3 \sqrt{1 - r^2} \quad (21)$$

получим $P(\lambda) = 0,99$.

Вероятность того, что $|\Delta K| < \rho$ (рис. 3), очевидно, больше $P(\lambda)$, так как эллипс лежит внутри круга радиуса ρ (с центром в точке K). Таким образом

$$P(|\Delta K| < \rho) \geq 0,99.$$

Можно точно подсчитать $P(|\Delta K| < \rho)$, для этого надо проинтегрировать внутри круга радиуса ρ функцию плотности вероятностей

$$P(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\Delta}\sigma_{\Phi}A\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}.$$

Так как вне эллипса функция $P(x, y)$ мала, то $P(|\Delta K| < \rho)$ будет не на много превышать 0,99, и выражение (21) можно считать критерием

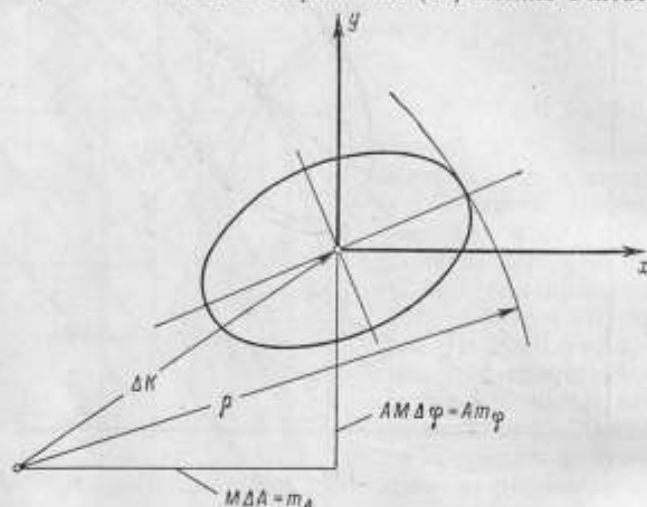


Рис. 4.

выбора $|\Delta K|_{\max}$. Отсюда следует, что метод определения $|\Delta K|_{\max} = \rho$ можно сформулировать следующим образом: по формулам (16)–(18) подсчитывают вероятностные характеристики погрешностей ΔA и $\Delta \varphi$ амплитудной и фазовой характеристик; по формуле (21) подсчитывают λ и, пользуясь уравнением (19), строят эллипс равной вероятности (рис. 4). Затем откладывают вектор $\Delta K = (A\bar{m}_{\varphi}, \bar{m}_A)$ и из начала вектора ΔK проводят окружность, имеющую внутреннее касание с эллипсом. Такое построение делают для каждого ω и в результате получают

$$|\Delta K|_{\max} = \rho(\omega). \quad (22)$$

Это и будет погрешностью измерения передаточной функции предлагаемым способом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Частотные методы в автоматике, Сборник статей под ред. В. А. Карабанова, ИЛ, М., 1957.
2. Солодовников В. В., Введение в статистическую динамику систем автоматического управления, Гостехиздат, 1952.
3. Гнеденко Б. В., Теория вероятностей, Гостехиздат, 1954, стр. 139.

Поступила в редакцию
5/IV 1960 г.

В. А. ВОЛКОНСКИЙ,
А. С. НЕМИРОВСКИЙ
ВНИИК

ОЦЕНКА ДИНАМИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ И ОШИБОК ИНТЕГРИРОВАНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ

В статье рассматриваются вопросы динамической точности приборов. Выясняются параметры, влияющие на динамическую точность. Даны способы выбора оптимальных параметров, при которых динамическая погрешность будет минимальна. Рассмотрены интегрирующие приборы и исследовано влияние динамических погрешностей на ошибку интегрирования. Выделены классы передаточных функций динамических систем приборов, которые снижают до минимума динамическую ошибку интегрирования. Для нелинейных передаточных систем рассмотрен частный, но важный случай извлечения квадратного корня на выходе из линейной системы. Даны формулы для подсчета ошибки интегрирования и метод выбора оптимальных параметров.

Приборы для измерения быстро изменяющихся величин применяются все чаще, и в метрологических учреждениях возникает потребность установить критерии правильности выбора схем таких приборов и правильности их изготовления. В институтах Комитета разрабатываются методы исследования и поверки приборов, предназначенных для работы в динамическом режиме.

Основной задачей оценки точности таких приборов является выяснение параметров, дающих возможность судить о погрешностях, возникающих в динамическом режиме (так называемые динамические погрешности), создание способов измерения этих параметров и разработка методов расчета динамических погрешностей по измеренным параметрам.

Кроме того, надо иметь методы выбора оптимальных параметров динамической системы прибора. Это дает возможность судить о правильности выбора схемы прибора, что может понадобиться при утверждении его типа.

Все эти вопросы, за исключением вопроса об измерении динамических параметров, являются предметом настоящей статьи.

Ввиду отсутствия установившейся терминологии ниже формулируются применяемые в статье термины, дана классификация динамических погрешностей по причинам их возникновения и разобраны критерии выбора оптимальных динамических систем.

Далее рассмотрены приборы, имеющие линейные динамические системы с сосредоточенными параметрами, даны оценки их динамических погрешностей и ошибки интегрирования измеряемой величины, возникающих

вследствие наличия динамических погрешностей. Указаны способы выбора оптимальных параметров динамических систем, при которых динамические погрешности или ошибки интегрирования минимальны. Эти способы уже разработаны для случая, когда входной сигнал и помехи являются случайными процессами и их спектры известны (см. например [1—4]). Однако особенностью большинства измерительных приборов является их универсальность, так что можно считать заданной только наибольшую частоту гармоник, присутствующих в спектре измеряемого процесса, что и учтено в статье.

Вторая рассмотренная в статье особенность вопроса выбора оптимальных динамических систем прибора заключается в том, что здесь существенную роль играют инструментальные динамические погрешности.

Иногда динамическая система измерительного прибора содержит нелинейный элемент. В частности, в дифманометре-расходомере после линейной передаточной системы находится устройство, производящее извлечение квадратного корня из измеренной величины перепада давления. В этом случае динамическая погрешность, а следовательно, и ошибка интегрирования, вызываемая этой погрешностью, обладают свойствами, существенно отличными от погрешности и от ошибки при линейной динамической системе. Изменения, вносимые операцией извлечения корня, также рассматриваются в статье. Аналогичным образом могут быть исследованы ошибки при наличии нелинейного устройства с другой функцией вместо извлечения корня.

Терминология, классификация динамических погрешностей и критерии выбора оптимальных динамических систем приборов

В передаточной системе прибора при измерении изменяющейся во времени величины изменяются параметры, характеризующие ее состояние (например перемещение, угол поворота, сила тока и др.), поэтому она называется динамической системой.

Элемент прибора, воспринимающий измеряемую величину, называется входом системы, а элемент, по состоянию которого судят о значении измеряемой величины, называется выходом системы. Измеряемая величина называется также входным сигналом, а ее значение на выходе, умноженное на передаточный коэффициент K и искаженное динамическими погрешностями, называется выходным сигналом.

Можно представить динамическую систему, в которой измеряемая величина преобразуется точно и без запаздывания, т. е. значение z_t величины, характеризующей состояние выхода системы в момент времени t , прямо пропорционально значению x_t измеряемой величины на входе. Такую систему создать нельзя, но можно осуществить системы, которые с достаточной точностью будут следить за входной величиной без запаздывания. Такие системы будем называть синфазно воспроизводящими. Уравнение синфазно воспроизводящей системы имеет вид:

$$z_{0t} = Kx_t, \quad (1)$$

где K — коэффициент пропорциональности.

Можно представить систему, удовлетворяющую уравнению

$$z_{0(t+\tau)} = Kx_t, \quad (2)$$

в которой измеряемая в момент t величина фиксируется в момент $(t + \tau)$, т. е. имеет место точное измерение с запаздыванием (называемое измерением с чистым запаздыванием). Системы, осуществляющие с достаточной

точностью измерение с чистым запаздыванием, будем называть воспроизводящими. Очевидно, синфазно воспроизводящая система является частным случаем воспроизводящей. Соответственно приборы, содержащие такие динамические системы, называются синфазно воспроизводящими приборами или в случае запаздывания — воспроизводящими приборами. Часто требуется измерить не только изменяющуюся во времени величину, но и интеграл от нее за время T , т. е. величину

$$I = \int_0^T x_t dt. \quad (3)$$

Эти приборы снабжены специальными устройствами, интеграторами, и называются интегрирующими приборами.

Погрешность синфазно воспроизводящей системы

$$\delta_t = z_t - Kx_t \quad (4)$$

или погрешность воспроизводящей системы

$$\delta_t = z_{t+\tau} - Kx_t \quad (5)$$

называется динамической погрешностью.

Ошибка в значении интеграла I , возникающая в результате динамических погрешностей и равная

$$\Delta_x = \int_0^T \delta_t dt, \quad (6)$$

называется динамической ошибкой интегрирования.

Мы будем употреблять термины анализ и синтез динамической системы в обычном смысле, подразумевая под анализом исследование системы с известными параметрами, а под синтезом — оптимальный с какой-либо точки зрения выбор параметров системы.

Термины линейная или нелинейная динамическая система также употребляются в обычном смысле, они соответствуют виду дифференциального уравнения, которым описывается изменение состояния (например, движение) системы.* Линейная динамическая система с сосредоточенными параметрами описывается обыкновенным линейным дифференциальным уравнением, а с распределенными параметрами — линейным уравнением с частными производными.

Динамические погрешности зависят, во-первых, от параметров динамической системы прибора или кратко — от динамических параметров, и, во-вторых, от характера изменения измеряемой величины, поэтому их нельзя просто измерить. В линейных динамических системах движение полностью определяется характером измеряемой величины и передаточной функцией. Таким образом, для отыскания динамической погрешности необходимо измерить передаточную функцию и, кроме того, нужно найти способ расчета погрешности по известной передаточной функции и известным характеристикам измеряемой величины.

* Следует заметить, что прибор с линейной шкалой не всегда имеет линейную динамическую систему, например, он может описываться нелинейным уравнением

$$a\ddot{x}_t + b\dot{x}_t + cx_t = x_t.$$

Передаточной функцией называется величина

$$K(p) = \frac{Z(p)}{X(p)}, \quad (7)$$

где $Z(p)$ — преобразование Лапласа для выходного сигнала;
 $X(p)$ — то же для входного сигнала и

$$p = \gamma + j\omega, \quad (8)$$

причем $j = \sqrt{-1}$ и ω — текущая частота спектра измеряемой величины при разложении ее на оси, параллельной мнимой и находящейся на расстоянии γ от нее.

Напомним, что $A(\omega) = |K(j\omega)|$ есть амплитудная, а $\varphi(\omega) = \arg K(j\omega)$ — фазовая характеристики динамической системы.

Уравнения (1) и (2) соответствуют безынерционной системе и системе с распределенными параметрами. Таким образом, даже при точном изготовлении линейной динамической системы с сосредоточенными параметрами будет возникать погрешность, вызываемая инерционностью системы. Могут быть и другие причины возникновения динамической погрешности, а именно: неточность изготовления и помехи. Итак, динамическая погрешность появляется:

1) из-за искажения входного сигнала динамической системой даже при точном изготовлении ее элементов; эта погрешность называется динамической погрешностью воспроизведения и обозначается через δ_v ;

2) из-за дополнительного искажения входного сигнала при неточном изготовлении элементов динамической системы; эта погрешность называется инструментальной динамической погрешностью и обозначается $\delta_{дн}$ (следует отметить, что она отличается от инструментальной погрешности при статических измерениях, например, если прибор описывается уравнением $az_i'' + bz_i' + cz_i = fx_i$, инструментальная динамическая погрешность вызывается неточностью параметров a и b , а статическая — неточностью параметров c и f);

3) из-за помех; эта погрешность называется погрешностью от помех и обозначается через δ_n .

Соответственно этому различают: $\Delta_{дв}$ — ошибку интегрирования от погрешности воспроизведения, $\Delta_{дн}$ — инструментальную динамическую ошибку интегрирования и $\Delta_{дп}$ — ошибку интегрирования от помех.

К динамической системе прибора предъявляются такие требования: она должна быть устойчива, должна обеспечивать хороший переходный процесс (малый заброс и небольшое время успокоения) и точно воспроизводить подаваемый на ее вход сигнал.

Выбор передаточной функции, удовлетворяющей оптимальным критериям для всех этих условий, очень сложен и практически неосуществим. Поэтому всегда выбирают динамическую систему так, чтобы она удовлетворяла главнейшему требованию — точности прибора. Исходя из него и выбирают передачную функцию, а затем проверяют, насколько полно удовлетворены остальные условия.

Если прибор синфазно воспроизводящий, его идеальная передачная функция

$$K_0 = A = \text{const}, \quad (9)$$

если прибор воспроизводящий и допускает запаздывание, то

$$K_0 = Ae^{-p\tau}, \quad (10)$$

где τ — время запаздывания.

Как уже упоминалось, такие передаточные функции не могут быть осуществлены в динамических системах с сосредоточенными параметрами, однако функцию K можно выбрать так, чтобы она была близка к K_0 . Передаточная функция динамической системы с сосредоточенными параметрами

$$K = \frac{\sum_{i=0}^m A_i p^i}{\sum_{i=0}^n C_i p^i}. \quad (11)$$

Наивысшая степень в знаменателе называется порядком динамической системы.

Чем больше параметров A_i и C_i содержит выражение (11), тем лучше можно приблизить K к K_0 путем варьирования этих параметров. Итак, для уменьшения погрешности воспроизведения нужно увеличить порядок динамической системы. Однако при этом увеличивается число возможных погрешностей изготовления, т. е. инструментальная динамическая погрешность. Поэтому надо уметь выбрать не только параметры A_i и C_i , но и порядок динамической системы. Полностью решить этот вопрос методами синтеза практически невозможно из-за сложностей аналитического характера. Можно, однако, осуществить синтез в предположении точного изготовления, а затем подсчитать инструментальную динамическую погрешность, сравнить ее с погрешностью воспроизведения и при необходимости изменить порядок динамической системы и повторить расчет. В настоящей статье будут даны рекомендации по поводу рационального выбора порядка динамической системы.

Синфазно воспроизводящие и воспроизводящие приборы

По предположению все рассматриваемые приборы описываются обыкновенным линейным дифференциальным уравнением

$$\sum_{i=0}^n C_i z^{(i)} = \sum_{i=0}^m A_i x^{(i)}, \quad (m \leq n), \quad (12)$$

здесь $z^{(i)}$ и $x^{(i)}$ i -ые — производные выходного и входного сигналов.

Применяя к уравнению (12) преобразование Лапласа, получаем решение в виде

$$Z(p) = K(p) X(p), \quad (13)$$

где $K(p)$ — передаточная функция (11).

Без уменьшения общности можно в формулах (9) и (10) положить $A = 1$ (действительно, можно вместо x_i рассматривать пропорциональную ей величину $\frac{1}{A} x_i$).

Вычитая из преобразования Лапласа для выходного сигнала преобразование для входного сигнала, получаем преобразование Лапласа от погрешности воспроизведения и инструментальной динамической погрешности

$$\left. \begin{aligned} \Delta Z(p) &= [K(p) - 1] X(p) \\ \Delta Z(p) &= [K(p) - e^{-p\tau}] X(p) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Обозначим через $\Delta K(p)$ — погрешность передаточной функции. Она равна соответственно

$$\left. \begin{aligned} \Delta K(p) &= K(p) - 1 \\ \Delta K(p) &= K(p) - e^{-p\tau} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, получаем выражение для самой погрешности:

$$\delta_n + \delta_{zn} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} e^{pt} \Delta K(p) X(p) dp. \quad (16)$$

Можно принять для этой величины такую оценку:

$$|\delta_n + \delta_{zn}| \leq \frac{e^{\gamma t}}{2\pi} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} |\Delta K| |X| d\omega, \quad (17)$$

так как модуль интеграла меньше интеграла от модуля.

Отсюда видно, что $|\delta_n + \delta_{zn}|$ уменьшается с уменьшением модуля погрешности передаточной функции.

Чаще всего приходится рассматривать универсальный прибор, который должен измерять функции с различными спектрами, ограниченными только максимальной частотой. В этом случае можно подбирать передаточную функцию, пользуясь интегральным критерием, делая, например, минимальным значение интеграла

$$I_1 = \int_{-\omega_1}^{\omega_1} |\Delta K(p)|^2 d\omega, \quad (18)$$

где ω_1 — наибольшая допустимая частота в спектре измеряемой величины (входного сигнала).

Если спектр входного сигнала известен, то лучше подбирать параметры $K(p)$, делая минимальным

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta K(p) X(p)|^2 d\omega. \quad (19)$$

В частном случае, когда x_t может быть представлен интегралом Фурье, можно, используя равенство Парсеваля, этот интеграл записать в виде

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta K(j\omega) X(j\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} (\delta_n + \delta_{zn})^2 dt. \quad (20)$$

Таким образом, известный и широко применяемый критерий минимума средней квадратической погрешности [1] идентичен среднему квадратическому приближению к нулю $|\Delta K X|$ на мнимой оси. Учтем помехи и воспользуемся принципом суперпозиции, тогда преобразование Лапласа от полной динамической погрешности будет

$$\Delta Z(p) = \Delta K(p) X(p) + \sum_{i=1}^r \Phi_i(p) W_i(p), \quad (21)$$

где

$$\Phi_i(p) = \frac{\sum_{k=0}^{n_i} B_{ki} p^k}{\sum_{k=0}^{n_i} C_{ki} p^k} \quad (22)$$

передаточная функция той части динамической системы прибора, через которую пропускается i -ая помеха; $W_i(p)$ — преобразование Лапласа от помехи $w_i(t)$.

Очевидно, в этом случае следует приближать к нулю

$$\left| \Delta KX + \sum_{i=1}^r \Phi_i W_i \right|. \quad (23)$$

Среднее квадратическое приближение этого выражения к нулю на мнимой оси соответствует минимуму средней квадратической погрешности.

Если входы помех не совпадают со входом измеряемой величины, нужно, чтобы $|\Phi_i|$ были близки к нулю, во всяком случае, в той полосе частот, в которой модуль изображения помехи $|W_i|$ имеет существенное значение. Часть цепи динамической системы, через которую проходит помеха, всегда совпадает с частью цепи для измеряемой величины, поэтому затруднено изменение передаточной функции $|\Phi_i|$ для приближения ее к нулю. Кроме того, требование малости $|\Phi_i|$ должно быть увязано с требованиями к устойчивости и качеству переходного процесса. Поэтому задача синтеза динамической системы, на которую действует несколько помех, столь сложна, что его производить нецелесообразно. В этом случае можно рекомендовать подбирать передаточные функции Φ_i так, чтобы в зоне частот помех их модуль был по возможности меньше, а K выбирается так же, как при наиболее часто встречающемся случае, когда действует одна помеха, имеющая тот же вход, что и измеряемая величина.

В этом случае следует найти минимум выражения

$$|\Delta KX + KW|. \quad (23a)$$

При сравнительно большой мощности спектра помех и совпадении частот спектра помех и входного сигнала, даже при передаточной функции, обеспечивающей минимум выражения (23a), погрешности измерения будут велики. Условие достаточно точной работы прибора заключается в наличии интервала между частотами спектра помех и входного сигнала.

В этом случае идеальной передаточной функцией для воспроизводящего прибора будет:

$$K_0 = \begin{cases} e^{-p\tau} & \text{— в области частот входного сигнала,} \\ 0 & \text{— в области частот помех;} \end{cases} \quad (24)$$

для синфазно воспроизводящего прибора:

$$K_0 = \begin{cases} 1 & \text{— в области частот входного сигнала,} \\ 0 & \text{— в области частот помех.} \end{cases} \quad (25)$$

Передаточная функция K задана по всей комплексной плоскости, однако приближать ее к K_0 во всей плоскости нет смысла, так как приближение будет менее близким, чем в ограниченной области. Область приближения выбирается так, чтобы для любой измеряемой функции

основная часть спектра $X(p)$ лежала на части контура L разложения, находящейся внутри выбранной области (см. рисунок)

$$x_t = \frac{1}{2\pi j} \int_L X(p) e^{pt} dp.$$

Например, если надо отыскать передаточную функцию для измерения величины, растущей со скоростью, меньшей чем $e^{\nu t}$ и имеющей спектр с частотами $|\omega| < \omega_0$, надо приближать ΔK к нулю в прямоугольнике $ABCD$. Обычно ΔK является аналитической функцией внутри прямоугольника $ABCD$, поэтому ее модуль принимает наибольшее значение на контуре и есть основание искать минимум интеграла

$$\int_S |\Delta K|^2 d\omega,$$

взятого вдоль контура S .

Таковы общие принципы отыскания передаточной функции прибора. Конкретные примеры приведены у А. С. Немировского [5].

В случае, когда входной сигнал можно рассматривать как реализацию стационарного случайного процесса, динамическая погрешность определяется по формуле

$$\delta_x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \Delta K(j\omega) dX(\omega) + \sum_{i=1}^r \int e^{i\omega t} \Phi_i(j\omega) dW_i(\omega), \quad (26)$$

где $X(\omega)$ — случайный спектр процесса x_t (он представляет собой процесс с некоррелированными приращениями);

W_i — случайный спектр помехи $w_i(t)$.

Если кроме входного сигнала имеется одна помеха с тем же входом, а помеха и входной сигнал являются независимыми стационарными случайными процессами, то легко показать [5], что дисперсия динамической погрешности

$$D\delta_x = \int_{-\omega_1}^{\omega_1} |\Delta K(j\omega)|^2 dF_x(\omega) + 2 \int_{\omega_2}^{\infty} |K(j\omega)|^2 dF_w(\omega), \quad (27)$$

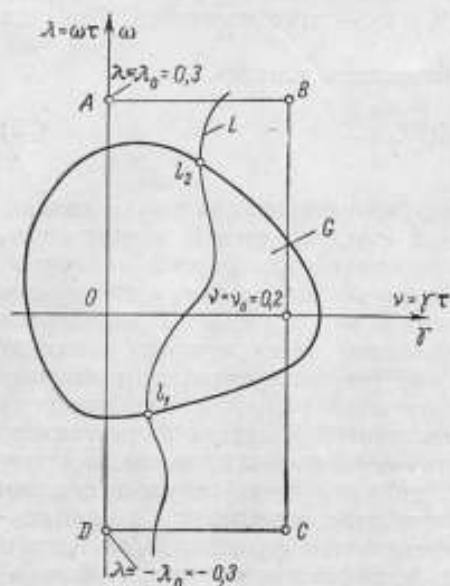
здесь ω_1 — наименьшая частота спектра помехи; $F_x(\omega)$ и $F_w(\omega)$ — спектральные функции, связанные с корреляционными функциями преобразованием Фурье

$$R_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dF(\omega).$$

Можно пользоваться следующей формулой для оценки дисперсии:

$$D\delta_x \leq Dx_t \max_{|\omega| < \omega_1} |\Delta K|^2 + Dw_t \max_{|\omega| > \omega_2} |K|^2, \quad (28)$$

где Dx_t и Dw_t — дисперсии измеряемой величины и помех.



Формулой (28) можно пользоваться и для оценки погрешности и для отыскания такой передаточной функции, погрешность которой будет минимальной. Последняя задача сводится к получению минимума выражения

$$Dx_t \max_{|\omega| < \omega_1} |\Delta K|^2 + D\omega_t \max_{|\omega| > \omega_2} |K|^2$$

путем подбора оптимальных параметров передаточной функции. Примеры решения этой задачи можно также найти у А. С. Немировского [5].

Символ ΔK применялся для обозначения погрешности передаточной функции. Она складывается из двух частей — погрешностей воспроизведения и инструментальной динамической.

$$\Delta K = \Delta K_n + \Delta K_n(v_1, v_2, \dots, v_n). \quad (29)$$

Вторая из них зависит от случайных погрешностей v_i параметров звеньев динамической системы и может быть приближенно представлена как линейная функция от них:

$$\Delta K = \Delta K_n + \sum_{i=1}^n A_i v_i, \quad (30)$$

где A_i — линейные операторы.

Пользуясь формулой (30), получаем

$$|\Delta K|^2 = |\Delta K_n|^2 + \left| \sum_{i=1}^n A_i v_i \right|^2 + 2 \operatorname{Re} \left\{ \Delta \bar{K}_n \sum_{i=1}^n A_i v_i \right\}.$$

Величины v_i независимы друг от друга и обычно имеют равное нулю математическое ожидание, поэтому

$$M |\Delta K|^2 = |\Delta K_n|^2 + \sum_{i=1}^n |A_i|^2 M v_i^2, \quad (31)$$

отсюда и из формулы (26) при условии независимости помех между собой и от входного сигнала следует, что

$$D\delta_x = \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta K_n|^2 dF_x + \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^n |A_i|^2 M v_i^2 dF_x + \sum_{i=1}^r \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_i|^2 dF\omega_i. \quad (32)$$

Эта формула позволяет подсчитать дисперсию методической погрешности.

Если ΔK и измеряемая величина известны полностью (а не только их вероятностные характеристики), динамическую погрешность можно оценить по формуле

$$\delta_x \approx \delta_{dx} = \sum_{s=0}^k C_s \frac{d^s x}{dt^s}, \quad (33)$$

где C_s — коэффициент разложения ΔK в ряд относительно p

$$\Delta K = \sum_{s=0}^{\infty} C_s p^s. \quad (34)$$

Если прибор предназначен в основном для статических измерений, следует стремиться к тому, чтобы $C_0 = 0$. В этом случае при синтезе динамической системы нельзя варьировать параметр, определяющий свободный член разложения передаточной функции в ряд Маклорена.

Таким образом, выше изложен метод отыскания оптимальных параметров динамических систем воспроизводящих приборов и даны формулы для оценки динамических погрешностей воспроизведения, инструментальной динамической и от помех. Пользуясь этими формулами и сравнивая инструментальную динамическую погрешность с погрешностью воспроизведения, можно всегда выбрать наиболее выгодный порядок динамической системы.

Интегрирующие приборы

Динамические ошибки интегрирования, так же как динамические погрешности, возникают от искажения входного сигнала точно изготовленной динамической системой, от неточного изготовления параметров динамической системы (инструментальные динамические погрешности и ошибки) и от помех.

Рациональным выбором передаточной функции можно значительно уменьшить ошибку интегрирования от динамических погрешностей прибора. Однако при выборе передаточной функции надо учитывать, что интегрирующий прибор иногда является одновременно воспроизводящим и необходимо обеспечить не только достаточно точное интегрирование, но и точное измерение.

Измеряемая в течение длительного времени величина меняет знак скорости — она то нарастает, то уменьшается. В соответствии с этим динамическая погрешность меняет с течением времени знак и происходит частичная компенсация интеграла от погрешности. Это надо иметь в виду и в первую очередь стремиться к уменьшению погрешности, а затем к уменьшению ошибки интегрирования.

Оптимальную передаточную функцию интегрирующих приборов можно выбрать, делая минимальной динамическую ошибку. Интегрируя выражение (26) для δ_x по t в пределах от 0 до T , получим выражение для динамической ошибки интегрирования за время T

$$\Delta_x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega T} - 1}{j\omega} \Delta K(j\omega) dX(\omega) + \sum_{i=1}^r \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega T} - 1}{j\omega} \Phi_i(j\omega) dW(\omega). \quad (35)$$

При независимости помех друг от друга и от измеряемой величины легко записать вероятностные характеристики ошибки интегрирования:

$$M\Delta_x = T\Delta K(0) Mx(t) + T \sum_{i=1}^r \Phi_i(0) MW_i;$$

$$D\Delta_x = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{1}{2}\omega T}{\frac{1}{2}\omega} \right)^2 M|\Delta K|^2 dF_x(\omega) + \sum_{i=1}^r \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{1}{2}\omega T}{\frac{1}{2}\omega} \right)^2 |\Phi_i|^2 dF_{\omega}(\omega). \quad (36)$$

Таким образом, математическое ожидание ошибки интегрирования входного сигнала, являющегося стационарным процессом, зависит только от ошибки передаточного отношения. Эта часть ошибки интегрирования накапливается пропорционально времени, т. е. не компенсируется, и по возможности должна быть исключена. Поэтому при синтезе интегрирующих приборов варьировать пара-

метры, определяющие передаточное отношение, нельзя, т. е. следует стремиться, чтобы $C_0 = 0$, [формула (33)].

Кроме того, следует уменьшать $D\Delta_n$. Эта величина зависит от

$$\theta = \left(\frac{\sin \frac{1}{2}\omega T}{\frac{1}{2}\omega T} \right)^2.$$

При $\omega_1 = 0$ имеем $\theta = 1$, при $\frac{\omega_2 T}{2} = \frac{5\pi}{4}$ $\theta = 0,064$. Отсюда видно, что θ уже при очень малых частотах (например, при $T = 8$ ч и $\omega_2 = 0,27 \cdot 10^{-3}$ сек $^{-1}$) становится малой величиной. Это показывает, что для интегрирующих приборов особенно хорошей является динамическая система, в которой $|\Delta K|$ близко к нулю в окрестности $p = \gamma + j\omega = 0$.

Известно [6], что хорошими для применения в приборах являются динамические системы с передаточной функцией, знаменатель которой равен сумме первых $(n+1)$ членов разложения $e^{p\tau}$ в ряд Маклорена,

$$K(p) = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\tau^k}{k!} p^k}. \quad (37)$$

Так как они приближены разложением $e^{-p\tau}$ в нуле, они особенно хороши для интегрирующих приборов.

При $n \leq 4$ системы с передаточной функцией (37) устойчивы, причем запас устойчивости уменьшается с увеличением n . Кроме того, чем меньше n , тем лучше качество переходного процесса.

Удобным параметром для оценки погрешностей воспроизведения является модуль погрешности передаточной функции, заданной на мнимой оси. Можно показать, что для формулы (37)

$$|\Delta K_n(j\omega)| < \frac{|\omega\tau|^{n+1}}{(n+1)!} e^{\omega\tau}. \quad (38)$$

Формула (37) вследствие неточностей изготовления приобретает вид

$$K(p) = \frac{1}{\sum_{k=0}^n (1 + \alpha_k) \frac{p^k \tau^k}{k!}},$$

отсюда и из формулы (37) можно найти, что

$$|\Delta K| < |\Delta K_n| + \left| \sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{p^k \tau^k}{k!} \right|. \quad (39)$$

Например, для системы второго порядка ($n=2$) α_k независимы друг от друга и для подсчета $M|\Delta K|^2$ можно пользоваться формулой (31), принимая $\alpha_k = \nu_k$ и $A_k = \frac{(j\omega\tau)^k}{k!}$. Для $n > 2$ α_k можно выразить в виде линейных функций независимых параметров ν_r . Во ВНИИ Комитета стандартов, мер и измерительных приборов был произведен расчет инструментальной динамической погрешности и погрешности воспроизведения для систем второго и третьего порядков, описываемых формулой (37). При этом принималось, что $M\nu_k = 0$ и $M\nu_k^2 = 10^{-4}$. Результат расчета приводится в табл. 1.

Таблица 1

$\omega\tau$	Для системы второго порядка		Для системы третьего порядка	
	$ \Delta K_n <$	$\sqrt{M \Delta K_n ^2}$	$ \Delta K_n <$	$\sqrt{M \Delta K_n ^2}$
0,05	$22 \cdot 10^{-6}$	$500 \cdot 10^{-6}$	$0,28 \cdot 10^{-6}$	$365 \cdot 10^{-6}$
0,3	$6,1 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$0,11 \cdot 10^{-3}$	$2,2 \cdot 10^{-3}$
0,5	$35 \cdot 10^{-3}$	$5,2 \cdot 10^{-3}$	$4,3 \cdot 10^{-3}$	$3,62 \cdot 10^{-3}$

При сравнении данных табл. 1 видно, что для системы третьего порядка ΔK_n имеет примерно тот же порядок, что ΔK_n , причем ΔK_n с увеличением порядка системы значительно уменьшается.

Из табл. 1 и формул (31) и (36) непосредственно следуют такие выводы: с точки зрения ошибки интегрирования существенное значение имеет инструментальная динамическая погрешность, так как на малых частотах она намного превышает ΔK_n . С точки зрения полной динамической погрешности прибора важна и погрешность воспроизведения. Для системы третьего порядка погрешность воспроизведения при $\omega\tau < 0,3$ значительно меньше инструментальной динамической погрешности, а последняя с увеличением порядка системы не уменьшается, во всяком случае, существенно не уменьшается. Поэтому увеличивать порядок системы сверх второго или третьего с точки зрения динамических погрешностей и ошибок интегрирования нецелесообразно.

В динамических системах приборов часто содержатся обратные или другие дополнительные связи, в результате чего передаточная функция содержит полином в числителе и в знаменателе. В этом случае передаточные функции также следует приближать к единице или к $e^{-p\tau}$, соблюдая особенную близость в нуле. Это можно сделать, например, выбирая

$$K(p) \cong e^{p\tau_1} e^{-p\tau_2},$$

т. е.

$$K(p) = \frac{\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} (p\tau_1)^k}{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (p\tau_2)^k} \quad (n \geq m) \quad (40)$$

При $n > 4$ система неустойчива. Чтобы сделать ее устойчивой, изменим передаточную функцию (40)

$$K(p) = \frac{\sum_{k=0}^m \beta_k \frac{1}{k!} (p\tau_1)^k}{\sum_{k=0}^n \gamma_k \frac{1}{k!} (p\tau_2)^k} \quad (n \geq m) \quad (41)$$

У этой новой передаточной функции γ_k и β_k не равны единице только при $K > 3 + 4$, остальные равны единице и поэтому погрешность воспроизведения мала.

Можно построить передаточную функцию на основе формулы Раде [7]

$$e^x = \lim_{\mu+\nu \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{\nu} \frac{\nu! (\mu + \nu - k)!}{k! (\nu - k)! (\mu + \nu)!} x^k}{\sum_{k=0}^{\mu} \frac{\mu! (\mu + \nu - k)!}{(\mu - k)! (\mu + \nu)! k!} (-x)^k}$$

если взять μ и ν конечными. Система с такой передаточной функцией при условии $\mu = \nu$ дает значительно меньшую по сравнению с другими упомянутыми передаточными функциями погрешность воспроизведения и очень хорошее приближение K к $K_0 e^{-p\tau}$ ($-p\tau = x$) в окрестности нуля. Однако при этом получаются одинаковые степени полиномов в числителе и знаменателе передаточной функции.

Системы с передаточными функциями, имеющими одинаковые степени полиномов числителя и знаменателя, не могут быть осуществлены малым числом звеньев, имеют большую инструментальную динамическую погрешность и малорациональны.

Высокой динамической точностью обладают системы, передаточная функция которых близка к единице, т. е. системы, близкие к синфазно воспроизводящим.

Передаточные функции таких систем следует подбирать, исходя из формул

$$K = \frac{\sum_{l=0}^m a_{m-l} p^l}{\sum_{l=m+1}^n b_{n-l} p^l + \sum_{l=0}^m a_{m-l} p^l} \approx 1 \quad (42)$$

(в окрестности точки $p = 0$ погрешность имеет порядок p^{m+1}) или

$$K = \frac{\sum_{l=m+1}^s b_{s-l} p^l + \sum_{l=1}^m a_{m-l} p^l}{\sum_{l=m+1}^n c_{n-l} p^l + \alpha \sum_{l=1}^m a_{m-l} p^l} \approx \frac{1}{\alpha} \quad (s < n). \quad (43)$$

Мы проанализировали одну из таких передаточных функций

$$K = \frac{a_0 p^2 + a_1 p + 1}{b_0 p^2 + a_0 p^2 + a_1 p + 1}. \quad (44)$$

Анализ показал, что если погрешности изготовления параметров отдельных звеньев системы имеют $\sigma_v = 1\%$, то погрешность воспроизведения и инструментальная динамическая погрешность имеют один и тот же порядок малости: в системе четвертого порядка увеличивается $\delta_{дин}$, в системе второго порядка увеличивается δ_n , и, таким образом, система третьего порядка имеет меньшую динамическую погрешность, чем другие.

Влияние извлечения квадратного корня из перепада давления на динамическую погрешность

Как уже упоминалось, нелинейности прибора вызывают дополнительные погрешности или ошибки интегрирования. В этом разделе рассмотрен частный случай, имеющий место в широко распространенной группе при-

боров — в дифманометрах-расходомерах с интеграторами. В этих приборах выходной сигнал вследствие искажений отличается от входного на значение динамической погрешности, затем из него извлекается квадратный корень и полученная в результате величина интегрируется.

Ниже дан метод оценки и приведения к минимуму динамической погрешности такой системы. При этом помехи не учитываются, так как при обычных условиях работы дифманометров они незначительны.

Пусть перепад давления в момент t есть x_t . Расход при этом равен

$$y_t = \sqrt{x_t}. \quad (45)$$

Как известно, перепад давления и расход связаны формулой

$$x_t = ky_t^2,$$

где k — постоянная.

Однако единицы расхода и давления всегда можно выбрать так, чтобы $k = 1$. В дальнейшем мы будем всегда в качестве единицы измерения выбирать максимальное значение шкалы.

Если погрешность измерения перепада давления есть δ_{dt} , то погрешность измерения расхода

$$\tilde{\delta}_{dt} = \sqrt{x_t + \delta_{dt}^2} - \sqrt{x_t}. \quad (46)$$

Будем рассматривать случай, когда передаточное отношение динамической системы равно единице. Будем также считать, что динамическая система дифманометров, если исключить устройство для извлечения квадратного корня, линейна [8].

Отыщем математическое ожидание и корреляционную функцию погрешности измерения расхода, т. е.

$$M\tilde{\delta}_{dt} \text{ и } R_t = \text{cov}(\tilde{\delta}_{dt}, \tilde{\delta}_{dt}).$$

Примем, что процесс x_t , а следовательно, и двумерный процесс (x_t, δ_t) — гауссовский.

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} Mx_t &= m; & Dx_t &= s^2; & D\delta_{dt} &= \sigma^2; \\ z_t &= \frac{x_t - m_t}{s}; & \beta_t &= \frac{\delta_{dt}}{\sigma}; \\ M\delta_{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Как уже говорилось, $M\delta_t = 0$.

Точно вычислить $M\tilde{\delta}_{dt}$ и $D\tilde{\delta}_{dt}$ сложно. Однако можно предложить такое приближение: заменим $\tilde{\delta}_{dt}$ на функцию

$$y_t = f(x_t + \delta_{dt}) - f(x_t),$$

где $f(x)$ — многочлен второго порядка, который близок к функции \sqrt{x} на отрезке $(0,2; 1)$.

Приближение на таком отрезке обосновывается тем, что интеграторы, работающие с дифманометрами, рассчитаны обычно на перепады давления не меньше чем 17% от максимума шкалы перепада давления (т. е. на расходы $\geq 30\%$ от максимального), так как погрешности измерения сильно увеличиваются в нижней части шкалы вследствие извлечения корня. Поэтому дифманометры следует применять для измерения расходов, значения которых редко соответствуют нижней части шкалы. Будем

считать, что процесс x_t редко принимает значения, меньшие чем 20% от максимума шкалы.

Отыщем многочлен $f(x)$, близкий к \sqrt{x} на отрезке (0,2; 1). При этом, так как

$$\bar{\delta}_m = \sqrt{x_t + \delta_m} - \sqrt{x_t} = \frac{\delta_m}{2\sqrt{x^*}},$$

$$Y_t = f(x_t + \delta_m) - f(x_t) = f'(x^{**}) \delta_m,$$

где $x^*, x^{**} \in [x_t, x_t + \delta_m]$, то естественно выбрать в качестве $f(x)$ многочлен, для которого величина $\max_{0,2 < x < 1} \left| f'(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right|$ принимает наименьшее значение.

Линейная функция $f'(x)$, удовлетворяющая такому условию, может быть определена, например, так: найдем наибольшее отклонение h кривой $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ на отрезке (0,2; 1) от ее хорды $y = 1,34 - 0,84x$ и положим

$$f'(x) = 1,34 + \frac{h}{2} - 0,84x.$$

Находя h , получаем $f'(x) = 1,23 - 0,84x$.

Заменяя $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ линейной функцией $f'(x)$, мы допускаем относительную ошибку, меньшую 22%. При этом, пользуясь обозначениями (47), имеем

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_m &\cong Y_t = 1,23(x_t + \delta_t) - 0,42(x_t + \delta_t)^2 - 1,23x_t + 0,42x_t^2 = \\ &= (1,23 - 0,84m) \sigma \beta_t - 0,84s\sigma z_t \beta_t - 0,42\sigma^2 \beta_t^2. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$M Y_t = -0,42(\sigma^2 + 2s\sigma r_{12}(0)). \quad (48)$$

Здесь $r_{12} = \frac{M x_0 \delta_t}{\sigma s} = M z_0 \beta_t$ — нормированная корреляционная функция между измеряемой величиной x_t и динамической погрешностью расхода δ_t , причем

$$\left. \begin{aligned} M x_0 \delta_t &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \Delta K(j\omega) dF_x(\omega) \\ \sigma^2 = D \delta_m &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta K(j\omega)|^2 dF_x(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Перейдем к подсчету корреляционной функции процесса Y_t и, следовательно, погрешности $\bar{\delta}_m$.

Заметим, что нечетные моменты гауссовской многомерной величины с нулевым математическим ожиданием равны нулю. Отсюда следует, что корреляционная функция процесса Y_t складывается из корреляционной функции $q_1(t)$ процесса $(1,23 - 0,84m) \delta_t$ и корреляционной функции $q_2(t)$ процесса $-0,42(2s\sigma z_t \beta_t - \sigma^2 \beta_t^2)$.

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} M z_0 z_t &= r_{11}(t); & M z_0 \beta_t &= r_{12}(t); \\ M z_t \beta_0 &= r_{21}(t) = r_{12}(t); & M \beta_0 \beta_t &= r_{22}(t) \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

*) Так как z_0 и β_t есть нормированные значения случайных величин x_t и δ_m , то r_{12} соответствует принятому в формуле (48) обозначению.

Тогда

$$q_1(t) = (1,23 - 0,84m)^2 \sigma^2 r_{22}(t) \quad (51)$$

и

$$q_2(t) = 0,42^2 [4s^2 \sigma^2 (Mz_0 \beta_0 z_t \beta_t - r_{12}^2(0)) - 2s\sigma^3 (Mz_0 \beta_0 \beta_t^2 - r_{12}(0)) - 2s\sigma^3 (M\beta_0^2 z_t \beta_t - r_{12}(0)) + \sigma^4 (M\beta_0^2 \beta_t^2 - 1)].$$

Чтобы подсчитать это выражение, воспользуемся формулами для моментов нормально распределенного вектора, в данном случае вектора $(z_0 \beta_0, z_t \beta_t)$:

$$Mz_0 \beta_0 z_t \beta_t = r_{12}^2(0) + r_{12}(t) r_{21}(t) + r_{11}(t) r_{22}(t),$$

$$Mz_0 \beta_0 \beta_t^2 = r_{12}(0) + 2r_{12}(t) r_{11}(t),$$

$$Mz_t \beta_t \beta_0^2 = r_{12}(0) + 2r_{21}(t) r_{11}(t),$$

$$M\beta_0^2 \beta_t^2 = 1 + 2r_{22}^2(t),$$

смотри, например [9]. Получаем

$$q_2(t) = 2 \cdot 0,42^2 \sigma^2 [2s^2 (r_{12}(t) r_{21}(t) + r_{11}(t) r_{22}(t)) - s\sigma r_{11}(t) (r_{12}(t) + r_{21}(t)) + \sigma^2 r_{22}^2(t)]. \quad (52)$$

Итак, корреляционная функция динамической погрешности расхода $\tilde{\delta}_t$ может быть рассчитана по формуле

$$R_t = q_1(t) + q_2(t), \quad (53)$$

так как $\tilde{\delta}_t \cong \gamma_t$.

Можно показать, что $q_1(0)$ намного больше $q_2(0)$. Действительно,

$$q_2(0) = 0,34\sigma^2 [2s^2 (1 + r_{12}^2(0)) - 2s\sigma r_{12}(0) + \sigma^2].$$

Если учесть, что $\sigma^2 \ll s^2$ и $|r_{12}(0)| < 1$, то получим

$$q_2(0) < 2,4s^2\sigma^2$$

и

$$\frac{q_2(0)}{q_1(0)} < \frac{2,4s^2}{(1,23 - 0,84m)^2}.$$

Принимая $m + 2s < 1$ и $s < 0,2$, легко доказать, что

$$\frac{q_2(0)}{q_1(0)} < \frac{2,4s^2}{[1,23 - 0,84(1 - 2s)]^2} \Big|_{s=0,2} < \frac{2,4 \cdot 0,04}{0,73^2} = 0,17,$$

отсюда, в частности, следует, что дисперсия $\tilde{\delta}_t$ приблизительно равна $q_1(0)$, т. е.

$$D\tilde{\delta}_t \cong (1,23 - 0,84m)^2 D\delta_{st},$$

причем ошибка не превышает 17%. Так как, кроме того, $m \geq 0,3$ (как уже отмечалось, для меньших расходов дифманометры не применяют), то дисперсия по расходу меньше дисперсии по перепаду. Действительно,

$$\max_{1 > m \geq 0,3} |1,23 - 0,84m|^2 = 0,96.$$

Из оценки $q_2(0) < 0,17q_1(0)$ можно сделать еще один важный вывод. Нет оснований ожидать, что корреляционные функции $r_{11}(t)$ и $r_{21}(t)$ затухают существенно медленнее, чем $r_{22}(t)$, поэтому в большинстве практически важных случаев отношение

$$\frac{\int_0^{\infty} q_2(t) dt}{\int_0^{\infty} q_1(t) dt} < \frac{q_2(0)}{q_1(0)} < 0,17$$

и, таким образом, можно с достаточной точностью интеграл $\int_0^{\infty} R_t dt$ заменять интегралом $\int_0^{\infty} q_1(t) dt$. Такая замена вскоре понадобится.

Найдем теперь математическое ожидание и дисперсию ошибки интегрирования $\bar{\Delta}$ от динамической погрешности $\bar{\delta}_{xt}$:

$$\bar{\Delta} = \int_0^T \bar{\delta}_{xt} dt; \quad M\bar{\Delta} = TM\bar{\delta}_{xt};$$

$$D\bar{\Delta} = M \left[\int_0^T (\bar{\delta}_{xt} - M\bar{\delta}_{xt}) dt \right]^2 = \int_0^T dt \int_0^T R_{s-t} ds.$$

Обозначим τ_1 — время, начиная с которого корреляция динамической погрешности расхода R_t становится пренебрежимо малой. Тогда

$$\int_0^T R_{s-t} ds = \int_{-\min(t, \tau_1)}^{\min(T-t, \tau_1)} R_s ds.$$

Обычно время интегрирования T во много раз превосходит время τ_1 . Поэтому

$$D\bar{\Delta} \cong \int_0^T dt \int_{-\tau_1}^{\tau_1} R_s ds \cong 2T \int_0^{\infty} R_s ds.$$

Но интеграл $\int_0^{\infty} R_s ds$ можно заменить интегралом $\int_0^{\infty} q_1(t) dt$, вследствие чего

$$D\bar{\Delta} \cong 2T (1,23 - 0,84m)^2 \sigma^2 \int_0^{\infty} r_{22}(t) dt = (1,23 - 0,84m)^2 D\Delta, \quad (54)$$

где $D\Delta$ — дисперсия ошибки интегрирования от динамической погрешности по перепаду. Напомним, что ее можно подсчитать по формуле (36).

В табл. 2 приведены результаты расчета дисперсии динамической ошибки интегрирования по перепаду. Передаточную функцию дифманометра-расходомера мы принимаем равной

$$K(j\omega) = \frac{1}{-T_m^2 \omega^2 + T_z j\omega + 1} \quad (55)$$

при различных парах значений: T_m и T_z (данные взяты из статьи П. П. Кремлевского [8] и из результатов экспериментального снятия характеристик дифманометра ДП-430 во ВНИИК).

Измеряемую величину мы предполагаем стационарным процессом со спектральной плотностью, постоянной на отрезке частот $[-\omega_1, \omega_1]$

Таблица 2

Тип дифрактометра	Диаметр нижней трубки, мм	Максимальная нагрузка, кг пр. ст.	Параметры передаточной функции, сек		Значение коэффициента L (формула (56))				Значение предельной приведенной ошибки интегрирования при равномерном спектре			
			T_m	T_z	$T = 10 \text{ мин}$		$T = 1 \text{ ч}$		$T = 8 \text{ ч}$		$\omega_1 = \pi \text{ рад/сек}$	$\omega_2 = \frac{\pi}{15} \text{ рад/сек}$
					$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{12}}$	$\delta = 0,2$	$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{12}}$	$\delta = 0,2$	$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{12}}$	$\delta = 0,2$		
Полларковые:												
ДП-430	6	100	5,3	10,7	0,011	0,0075	$1,83 \cdot 10^{-3}$	$1,25 \cdot 10^{-3}$	$2,31 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	1,71L	
ДП-410	6	63	3,2	11,5	0,011	0,0075	$1,83 \cdot 10^{-3}$	$1,25 \cdot 10^{-3}$	$2,31 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	1,52L	
ДП-610	9	10 000	0,7	2,0	$1,93 \cdot 10^{-3}$	$1,36 \cdot 10^{-3}$	$3,22 \cdot 10^{-4}$	$2,25 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$2,8 \cdot 10^{-5}$	1,92L	
Мембранный ДМ-1	—	250	0,03	0,1	$9,6 \cdot 10^{-5}$	$6,7 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$	$1,11 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$1,4 \cdot 10^{-5}$	2,12L	

и равной нулю вне этого отрезка; ω_1 принимается равной $\frac{2\pi}{30 \text{ сек}}$ или $\frac{2\pi}{2 \text{ сек}}$ (предельные частоты соответствуют периодам 30 сек и 2 сек). Время интегрирования принимается равным $T = 10 \text{ мин}$, 1 ч и 8 ч. Для нашей передаточной функции K и равномерного спектра, пользуясь формулой (36), получаем, что дисперсия приведенной (т. е. отнесенной к наибольшему значению $x_{\text{max}} T$ интеграла) ошибки равна

$$\frac{D\Delta_2}{T^2} = L^2 \frac{1}{\omega_1} \int_0^{\omega_1} f(\omega) \sin^2 \frac{\omega T}{2} d\omega, \quad (56)$$

где

$$L = \frac{2Tz^5}{T};$$

$$f(\omega) = \left| \frac{1 - j \frac{T_m^2}{T_z} \omega}{1 + jT_z \omega - T_m^2 \omega^2} \right|^2 = \frac{1 + \frac{T_m^4}{T_z^2} \omega^2}{1 + (T_z^2 - 2T_m^2) \omega^2 + T_m^4 \omega^4}.$$

В силу того, что функция $f(\omega)$ меняется с изменением ω гораздо медленнее, чем $\sin^2 \frac{\omega T}{2}$, можно интеграл в формуле (56) заменить интегралом

$$\frac{1}{2} \int_0^{\omega_1} f(\omega) d\omega. \quad (57)$$

Интеграл в формуле (57) легко подсчитать приближенно, разбивая отрезок интегрирования на два или три отрезка так, чтобы на каждом интервале можно было пренебречь каким-нибудь членом в числителе и знаменателе функции $f(\omega)$. В табл. 2 приведены результаты расчета значений вели-

чины L , которые превышают максимум среднего квадратического отклонения приведенной ошибки по всем возможным спектрам измеряемой величины* при дисперсиях

$$s^2 = \frac{1}{12} \quad \text{и} \quad s^2 = 0,04,$$

где $s^2 = \frac{1}{12}$ соответствует равномерному распределению измеряемой величины по всей шкале прибора;

$s^2 = 0,04$ — нормальному распределению со средним 0,5, для которого с вероятностью 0,997 значение измеряемой величины не выходит за пределы шкалы прибора. Кроме того, в таблице даны значения предельной ошибки $\frac{3\sqrt{D\Delta_x}}{T}$ для равномерного спектра на отрезке частот $[0, \omega_1]$.

Вернемся к формуле (54), из нее следует, что $D\tilde{\Delta} < D\Delta$, так как $m \geq 0,3$. Поэтому мы можем, пользуясь полученными результатами, оценить сверху $D\tilde{\Delta}$ и сделать такие выводы.

Большие дисперсии ошибок интегрирования, как и следовало ожидать, присущи тем дифманометрам, постоянные времени которых больше. Для наиболее инерционного поплавкового дифманометра в случае сосредоточения спектра измеряемой величины вблизи нуля при равномерном распределении измеряемой величины по всей шкале прибора (т. е. в одном из худших случаев) и при $T = 14$ предельная приведенная ошибка интегрирования

$$\frac{3\sqrt{D\Delta_x}}{T} = 3 \cdot 1,25 \cdot 10^{-3} = 0,38\%.$$

Заметим, что инерционность дифманометра увеличивается в основном с уменьшением максимального значения перепада давления, которое может быть измерено этим прибором, и диаметра нижней соединительной трубки поплавковых дифманометров [8]. Поэтому в табл. 2 приводятся эти параметры наряду с параметрами передаточной функции T_z и T_m .

В табл. 3 даны значения математического ожидания приведенной ошибки интегрирования $\frac{1}{T} M\tilde{\Delta}_x = M\tilde{\delta}_{дл}$.

Таблица 3

Характеристика дифманометра	$\omega_1 = \frac{\pi}{15}$ рад/сек	$\omega_1 = \pi$ рад/сек
$T_m = 3,2$ сек, $T_z = 11,5$ сек	0,176s ²	0,48s ²
$T_m = 0,7$ сек, $T_z = 2$ сек	0,021s ²	0,31s ²
Примечание. s ² — дисперсия измеряемой величины.		

* Действительно,

$$\frac{D\Delta_x}{T^2} = \frac{L^2}{s^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \sin^2 \frac{\omega T}{2} dF(\omega) \leq L^2 \max_{\omega} f(\omega),$$

где $F(\omega)$ — спектральная функция измеряемой величины.

При принятых значениях параметров T_m и T_z всегда

$$\max_{\omega} f(\omega) = f(0) = 1.$$

Табл. 3 рассчитана по формуле (48), причем значения $\sigma r_{12}(0) = Mx_t \delta_{xt}$ подсчитывались по формуле (49) для равномерного спектра, т. е. по формуле

$$Mx_t \delta_{xt} = \frac{1}{\omega_1} \int_0^{\omega_1} \Delta K(j\omega) d\omega.$$

Эта таблица показывает, что при наличии высоких частот в спектре измеряемой величины математические ожидания могут стать недопустимо велики (например, при $s = 0,2$, $\omega_1 = \pi$ рад/сек, $M\bar{\delta}_x = 2\%$).

Почти все вопросы этого параграфа решены. Найдены формулы математического ожидания и дисперсии ошибки интегрирования динамической погрешности по расходу. Остается вопрос — как выбрать передаточную функцию, чтобы ошибка интегрирования была минимальной. Мы видели, что при наличии высоких частот основную часть ошибки составляет ее математическое ожидание, поэтому имеет смысл ставить вопрос о выборе параметров передаточной функции $K(j\omega)$ таким образом, чтобы $M\bar{\delta}_x$ стала минимальной. Величину $M\bar{\delta}_x$ легко выразить через спектральную функцию измеряемой величины $F(\omega)$ и передаточную функцию прибора.

Пусть спектр измеряемой величины сосредоточен в полосе частот $[-\omega_1, \omega_1]$, тогда

$$D\delta_x = \int_{-\omega_1}^{\omega_1} |K(j\omega) - 1|^2 dF(\omega); M\delta_{xt} = \int_{-\omega_1}^{\omega_1} (K(j\omega) - 1) dF(\omega).$$

Отсюда по формуле (48) получим

$$\begin{aligned} M\bar{\delta}_x &= -0,42 \int_{-\omega_1}^{\omega_1} \{ |K(j\omega) - 1|^2 + 2[K(j\omega) - 1] \} dF(\omega) = \\ &= 0,84 \int_0^{\omega_1} \{ 1 - |K(j\omega)|^2 \} dF(\omega) = 0,84 \int_0^{\omega_1} \{ 1 - A^2(\omega) \} dF(\omega) \end{aligned}$$

($\int_{-\omega_1}^{\omega_1} (K - \bar{K}) dF(\omega) = 0$ из-за четности спектральной плотности), где $A(\omega)$ — амплитудно-частотная характеристика дифманометра.

Таким образом, для приведения к минимуму величины $M\bar{\delta}_x$ важно только приблизить к единице модуль передаточной функции, т. е. амплитудную характеристику, не учитывая его фазовой характеристики. Если не известен спектр $F(\omega)$ измеряемой величины, то разумно выбрать такие параметры прибора, чтобы сделать минимальной величину

$$\max_{F(\omega)} M\bar{\delta}_x = 0,84 \max_{|\omega| < \omega_1} [1 - A^2(\omega)].$$

Итак, в статье получены формулы для подсчета динамических погрешностей и ошибок интегрирования, даны методы минимизации этих погрешностей или ошибок путем выбора оптимальных параметров динамических систем приборов.

Методы применимы для случая измерения неслучайной функции или реализации стационарного случайного процесса.

Раздел «Влияние извлечения квадратного корня из перепада давления на динамическую погрешность» написан В. А. Волконским, остальная часть статьи — А. С. Немировским.

ЛИТЕРАТУРА

1. Солодовников В. В., Введение в статическую динамику систем автоматического управления, М.—Л., 1952.
2. Zadeh L., Ragazzini J., An Extension of Wiener's Theory of Prediction, *J. Applied Physics*, July, 1950.
3. Солодовников В. В., Матвеев П. С., Синтез корректируемых устройств следящих систем при наличии помех по заданным требованиям к динамической точности, «Автоматика и телемеханика», № 3, 1955.
4. Куракин К. И., Синтез линейных следящих систем на основе критерия минимума практически предельной ошибки воспроизведения, «Автоматика и телемеханика», № 5, 1957.
5. Немировский А. С., Интеграторы измерительных приборов, Стандартгиз, М., 1960.
6. Busch H., Eine einfache Ableitung der vollständigen Theory of Oszillographen, *Physikalische Zeitschrift*, Bd. 13, I/VII 1912.
7. Куракин К. И., Аналитический метод синтеза линейных систем автоматического управления при наличии помех и заданной динамической точности, «Автоматика и телемеханика», № 5, 1958.
8. Кремлевский П. П., Динамические характеристики дифманометров, Сборник «Теплоэнергетические и химико-технологические приборы и регуляторы», М.—Л., 1959.
9. Лэнгид Д., Бэттин Р., Случайные процессы в задачах автоматического управления, М., 1958.

Поступила в редакцию
21/VI 1960 г.

А. С. НЕМИРОВСКИЙ
ВНИИК

МЕТОДИЧЕСКАЯ ОШИБКА ДИСКРЕТНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

В статье исследуется методическая ошибка измерения интегральной величины, возникающая при применении интеграторов дискретного действия. Рассматриваются две схемы интегрирования: с фиксированной и со скользящей ординатой. Предполагается, что измеряется стационарный случайный процесс. Приведенный в статье вывод формулы позволяет представить методическую ошибку непосредственно в зависимости от спектральных свойств измеряемого процесса.

Настоящая работа относится к вопросу об оценке точности приборов, включающих интеграторы.

Измерение интегральной величины можно отнести к случаю косвенных измерений. Действительно, в каждый момент времени производится измерение интегрируемой величины y_t (индексом t обозначен момент времени t), а искомый интеграл подсчитывается по формуле

$$I = \int_0^T y_t dt, \quad (1)$$

где T — полное время интегрирования.

При разных измерениях интеграла значения y_t будут различными функциями времени, для каждого измерения y_t можно считать реализацией случайного процесса, часто этот процесс можно считать либо стационарным, либо складывающимся из неслучайной функции m_t и случайного стационарного процесса x_t , т. е.

$$y_t = x_t + m_t. \quad (2)$$

Особенность рассматриваемого случая косвенных измерений заключается в том, что подсчет по формуле (1) производится вычислительным устройством — интегратором, и его погрешности наряду с погрешностями прибора вызывают ошибку измерения интеграла. Второй особенностью является необходимость в измерении бесчисленного множества значений y_t . При оценке ошибки интегрирования нам не известно каждое из значений y_t , но известны вероятностные характеристики случайного процесса y_t . Это третья особенность такого рода измерений.

Мы будем решать задачу в применении к расходомерам, которые интегрируют процесс расхода. В большинстве случаев процесс расхода стационарен (рис. 1, а) или определяется выражением (2) (рис. 1, б).

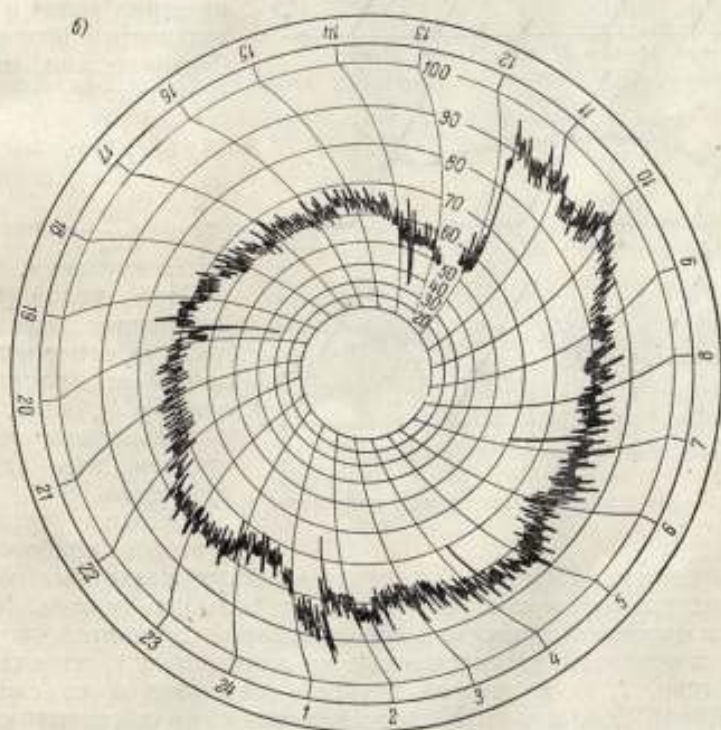
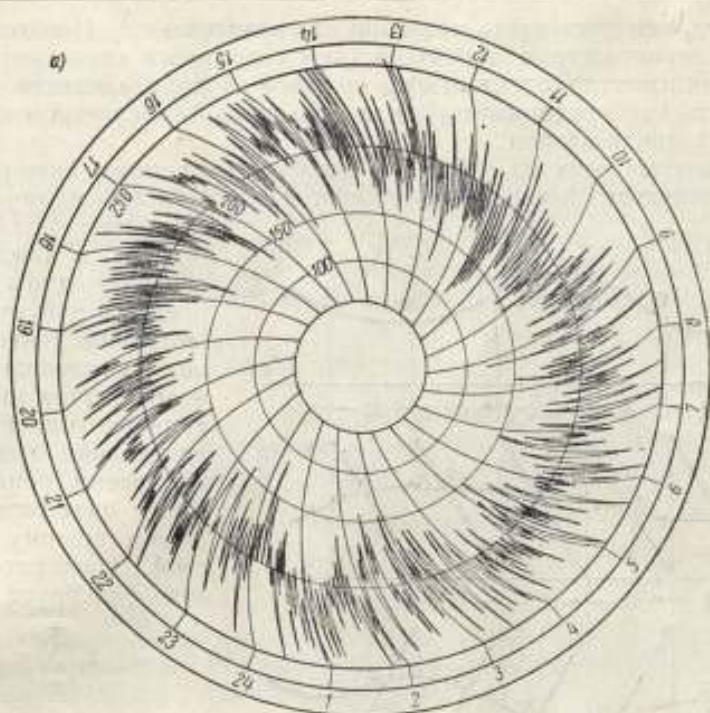


Рис. 1. Характерные диаграммы расхода.

причем m_t меняется очень медленно по сравнению с x_t . Необходимые для расчета вероятностные характеристики случайного стационарного процесса, как известно, определяются по одной из его реализаций. Их можно вычислить непосредственно [1] или пользуясь коррелятором или гармоническим анализатором.

Рассмотрим одну из ошибок — ошибку дискретного интегрирования, возникающую вследствие того, что интегратор работает циклически с длительностью цикла $\Delta t = t_0$ (рис. 2), в каждом цикле измеряет одно из значений процесса и суммирует эти величины. Таким образом, не учитывается ход процесса внутри цикла, что и является причиной возникновения ошибки. Она вызывается принципом работы интегратора и является поэтому методической. Интегратор на выходе фиксирует значение

$$t_0 \sum_{k=1}^n y_{t_k}$$

в то время как искомым интеграл равен в действительности I [формула (1)]. Следовательно, методическая ошибка равна

$$\Delta_m = t_0 \sum_{k=1}^n y_{t_k} - \int_0^T y_t dt, \quad (3)$$

где $n = \frac{T}{t_0}$ — число циклов интегрирования.

При малой скорости изменения неслучайной части m_t измеряемого процесса ее влияние на ошибку Δ_m мало, поэтому в дальнейшем считаем y_t стационарным случайным процессом.

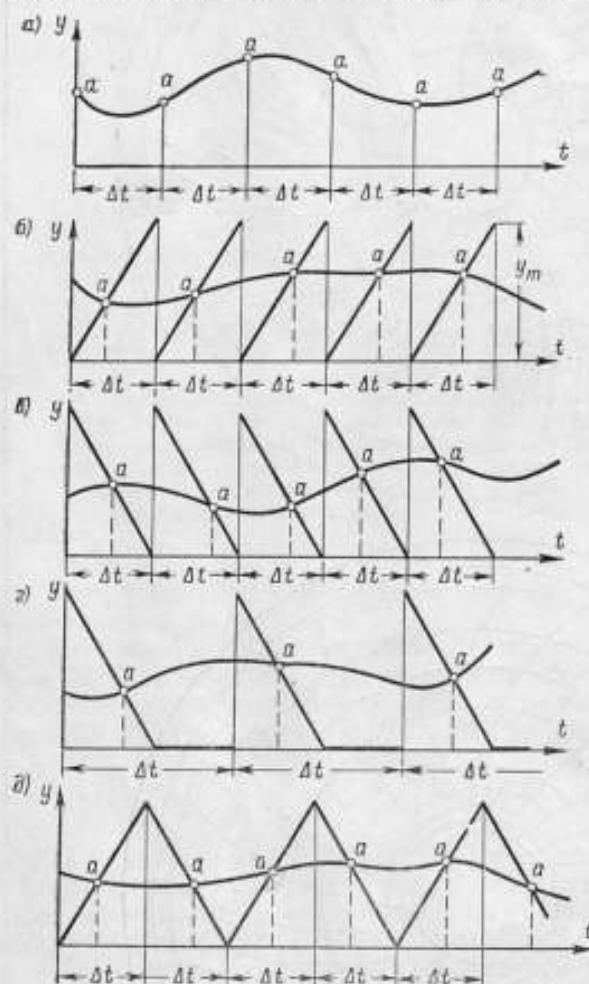


Рис. 2. Различные схемы дискретного интегрирования.

Большое число интеграторов приборов работает циклически. Имеются интеграторы самых различных конструкций [2], однако их можно разбить на две большие группы. К первой группе относятся интеграторы с фиксированной ординатой, в которых измеряются ординаты, расположенные на одинаковых расстояниях друг от друга (рис. 2, а), ко второй группе — интеграторы со скользящей ординатой (рис. 2, б, в, г, д). У последних момент фиксирования ординаты в цикле зависит от значения измеряемого процесса. Схемы со скользящей ординатой могут быть прямыми (рис. 2, б), обратными (рис. 2, в, г) и симметричными (рис. 2, д).

Для схемы с фиксированной ординатой $t_k = kt_0$, откуда следует, что

$$\Delta_{\text{мф}} = t_0 \sum_{k=0}^{n-1} y_{kt_0} = \int_0^T y_t dt. \quad (4)$$

Опираясь на формулу (4) и на предположение о стационарности y_t , найдем математическое ожидание, дисперсию и предельное отклонение методической ошибки дискретного интегрирования для интеграторов с фиксированной ординатой. Сразу же видно, что математическое ожидание $M\Delta_{\text{мф}} = 0$, так как математическое ожидание стационарного процесса не зависит от времени, т. е.

$$My_t = My_k = My_{kt_0},$$

отсюда следует, что $D\Delta_{\text{мф}} = M\Delta_{\text{мф}}^2$. Дисперсию удобнее подсчитать, пользуясь теоремой о спектральном разложении, которая заключается в том, что всякий стационарный процесс может быть представлен в виде

$$y_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dz_{\lambda}, \quad (5)$$

где λ — частота;

dz_{λ} — случайная величина — амплитуда гармоники с частотой λ , причем имеет место некоррелированность приращений dz на непесекающихся отрезках оси частот, т. е.

$$M dz_{\lambda} \bar{d}z_{\omega} = \begin{cases} 0 & \text{при } \lambda \neq \omega \\ dF_{\lambda} & \text{при } \lambda = \omega \end{cases} \quad (6)$$

Определяемая таким образом функция $F_{\lambda} = F(\lambda)$ называется спектральной функцией [3]. Напомним, что спектральная плотность $f_{\lambda} = F'_{\lambda}$ и корреляционная функция R_t связаны между собой преобразованием Фурье, т. е.

$$R_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f_{\lambda} d\lambda; \quad f_{\lambda} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} R_t dt. \quad (7)$$

Применим спектральное разложение к выражению (4):

$$\Delta_{\text{мф}} = t_0 \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda kt_0} dz_{\lambda} = \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dz_{\lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{\lambda} dz_{\lambda},$$

где

$$\Psi_{\lambda} = t_0 (e^{i\lambda T} - 1) \left(\frac{1}{e^{i\lambda t_0} - 1} - \frac{1}{i\lambda t_0} \right).$$

Отсюда

$$\Delta_{\text{мф}}^2 = \Delta_{\text{мф}} \bar{\Delta}_{\text{мф}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{\lambda} \bar{\Psi}_{\omega} dz_{\lambda} \bar{d}z_{\omega}.$$

Пользуясь свойством некоррелированности приращений, получаем

$$D\Delta_{\text{мф}} = M\Delta_{\text{мф}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_{\lambda}|^2 dF_{\lambda}, \quad (8)$$

причем

$$|\Psi_\lambda|^2 = t_0^2 \sin^2 \frac{\lambda T}{2} \left[\left(\frac{2}{\lambda t_0} - \frac{1}{\sin \frac{\lambda t_0}{2}} \right)^2 + 4 \frac{1 - \cos \frac{\lambda t_0}{2}}{\lambda t_0 \sin \frac{\lambda t_0}{2}} \right]. \quad (9)$$

По формулам (8) и (9) можно определить дисперсию методической ошибки и исследовать влияние распределения спектра процесса по оси

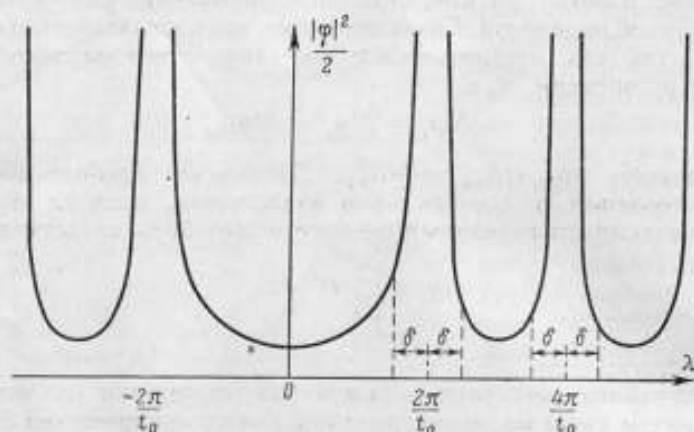


Рис. 3. Функция $\frac{1}{2} |\varphi|^2$.

частот. Для подсчета дисперсии надо, следовательно, знать спектральную функцию F_λ или отыскать ее по формуле (7) по известной корреляционной функции.

Рассмотрим выражение (9). Член в квадратных скобках почти периодический и имеет особые точки при $\lambda = \frac{2k\pi}{t_0}$ ($k = \pm 1; \pm 2, \dots$). В интервале $\frac{2\pi}{t_0}$ функция $\sin^2 \frac{\lambda T}{2}$ имеет $n = \frac{T}{t_0}$ волн, а так как n обычно велико, то в точках обычных можно при расчете вместо $|\Psi_\lambda|^2$ брать среднее значение, равное $\frac{1}{2} t_0^2 |\varphi|^2$, где $|\varphi|^2$ — выражение, стоящее в квадратных скобках. Функция $\frac{1}{2} |\varphi|^2$ изображена на рис. 3. Вблизи особых точек осреднение уже недопустимо, например в самих особых точках $|\varphi|^2 = \infty$, а $|\Psi|^2 = n^2 t_0^2$. Эти замечания помогают во время расчета по формуле (8).

Приводим результаты некоторых расчетов (табл. 1).

Таблица 1

$k = \frac{\tau}{t_0}$ \ $n = \frac{T}{t_0}$	0	0,4	1	2,5	12,5
40	0,158	0,099	0,07	0,0485	0,024
1920	0,0228	0,014	0,0092	0,0059	0,0021
5760	0,0132	0,0074	0,0058	0,0034	0,0012

В табл. 1 содержатся данные для расчета ошибки интегрирования в частном случае, когда спектральная плотность и корреляционная функция равны соответственно

$$f_{\lambda} = \frac{\sigma_y^2}{\pi} \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{\lambda^2 + \left(\frac{1}{\tau}\right)^2}$$

$$R_t = \sigma_y^2 e^{-\frac{1}{\tau}|t|},$$

где σ_y^2 — дисперсия измеряемого процесса;

$\tau = \int_0^{\infty} |r_t| dt$ характеризует скорость затухания корреляционной связи и является обобщенной характеристикой корреляционной функции.

r_t — нормированный коэффициент корреляции.

В табл. 1 приведены значения A , зная которые можно определить среднее квадратическое значение методической ошибки:

$$\sigma_m = A \sigma_y T.$$

В табл. 2 приведены допустимые значения

$$\frac{1}{t_0 \sigma_y^2} \sum \max f_{\lambda}; \quad \left| \lambda - \frac{2k\pi}{t_0} \right| < \delta \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots),$$

т. е. сумм максимумов спектральных плотностей внутри критических участков в том случае, когда критическими считаются участки, расположенные симметрично относительно особых точек и определяемые размером $\delta = \frac{\pi}{2t_0}$ (рис. 3).

Табл. 2 составлена при двух значениях $n = \frac{T}{t_0}$ и двух значениях предельной приведенной ошибки

$$\varepsilon = \frac{3\sigma_m}{y_{\max} T}.$$

В табл. 3 даны минимальные допустимые значения времени интегрирования T_{\min} (при условии, что $\varepsilon = 0,15\%$ и спектр процесса содержит только частоты $|\lambda| < \lambda_{\max}$) в зависимости от времени цикла интегрирования и дисперсии измеряемого процесса.

Таблица 3

λ_{\max}	$t_0, \text{сек}$	$\sigma_y^2 = \frac{1}{12} y_{\max}^2$	$\sigma_y^2 = 0,0033 y_{\max}^2$
		$T_{\min}, \text{в часах}$	
$\frac{2\pi}{1,2t_0}$	15	5,0	1,0
	6	2,0	0,4
	3	1,0	0,2
$\frac{2\pi}{3t_0}$	15	3,0	0,6
	5	1,2	0,25
	3	0,6	0,12

Надо заметить, что дальнейшее уменьшение λ_{\max} практически не дает уменьшения T_{\min} .

Ошибку интегрирования по схеме скользящей ординаты отыскать значительно сложнее и поэтому получены только формулы для оценки сверху этой ошибки.

Покажем, как производится эта оценка. Интегрирование по схеме (рис. 2, б) осуществляется так: когда значения y_t находятся над наклонной прямой, то выходной вал интегратора включен и вращается с постоянной скоростью, равной y_m , а когда под наклонной прямой, то выходной вал интегратора неподвижен. Следовательно, методическая погрешность

$$\delta_m = \begin{cases} y_m - y_t & \text{при } y_t \geq \frac{t - kt_0}{t_0} y_m \\ -y_t & \text{при } y_t < \frac{t - kt_0}{t_0} y_m \end{cases} \quad (10)$$

Она нестационарна, даже если процесс y_t стационарен. Действительно,

$$\begin{aligned} M\delta_m &= \int_{u > \frac{t - kt_0}{t_0} y_m} (y_m - u) dF - \int_{u < \frac{t - kt_0}{t_0} y_m} u dF = \\ &= y_m \left[1 - F\left(\frac{t - kt_0}{t_0} y_m\right) \right] - My_t. \end{aligned}$$

Здесь F — функция распределения y_t .

Таким образом $M\delta_m$ является функцией времени t , а δ_m — нестационарным процессом. Однако

$$\int_{kt_0}^{(k+1)t_0} M\delta_m dt = 0.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} y_m \int_{kt_0}^{(k+1)t_0} \left[1 - F\left(\frac{t - kt_0}{t_0} y_m\right) \right] dt &= y_m \int_0^{y_m} [1 - F(v)] \frac{t_0}{y_m} dv = \\ &= \int_0^{y_m} v dF(v) = My_t. \end{aligned}$$

Здесь мы пользуемся тем, что весь процесс расположен внутри диапазона $0 \div y_m$, иначе схема рис. 2, б не учитывала бы все циклы. Число циклов интегрирования за полное время интегрирования велико, можно считать его целым и $M\Delta_{mc} = 0$ (Δ_{mc} — методическая ошибка интегрирования со скользящей ординатой). Отсюда следует, что $D\Delta_{mc} = M\Delta_{mc}^2$. Теперь можно найти дисперсию из таких соображений:

$$\Delta_{mc}^2 = \int_0^T \int_0^T \delta_{m1} \delta_{m2} dt ds$$

или

$$\begin{aligned} D\Delta_{mc} &= M\Delta_{mc}^2 = \int_0^T \int_0^T (M\delta_{m1} \delta_{m2}) dt ds = \\ &= \int_0^T \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(v) [p(u, v) - p(u) p(v)] du dv dt ds. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $p(u, v)$, $p(u)$, $p(v)$ — плотности распределения измеряемого процесса в моменты времени (t, s) , t и s соответственно;

$$f(u) = y_m \alpha(u) - u,$$

причем

$$\alpha(u) = \begin{cases} 1 & u \geq \frac{t - kt_0}{t_0} y_m, \\ 0 & u < \frac{t - kt_0}{t_0} y_m. \end{cases}$$

В квадратной скобке подынтегрального выражения член $p(u) p(v)$ вписан потому, что

$$\int_0^T M \delta_u dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T f(u) p(u) du dt = 0.$$

Формула (11) практически непригодна для расчета, но к ней можно применить неравенство Буныковского и получить оценку для искомой дисперсии. Проведем требуемые преобразования:

$$D \Delta_{nc} = M \Delta_{nc}^2 = \sum_{k, l=0}^{n-1} J_{kl},$$

где

$$J_{kl} = \int_{kt_0}^{(k+1)t_0} \int_{lt_0}^{(l+1)t_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(v) p(u, v) du dv dt ds.$$

Так как

$$\int_{kt_0}^{(k+1)t_0} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(u) p(u) du = 0,$$

то

$$\begin{aligned} J_{kl}^2 &= \left[\int_{kt_0}^{(k+1)t_0} \int_{lt_0}^{(l+1)t_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_u f_v p_u p_v \left(\frac{p_{uv}}{p_u p_v} - 1 \right) du dv dt ds \right]^2 < \\ &< \int_{kt_0}^{(k+1)t_0} \int_{lt_0}^{(l+1)t_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_u^2 f_v^2 p_u p_v du dv dt ds \int_{kt_0}^{(k+1)t_0} \int_{lt_0}^{(l+1)t_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{p_{uv}}{p_u p_v} - 1 \right)^2 p_u p_v du dv dt ds. \end{aligned} \quad (12)$$

Для нормального распределения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{p_{uv}}{p_u p_v} - 1 \right)^2 p_u p_v du dv = \frac{r_{12}^2}{1 - r_{12}^2},$$

где r_{12} — нормированная корреляционная функция.

При подстановке в формулу (12) получаем:

$$\begin{aligned} J_{kl}^2 &\leq \int_{kt_0}^{(k+1)t_0} \int_{lt_0}^{(l+1)t_0} M \delta_{ut}^2 M \delta_{vs}^2 dt ds \int_{kt_0}^{(k+1)t_0} \int_{lt_0}^{(l+1)t_0} \frac{r_{12}^2}{1 - r_{12}^2} dt ds = \\ &= A^2 t_0^2 \frac{Q_{kt_0, lt_0}^2}{1 - Q_{kt_0, lt_0}^2}. \end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения:

$$\frac{Q_{kt_s, t_s}^2}{1 - Q_{kt_s, t_s}^2} = \frac{1}{t_0^2} \int_{kt_s}^{(k+1)t_s} \int_{t_s}^{(l+1)t_s} \frac{r_{ts}^2}{1 - r_{ts}^2} dt ds;$$

$$A = \int_0^{t_s} M \delta_{st}^2 dt.$$

С другой стороны,

$$J_{kl}^2 = \left[\int_{kt_s}^{(k+1)t_s} \int_{t_s}^{(l+1)t_s} (M \delta_{st} \delta_{ms} - M \delta_{st} M \delta_{ms}) dt ds \right]^2 < \left(\int_0^{t_s} \sqrt{D \delta_{st}} dt \right)^4,$$

значит,

$$\frac{1}{A^2 t_0^2} J_{kl}^2 < \min \left(\frac{Q_{kt_s, t_s}^2}{1 - Q_{kt_s, t_s}^2}, a^2 \right),$$

где

$$a = \frac{1}{A t_0} \left[\int_0^{t_s} \sqrt{D \delta_{st}} dt \right]^2,$$

а отсюда непосредственно следует, что

$$\frac{1}{A t_0} J_{kl} < \sqrt{1 + a^2} |Q_{ts}|.$$

Следовательно,

$$D \Delta_{mc} < A t_0 \sqrt{1 + a^2} \sum_{k, l=0}^{n-1} Q_{kt_s, t_s}. \quad (13)$$

Этой формулой можно пользоваться для оценки.

Теперь еще сделаем такие приближения:

$$Q_{kt_s, t_s} \cong r_{ts}^2;$$

$$B = \frac{1}{t_0^2} \sum_{k, l=0}^{n-1} t_0^2 |Q_{kt_s, t_s}| \cong \frac{1}{t_0^2} \int_0^{\tau} \int_0^{\tau} |r_{ts}| dt ds.$$

Для стационарного процесса

$$r_{ts} = r_{t-s}$$

откуда

$$B \cong \frac{2T}{t_0^2} \int_0^{\tau} |r_u| du = \frac{2T}{t_0^2} \tau,$$

где $\tau = \int_0^{\infty} |r_u| du$ — глубина корреляции.

При условии таких приближений

$$D \Delta_{mc} < \frac{2T \tau \sqrt{1 + a^2}}{t_0} \int_0^{t_s} M \delta_{st}^2 dt, \quad (14)$$

где

$$a = \frac{\left(\int_0^{t_s} \sqrt{D \delta_{st}} dt \right)^2}{t_0 \int_0^{t_s} M \delta_{st}^2 dt}. \quad (15)$$

Для пользования оценкой надо знать $M\delta_{mf}^2$ и $D\delta_{mf}$. Для нормального закона распределения y_t их легко подсчитать, пользуясь при этом выражением (10). Оказывается, что

$$\left. \begin{aligned} M\delta_{mf}^2 &= \sigma_y^2 - m_y^2 + y_m(y_m - 2m_y) \left[1 - \Phi\left(\frac{w - m_y}{\sigma_y}\right) \right] - \\ &\quad - \frac{2\sigma_y y_m}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(w - m_y)^2}{2\sigma_y^2}}; \\ D\delta_{mf} &= \sigma_y^2 + y_m^2 \left[\Phi\left(\frac{w - m_y}{\sigma_y}\right) - \left\{ \Phi\left(\frac{w - m_y}{\sigma_y}\right) \right\}^2 \right] - \\ &\quad - \frac{2\sigma_y y_m}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(w - m_y)^2}{2\sigma_y^2}} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где

$$w = y_m \frac{t - kt_0}{t_0};$$

$\Phi(x)$ — интеграл вероятностей.

Таким образом, имеются расчетные формулы для оценки методической ошибки дискретного интегрирования со скользящей ординатой.

В отличие от схемы с фиксированной ординатой при очень малой глубине корреляции (т. е. высокочастотном спектре, но очень гладкой корреляционной функции) ошибка становится малой. При глубоких корреляционных связях оценка, даваемая формулой (14), становится слишком грубой. В этих случаях ошибки для обеих схем примерно одинаковы. «Скольжение» ординаты внутри цикла как бы осредняет результат, и есть основание предполагать, что почти всегда в вероятностном смысле $\Delta_{mf} > \Delta_{mc}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Солодовников В. В., Усков А. С., Статический анализ объектов регулирования, Машгиз, М., 1960.
2. Немировский А. С., Интеграторы измерительных приборов, Стандартгиз, М., 1960.
3. Яглом А. М., Введение в теорию стационарных функций, «Успехи математических наук», вып. 5, 1952.

Поступила в редакцию
15/VII 1960 г.

А. Н. КАРТАШЕВА
ВНИИК

О СТАТИСТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЯХ ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ ПОВЕРКИ ПРИБОРОВ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Введено понятие об оперативных характеристиках методик поверки приборов, представляющих кривые вероятности понятия гипотезы о годности прибора в зависимости от параметра, называемого в работе показателем годности. В качестве примера рассмотрены три варианта методики определения вариации показаний приборов для линейных измерений и методики поверки индикаторов часового типа. Введен критерий надежности методики поверки, находимый с помощью оперативных характеристик.

При разработке методик поверки и испытаний измерительных приборов возникает задача оценки их качества, гарантирующего надежность результатов в зависимости от характеристик поверяемых приборов, способов поверки, числа наблюдений, числа точек шкалы, в которых производится поверка прибора, и т. д.

При оценке качества той или иной методики поверки прежде всего возникает вопрос: с какой надежностью (вероятностью) при положительных результатах поверки прибора можно утверждать, что погрешности его при последующем применении этого прибора не превысят допустимых значений.

Разные методики, отличающиеся друг от друга, например числом точек на шкале прибора, в которых производится поверка, количеством измерений в каждой точке и т. п., обеспечивают разную надежность поверки или, иными словами, пользуясь одной из методик, поверители будут принимать как годные приборы, фактически не удовлетворяющие техническим условиям, и, наоборот, браковать кондиционные приборы чаще, нежели при другой методике.

Возникает и другой вопрос: каким образом следует изменить методику поверки, чтобы она обеспечивала нужную надежность.

Вопросы надежности поверки приобретают особую важность в связи с развитием автоматизации контроля в промышленности.

Вследствие влияния случайных воздействий на показания измерительных приборов оценка качества методик их поверки должна производиться с учетом не только систематических, но и случайных факторов, поэтому в данном случае целесообразно использовать статистические критерии. Одним из возможных направлений при решении этой задачи является анализ оперативных характеристик, представляющих собой кривые вероятности принятия гипотезы о кондиционности прибора в зависимости

от показателя его годности. На рис. 1 представлена оперативная характеристика одной из методик поверки. На этом рисунке по оси ординат отложена вероятность $P\left(a, \frac{\sigma}{\mu}\right)$ принятия гипотезы о кондиционности прибора, а по оси абсцисс — отношение средней квадратической погрешности σ к половине предельно допускаемой погрешности прибора μ . Зона годности прибора обозначена a .

При «идеальной» оперативной характеристике (на рис. 1 обозначена пунктиром) вероятность принятия гипотезы о кондиционности действительно годного прибора равна единице, а вероятность принятия ее для некондиционного прибора равна нулю. Таким образом, в этом случае исключается возможность каких-либо ошибок. Реальные характеристики,

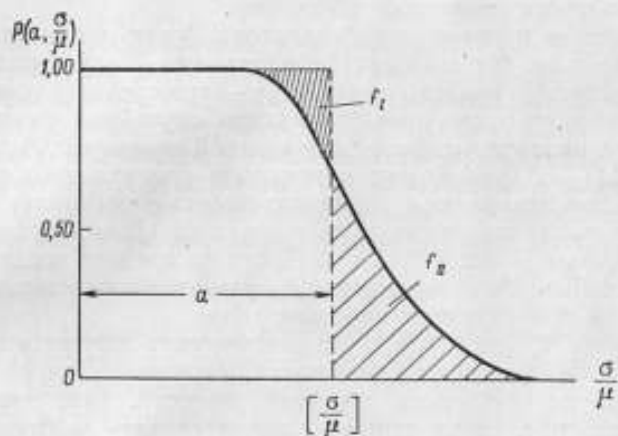


Рис. 1.

присущие методикам поверки, обычно отклоняются от идеальной и потому им свойственны ошибки: признание негодным хорошего прибора — ошибка первого рода (на рис. 1 обозначена f_1) и принятие в качестве кондиционного прибора, фактически не удовлетворяющего техническим условиям, — ошибка второго рода (обозначена f_2).

В качестве примера, поясняющего содержание вопросов надежности поверки измерительных приборов, рассмотрим индикаторы часового типа. Эти приборы находят широкое применение не только как универсальный измерительный инструмент, но и в различных механизированных и автоматизированных контрольно-измерительных приспособлениях. Они содержат несколько кинематических звеньев с довольно типичным преобразованием измерительного импульса, ввиду чего в ряде организаций ведется работа по усовершенствованию методики поверки этих приборов. Наряду с существенным самостоятельным значением вопроса о методике поверки индикаторов в ней имеются черты, общие для большого круга приборов, причем не только для линейных измерений.

В ГОСТ 577—60 на индикаторы часового типа с ценой деления 0,01 мм и пределом измерения 10 мм предусмотрены следующие технические требования:

Допускаемая вариация показаний $[\Delta]$	3 мм
Допускаемые погрешности в пределах:	
а) 0,1 мм в начале второго оборота стрелки $[\Delta_{0,1}]$	6 »
б) 1 мм на любом участке интервала измерения $[\Delta_1]$	12 »
в) всего интервала измерения 0 ± 10 мм $[\Delta_{10}]$	22 »

Вариацию показаний на практике рассматривают как размах варьирования показаний при повторных арретированиях наконечника индикатора на плоскость столика или концевой меры.

Под погрешностью индикатора в пределах данного участка (0,1; 1 или 10 мм) согласно Инструкции 141—55 понимается сумма абсолютных значений наибольших положительной и отрицательной погрешностей, выявленных на данном участке при прямом и обратном ходе измерительного стержня. Погрешность индикатора содержит систематическую составляющую (изменяющуюся по мере перемещения измерительного стержня по отношению к той точке, в которой индикатор был настроен, и представляющую собой случайную функцию $Y'(x)$ положения x измерительного стержня) и случайную составляющую, варьирующую от одного повторного измерения к другому.

Систематическая погрешность индикатора будет описываться математическим ожиданием $MY'(x)$ случайной функции $Y'(x)$, представляющим собой неслучайную функцию аргумента x — тот средний уровень, около которого варьируют отдельные реализации случайной функции $Y'(x)$.

Поверку индикатора часового типа с ценой деления 0,01 мм согласно Инструкции 141—55 производят с помощью специального микрометра. На всем интервале измерения и в пределах любого оборота стрелки поверку производят в точках, отстоящих друг от друга на 0,2 мм, а на нормированном участке шкалы — через 0,01 мм. Дойдя до предела поверяемого участка, меняют направление перемещения измерительного стержня и повторяют такую же поверку при обратном ходе.

Для применения подходящего математического аппарата при анализе методики поверки индикаторов требуются некоторые уточнения понятий, связанных с рассматриваемыми нормами точности. Так, например, возникает вопрос о том, какой прибор следует считать действительно удовлетворяющим требованиям вариации показаний. Из сказанного выше ясно, что эти требования представляют собой допускаемое значение случайной составляющей Y погрешности индикатора. Но если трактовать $[\Delta]$ буквально как допускаемое значение размаха варьирования, то нельзя дать определенного ответа на только что поставленный вопрос. В самом деле, размах варьирования

$$R_n = Y_{\max} - Y_{\min} \quad (1)$$

(где Y_{\max} и Y_{\min} — соответственно максимальное и минимальное значения погрешностей, полученные в серии, состоящей из n наблюдений) зависит от n .

С увеличением n среднее значение R_n возрастает. Можно, конечно, регламентировать некоторое определенное значение n , однако такую регламентацию трудно оправдать, так как на практике применяются самые разнообразные числа повторных измерений индикатором. Часто применяется просто одно измерение, при котором, очевидно, значение R_n будет всегда равно нулю, хотя, конечно, значение случайной составляющей Y погрешности будет отличным от нуля.

Для практики важно, чтобы именно случайная погрешность прибора Y , а не случайный размах варьирования показаний, не выходила с достаточной вероятностью α за определенные границы, например $\pm \frac{[\Delta]}{2}$.

Но и при регламентированном n размах варьирования, подобно самой погрешности Y , представляет случайную величину, характеризующуюся рассеиванием значений в повторных сериях наблюдений одинаковой численности n . Если трактовать $[\Delta]$ как допускаемое значение эмпирического размаха варьирования R_n , а именно так в большинстве случаев

понимают эту величину на практике, то может случиться, что значение R_n в одной из серий наблюдений для прибора с малым σ , т. е. с малой случайной погрешностью, окажется больше значения R_n , полученного в другой серии наблюдений для другого прибора, обладающего большим σ , т. е. большой случайной погрешностью. Тогда, вопреки здравому смыслу, пришлось бы признать первый прибор якобы менее точным, чем второй. Чтобы избежать этих противоречий и привести все в соответствие с запросами практики, предлагаем трактовать допускаемое значение случайной погрешности как длину Δ такого интервала, за границы которого с вероятностью α не выходит случайная погрешность прибора.

При встречающихся в практике законах распределения длина Δ центрального интервала может быть выражена соотношением

$$\Delta = t_{\alpha}\sigma, \quad (2)$$

где σ — средняя квадратическая погрешность;

t_{α} — постоянный коэффициент, вычисляемый из условия, что погрешность прибора с вероятностью α не будет выходить за границы центрального интервала длины Δ .

Для данного индикатора σ является постоянной величиной — параметром распределения вероятностей его погрешности, а потому и Δ для данного индикатора будет постоянной величиной. Следовательно, при условии (2) получается вполне определенное условие годности индикатора в виде

$$t_{\alpha}\sigma = \Delta < [\Delta]. \quad (3)$$

Известно, что параметр σ , а значит и величину $t_{\alpha}\sigma$ можно приближенно оценивать по размаху варьирования, полученному из наблюдений. Поэтому трактовка $[\Delta]$ как допускаемого значения длины центрального интервала Δ не находится в принципиальном противоречии с существующей методикой поверки индикаторов по вариации показаний.

Ниже рассмотрены различные варианты поверки приборов в отношении соблюдения установленного значения вариации показаний $[\Delta]$.

В а р и а н т I. Производится m рядов наблюдений по n наблюдений в каждом ряду, и если все они окажутся в пределах центрального интервала длины $[\Delta]$ или, что то же самое, в пределах интервала $(-\mu; \mu)$, где $\mu = \frac{[\Delta]}{2}$, то прибор признается годным.

В а р и а н т II. Производится n_1 наблюдений, причем:

а) если все n_1 наблюдений лежат в суженном интервале $(-\mu_0; \mu_0)$, где $\mu_0 < \mu$ и $\mu = \frac{[\Delta]}{2}$, то прибор признается годным;

б) если хотя бы одно наблюдение выходит за пределы $\pm\mu$, то прибор бракуется;

в) если хотя бы одно из n_1 наблюдений вышло за пределы суженного интервала, но все n_1 наблюдений находятся в интервале $(-\mu; \mu)$, то производится еще n_2 наблюдений, причем:

г) если все n_2 наблюдений лежат в интервале $(-\mu; \mu)$, то прибор признается годным;

д) если хотя бы одно наблюдение вышло за пределы этого интервала, то прибор бракуется.

В а р и а н т III. Производится m рядов наблюдений по n наблюдений в каждом, причем:

а) если размах варьирования в каждом из m рядов не превышает $[\Delta]$, то прибор принимается;

б) если хотя бы в одном ряду размах варьирования превышает $[\Delta]$, то прибор бракуется.

Найдем оперативную характеристику варианта I методики проверки гипотезы кондиционности прибора (гипотезы H). Если P — вероятность попадания одного наблюдения в интервал $(-\mu; \mu)$, то при независимости наблюдений на основании правила умножения вероятность того, что все n наблюдений окажутся в интервале $(-\mu; \mu)$, равна P^n .

При стационарности в широком смысле случайной функции $Y'(x)$ погрешностей индикатора или стационарности в узком смысле случайной функции $Y(x)$ все ряды наблюдений в m сечениях функции $Y'(x)$ можно объединить, так как при постоянстве σ не существенно, как производились наблюдения — в одном сечении или в разных. Тогда вероятность P_H попадания всех nm наблюдений в интервал $(-\mu; \mu)$ во всех m рядах,

т. е. вероятность принятия гипотезы H , выразится формулой

$$P_H = P^{nm} = \left[\int_{-\mu}^{\mu} p(y) dy \right]^{nm}, \quad (4)$$

где $p(y)$ — плотность вероятности случайной погрешности Y в данном сечении случайной функции $Y(x)$.

При нормальном распределении случайной погрешности Y в заданном сече-

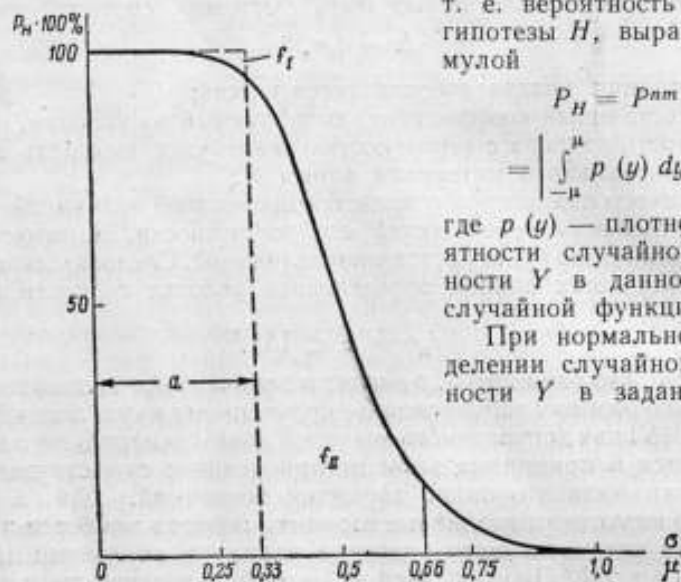


Рис. 2.

нии случайной функции $Y(x)$ выражение (4) приобретет следующий вид:

$$P_H = \left[\Phi_0\left(\frac{\mu - a}{\sigma}\right) + \Phi_0\left(\frac{\mu + a}{\sigma}\right) \right]^{nm}, \quad (5)$$

где $\Phi_0(\)$ — функция Лапласа.

Из формулы (5) видно, что вероятность P_H принятия гипотезы H , или, иными словами, признания, что по результатам указанной выше проверки прибор удовлетворяет требованиям вариации показаний, зависит не только от σ и μ , которыми в сущности определяется кондиционность прибора по данному показателю, но еще и от числа наблюдений n и числа m рядов наблюдений.

При нормальном распределении и $n = 5$, $m = 3$ и $a = 0$ были подсчитаны значения вероятности P_H при различных значениях отношения $\frac{\sigma}{\mu}$.

На рис. 2 представлена оперативная характеристика, т. е. кривая $P_H - \frac{\sigma}{\mu}$, для варианта I методики оценки вариации показаний при $nm = 15$. Пунктирной линией показана «идеальная» характеристика,

отвечающая случаю $lm = \infty$. Из этого рисунка видно, что оперативная характеристика данного варианта методики поверки далека от идеальной. Учитывая формулу (2), можно условие (3) переписать в виде

$$\frac{\sigma}{\mu} < \frac{1}{t_a}, \quad (6)$$

т. е. поверяемый прибор следует считать удовлетворяющим требованиям вариации показаний, если отношение средней квадратической погрешности к половине допускаемой вариации показаний не превышает $\frac{1}{t_a}$.

Таким образом, при $\frac{\sigma}{\mu} < \frac{1}{t_a}$ значение P_H есть вероятность принятия хороших приборов, $P_I = 1 - P_H$ есть вероятность признания негодности хорошего прибора. При $\frac{\sigma}{\mu} > \frac{1}{t_a}$ значение $P_H = P_{II}$ представляет вероятность принятия плохих приборов, и только при «идеальной» оперативной характеристике имеем

$$P_I = P_{II} = 0.$$

Оперативная характеристика рассмотренной методики показывает, что если, например, большая партия индикаторов с вариацией показаний $[\Delta]$, равной по техническим условиям 3 мк, но фактически имеющих вариацию показаний (в указанном выше смысле) 5,4 мк, пройдет поверку по этой методике, то примерно 22% индикаторов могут быть признаны по данному показателю годными, тогда как на самом деле они не удовлетворяют техническим требованиям.

Вероятности P_I и P_{II} сами по себе могут служить критериями оценки методики поверки приборов. Однако можно найти обобщенный статистический критерий. При этом следует считаться с реальной значимостью ошибок первого и второго рода.

В первом приближении ошибки первого и второго рода при поверке приборов можно считать примерно равносильными по вызываемому ими материальному ущербу. В этом случае обобщенный статистический критерий оценки методики поверки их можно получить следующим образом.

Обозначим через $\left[\frac{\sigma}{\mu}\right]$ допускаемое значение отношения $\frac{\sigma}{\mu}$. Рассмотрим (рис. 1) площади под кривыми $P\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)$. Для «идеальной» характеристики эта площадь представляется произведением $1 \times \left[\frac{\sigma}{\mu}\right]$, т. е. численно равна $\left[\frac{\sigma}{\mu}\right]$. Для реальной характеристики площадь F_I под кривой $P\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)$ в границах от 0 до $\left[\frac{\sigma}{\mu}\right]$ всегда меньше $\left[\frac{\sigma}{\mu}\right]$. Разность площадей $\left[\frac{\sigma}{\mu}\right] - F_I = f_I$, т. е. площадь f_I , заключенная между идеальной и фактической оперативной кривой рассматриваемой методики определения вариации показаний, будет характеризовать вероятности ошибок первого рода. Вероятности ошибок второго рода будут характеризоваться площадью f_{II} под фактической оперативной кривой на участке, лежащем в пределах от $\left[\frac{\sigma}{\mu}\right]$ до $K_0 \left[\frac{\sigma}{\mu}\right]$, где K_0 — постоянный коэффициент, зависящий от фактического максимального значения σ (для индикаторов в целом ряде случаев удобно принять $K_0 = 2$, что и сделано во всех даль-

нейших вычислениях). Таким образом, в качестве критерия оценки надежности методики поверки приборов можно рассматривать величину

$$(7) \quad N = \frac{F_0}{\left[\frac{\sigma}{\mu} \right]},$$

где

$$(8) \quad F_0 = \left[\frac{\sigma}{\mu} \right] - f_1 - f_2.$$

Если реальная оперативная кривая совпадает с идеальной, то, очевидно, что критерий $N = 1$; в остальных случаях $N < 1$. Чем надежнее рассматриваемая методика поверки (т. е. чем меньше для нее будут вероятности забраковывания годных приборов и вероятности пропуска бракованных приборов), тем ближе к единице будет критерий N . Этот критерий не является единственно возможным. Например, можно использовать более строгий, но более сложный в отношении вычислений критерий*

$$(9) \quad N_1 = 1 - P'_I - P'_{II},$$

где P'_I — доля бракуемых хороших приборов из общей массы поверенных приборов;

P'_{II} — доля принимаемых плохих приборов из общей массы поверенных.

Таким образом, критерий N_1 представляет долю безошибочно принимаемых на основе данной методики приборов из общей массы поверенных приборов.

Для вычисления вероятностей P'_I и P'_{II} необходимо знать плотность распределения $p\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)$ отношения $\frac{\sigma}{\mu}$ для данного типоразмера приборов.

Для первого варианта методики определения вариации показаний индикаторов по формулам (7) и (8) $N = 0,47$.

При втором варианте методики определения вариации показаний получим следующее соотношение для вероятности P'_H принятия гипотезы H :

$$(10) \quad P'_H = P_0^{n_1} + (P^{n_1} - P_0^{n_1}) P^{n_1}.$$

При нормальном распределении случайной погрешности прибора будем иметь

$$(11) \quad P'_H = \left[\Phi_0\left(\frac{\mu_0 - a}{\sigma}\right) + \Phi_0\left(\frac{\mu_0 + a}{\sigma}\right) \right]^{n_1} + \left\{ \left[\Phi_0\left(\frac{\mu - a}{\sigma}\right) + \Phi_0\left(\frac{\mu + a}{\sigma}\right) \right]^{n_1} - \left[\Phi_0\left(\frac{\mu_0 - a}{\sigma}\right) + \Phi_0\left(\frac{\mu_0 + a}{\sigma}\right) \right]^{n_1} \right\} \times \left[\Phi_0\left(\frac{\mu - a}{\sigma}\right) + \Phi_0\left(\frac{\mu + a}{\sigma}\right) \right]^{n_1}.$$

На рис. 3 изображены оперативные характеристики варианта II определения вариации показаний при значениях статистического критерия надежности, приведенных в табл. 1.

* Предложен Е. Ф. Долинским.

Для вероятности P_H^* принятия гипотезы о кондиционности прибора при варианте III методики поверки вариации показаний получим соотношение

$$P_H^* = P^m, \quad (12)$$

где m — число рядов измерений.

Для определения вероятности P используется закон распределения вероятностей размаха варьирования R_n . Он устанавливается в общем виде следующим образом. Допустим, что $p(y)$ является плотностью вероятности случайной величины Y , рассматриваемой в заданном сечении случайной функции $Y(x)$. Тогда при любом $T > 0$ имеем

$$P(R_n < T) = n \int_{-\infty}^{\infty} p(y) [P(y + T) - P(y)]^{n-1} dy, \quad (13)$$

где n — число наблюдений в ряду; $P(y + T)$ и $P(y)$ — интегральные функции распределения случайной величины Y в точках $(y + T)$ и y соответственно.

В самом деле, для того чтобы осуществилось неравенство $R_n < T$, необходимо и достаточно, во-первых, чтобы одно из n наблюдений (первое, или второе, . . . , или n -ое) заняло положение в промежутке от y до $y + dy$, вероятность чего на основании правила сложения приближенно равняется $np(y) dy$, так как

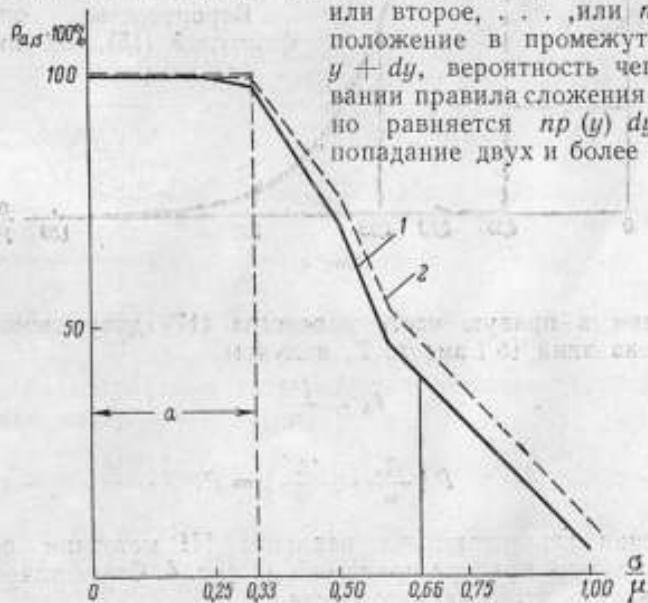


Рис. 3.

в малый интервал $(y, y + dy)$ практически невозможно; во-вторых, нужно, чтобы остальные $n - 1$ независимых наблюдений разместились между y и $(y + T)$, вероятность чего равна $[P(y + T) - P(y)]^{n-1}$. Вероятность указанного расположения всех n наблюдений будет, следовательно, при фиксированном n равна

$$np(y) dy [P(y + T) - P(y)]^{n-1}. \quad (14)$$

Применяя формулу полной вероятности и переходя к пределу, интегрируем функцию (14) по всем возможным значениям y и получаем формулу (13).

В случае нормального распределения можно, не нарушая общности, считать центр распределения в нулевой точке. Далее, рассматривая вместо величины Y нормированную величину $\hat{Y} = \frac{Y}{\sigma}$ с плотностью

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\hat{y}^2}{2}},$$

найдем с помощью формулы (13)

$$P\left(\frac{R_n}{\sigma} < t\right) = n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\hat{y}^2}{2}} [\Phi_0(\hat{y} + t) - \Phi_0(\hat{y})]^{n-1} d\hat{y}, \quad (15)$$

где

$$\Phi_0(\hat{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\hat{y}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv; \quad (16)$$

$$t = \frac{T}{\sigma}. \quad (17)$$

Вероятность, определяемая формулой (15), табулирована.

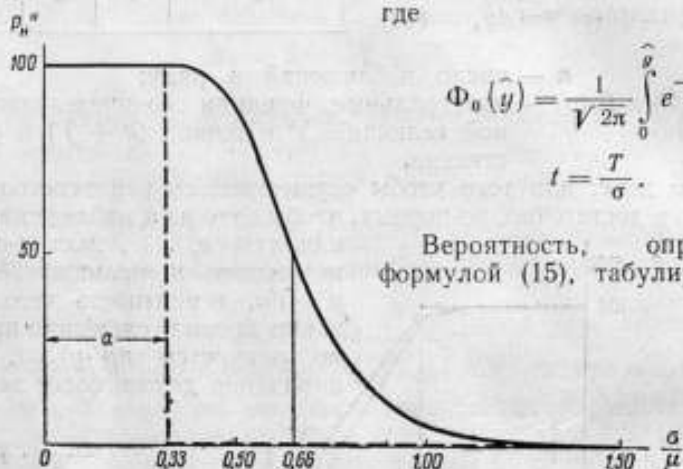


Рис. 4.

Подставляя в правую часть равенства (17) допускаемое значение вариации показаний $[\Delta]$ вместо T , получим

$$t_{\Delta} = \frac{[\Delta]}{\sigma} \quad (18)$$

и далее

$$P\left(\frac{R_n}{\sigma} < \frac{[\Delta]}{\sigma}\right) = P. \quad (19)$$

Оперативная характеристика варианта III методики определения вариации показаний прибора приведена на рис. 4. Статистический критерий N надежности этого варианта равен 0,16.

Для рассмотренных вариантов методики оценки вариации показаний получены значения критерия N , приведенные в табл. 2.

Из табл. 2 видно, что разные методики обеспечивают разную надежность проверки. Наиболее высокую надежность обеспечивают варианты I и II: критерий N для варианта I почти в 3 раза превышает аналогичный критерий варианта III при одинаковом числе наблюдений.

Из приведенных оперативных характеристик видно, что во всех рассмотренных случаях имеют место очень большие вероятности ошибок второго рода.

Оценку индикатора в отношении соблюдения требования к его погрешности Δ_l в пределах участка длины l можно свести к проверке статистической гипотезы H_l , заключающейся в том, что интервал

$$\left[MY'(x_a) - \frac{t_{\alpha}\sigma}{2}; MY'(x_b) + \frac{t_{\alpha}\sigma}{2} \right]$$

целиком лежит в заданном интервале $(-\mu_l; \mu_l)$, где $\mu_l = \frac{[\Delta_l]}{2}$, $MY'(x_a)$ и $MY'(x_b)$ — наименьшее и наибольшее (в пределах участка длины l) значения неслучайной функции $MY'(x)$, выявленные при прямом и обратном ходе, σ и t_{α} — то же, что и в формуле (2).

Таблица 2

Вариант методики проверки	I	II ₁	II ₂	III
Критерий N	0,47	0,32	0,27	0,16
Число наблюдений n	15	8	8	15

При отсутствии случайной составляющей погрешности результат наблюдений в любом сечении будет точно совпадать со значением функции $MY'(x)$, и при наличии сведений о всей кривой $MY'(x)$, а не об отдельных ее точках, ошибочные заключения о годности прибора будут исключены. При наличии случайного рассеивания погрешностей поверяемого прибора ($\sigma > 0$) могут быть ошибочные суждения о его годности.

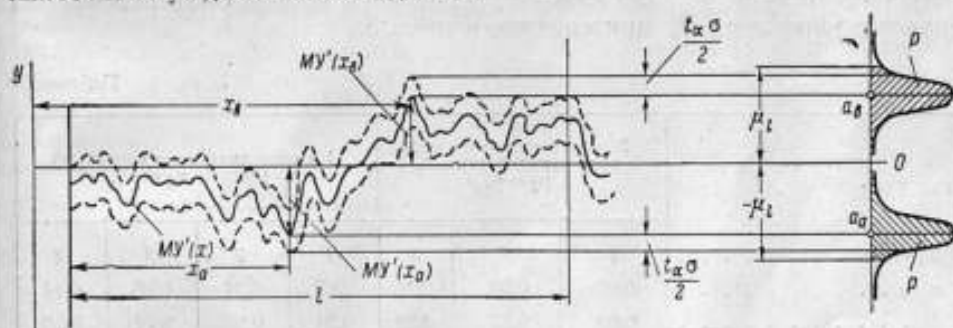


Рис. 5.

Наименее благоприятным для проверки гипотезы H_l будет случай, когда середина интервала

$$\left[MY'(x_a) - \frac{t_{\alpha}\sigma}{2}; MY'(x_b) + \frac{t_{\alpha}\sigma}{2} \right]$$

совпадает со средней точкой интервала $(-\mu_l; \mu_l)$ (рис. 5). На этом рисунке для упрощения указаны лишь погрешности индикатора, выявленные при прямом ходе, но это не имеет принципиального значения для последующих выводов.

Примем, что интервал $(x_a; x_b)$ значителен, и наблюдения в сечениях x_a и x_b можно считать независимыми. Как это видно из рис. 6, вероятность того, что какое-либо случайное значение y_b окажется не больше μ_l , равна

$$P(y_b < \mu_l) = \int_{-\infty}^{\mu_l} p(y_b) dy, \quad (20)$$

где $p(y_b)$ — плотность вероятности случайной величины Y в сечении, задаваемом абсциссой x_b .

Аналогично

$$P(y_a > -\mu_1) = \int_{-\infty}^{-\mu_1} p(y_a) dy.$$

На рис. 5 справа изображены нормальные кривые распределения величины y для сечений x_a и x_b с центрами распределения $a_a = MY'(x_a)$ и $a_b = MY'(x_b)$. Заштрихованные площади кривых будут равны:

$$P(y_b < \mu_1) = \Phi_0\left(\frac{\mu_1 - a_b}{\sigma}\right) + 0,5 = P \quad (21)$$

$$и \quad P(y_a > -\mu_1) = \Phi_0\left(\frac{\mu_1 - a_a}{\sigma}\right) + 0,5 = P. \quad (22)$$

Прибор окажется годным при совместном наступлении двух событий: $y_b < \mu_1$ и $y_a > -\mu_1$. Вероятность этого равна произведению вероятностей P , следовательно:

$$P_{H,1} = P^2. \quad (23)$$

На рис. 6 и 7 представлены оперативные кривые, соответствующие методике проверки индикатора в пределах одного оборота стрелки и на всем диапазоне измерений при разных значениях случайной составляющей погрешности прибора. Для каждой оперативной кривой были подсчитаны значения критерия N , приведенные в табл. 3.

Таблица 3

	В пределах одного оборота стрелки (рис. 6) $\mu_1 = \mu_2$			На всем диапазоне измерений (рис. 7) $\mu_1 = \mu_2$			
	1	2	3	1	2	3	4
Кривые							
σ/μ_1	0,06	0,08	0,16	0,03	0,04	0,08	0,14
N	0,82	0,75	0,28	0,91	0,90	0,74	0,39
Зона годности	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>в</i>	<i>a</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>

Данные оперативные кривые значительно лучше оперативных характеристик для методик определения вариации показаний. Значения критерия N для приборов, кондиционных в отношении вариации показаний (отношение $\frac{\sigma}{\mu_1}$ не превышает допустимых значений), близки к единице.

Мы исходили из того, что функция $MY'(x)$ известна. Фактически же о ней судят по тем точкам, которые получают при проверке, при этом может быть, что ни одна из наблюдаемых точек не совпадает ни с x_a , ни с x_b . Это может вызвать дополнительную ошибку. Окончательная оперативная характеристика, учитывающая совместное действие указанных выше причин, должна опираться на вероятность, вычисляемую как произведение двух вероятностей: вероятности $P_{H,1}$ и вероятности того, что значения y_a и y_b будут отличаться от $MY'(x_a)$ и $MY'(x_b)$ не более чем на какую-либо наперед заданную величину.

При выводе расчетных формул для построения оперативных характеристик были сделаны некоторые предложения, в частности, предположение о форме распределения случайной функции $Y'(x)$ погрешности инди-

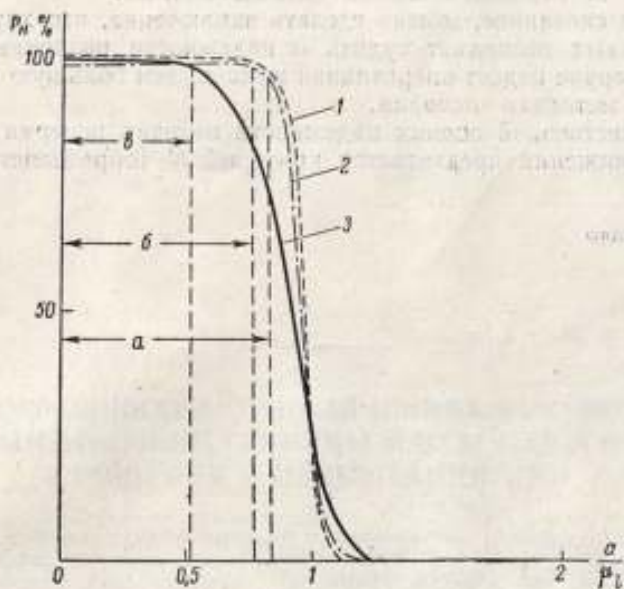


Рис. 6.

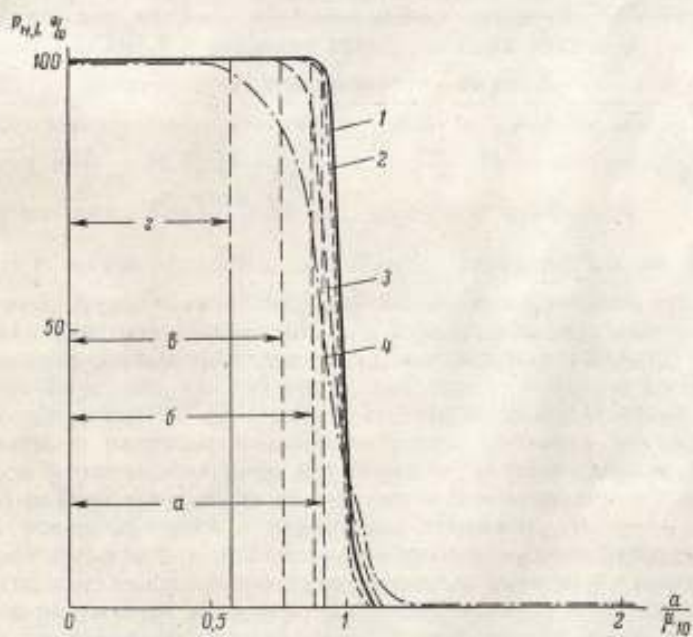


Рис. 7.

катора в заданном сечении и о стационарности в широком смысле случайной функции $Y'(x)$ погрешности индикатора. Все предположения были подтверждены экспериментальными исследованиями.

Резюмируя сказанное, можно сделать заключение, что характер оперативных кривых позволяет судить о надежности различных методик поверки: чем круче падает оперативная кривая, тем большую надежность обеспечивает методика поверки.

Для количественной оценки надежности методик поверки в качестве первого приближения предлагается критерий N [определяется по формуле (7)].

Поступила в редакцию
21/VI 1960 г.



ОП
С П

раб
тат
еди

вр
ко

По

мн

ко
ни
пр
не
пр
Вь
сл

из
но
дв
мо
кв

Н. А. СМЕРНОВА
ВНИИМ

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ СЛИЧЕНИЯХ ЭТАЛОНОВ-КОПИЙ С ПЕРВИЧНЫМ ЭТАЛОНОМ ЕДИНИЦЫ МАССЫ СССР И НЕКОТОРЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ В ПОЛЬЗОВАНИИ ИМИ

Излагается новый порядок сличений эталонов-копий килограмма, увеличивающий сохранность первичного эталона и повышающий достоверность и точность значений эталонов-копий. Приводятся формулы для вычисления поправок этих значений и для оценки точности этих поправок.

В период с 1955 по 1956 г. в лаборатории мер массы ВНИИМ проведена работа по усовершенствованию в области эталонов единицы массы. Результатом этой работы явилось создание новых копий первичного эталона единицы массы СССР * и создание новых рабочих эталонов.

До 1955 г. имелся один эталон-копия—гиря $R_1 \frac{\text{PtIr}}{1 \text{ кг}}$. В настоящее время число эталонов-копий доведено до пяти. Созданы новые эталоны-копии—гири $V \frac{\text{Cr}}{1 \text{ кг}}$ № 6, $H \frac{\text{Cr}}{1 \text{ кг}}$ № 8, $B \frac{\text{Cr}}{1 \text{ кг}}$ № 15 и Гор $\frac{\text{CuSn}}{1 \text{ кг}}$ № 12. Последняя из них, Гор $\frac{\text{CuSn}}{1 \text{ кг}}$ № 12, является временной.

До 1956 г. масса эталона-копии $R_1 \frac{\text{PtIr}}{1 \text{ кг}}$ определялась на основании многократных прямых сличений этой копии с первичным эталоном.

Если такую методику применить для определения массы пяти эталонов-копий, то первичный эталон должен применяться в 140—160 взвешиваниях. Это недопустимо, так как первичный эталон подвержен износу даже при самом тщательном и осторожном его применении. Поэтому возникла необходимость в разработке новой методики сличений эталонов-копий, при которой первичный эталон применялся бы минимальное число раз. Выход был найден в переходе от прямых к совокупным измерениям при сличениях эталонов-копий с первичным эталоном.

Учитывая специфические особенности эталонов единицы массы в смысле износа, было предложено проводить неполные круговые сличения эталонов-копий с первичным эталоном, а именно, сличать с последним только две копии, производить сличения всех копий между собой во всех возможных комбинациях и на основании этих сличений методом наименьших квадратов определять массу каждой из копий.

* В дальнейшем для краткости будет именоваться «первичный эталон».

В конце 1958 г. автором совместно с В. Л. Каном были выведены все расчетные формулы для обработки результатов сличений, а в 1959 г. новая методика была внедрена при сличениях эталонов-копий с первичным эталоном.

Ниже приведены кратко вывод расчетных формул и обработка результатов сличений.

Изложенная в статье методика совокупных измерений разработана применительно к конкретному случаю сличений эталонов единицы массы. Однако при некоторых изменениях выведенными формулами для нахождения искоемых значений неизвестных и формулами для оценки точности этих неизвестных можно воспользоваться при калибровках не только гирь, но и других мер.

Расчетные формулы для обработки результатов сличений эталонов-копий с первичным эталоном

При сличениях в качестве исходного эталона служит первичный эталон, поправка k_0 которого известна на основании сличений килограмма № 12 с международным прототипом.

Поверяемыми являются эталоны-копии $R_1 \frac{\text{PtIr}}{1 \text{ кг}}$, Н $\frac{\text{Ст.}}{1 \text{ кг}}$ № 8, В $\frac{\text{Ст.}}{1 \text{ кг}}$ № 6 и В $\frac{\text{Ст.}}{1 \text{ кг}}$ № 15, поправки которых x_1, x_2, x_3, x_4 необходимо определить на основании поверки.

Производятся следующие серии сличений (табл. 1).

Таблица 1

Порядковый номер сличения	Сличаемый эталон	Эталон-копия, с которым сличается	Разность поправок
1	№ 12	$R_1 \frac{\text{PtIr}}{1 \text{ кг}}$	$k_0 - x_1 = k_1$
2	№ 1	В $\frac{\text{Ст.}}{1 \text{ кг}}$ № 15	$k_0 - x_4 = k_2$
3	$R_1 \frac{\text{PtIr}}{1 \text{ кг}}$	Н $\frac{\text{Ст.}}{1 \text{ кг}}$ № 8	$x_1 - x_2 = k_3$
4	$R_1 \frac{\text{PtIr}}{1 \text{ кг}}$	В $\frac{\text{Ст.}}{1 \text{ кг}}$ № 6	$x_1 - x_3 = k_4$
5	$R_1 \frac{\text{PtIr}}{1 \text{ кг}}$	В $\frac{\text{Ст.}}{1 \text{ кг}}$ № 15	$x_1 - x_4 = k_5$
6	Н $\frac{\text{Ст.}}{1 \text{ кг}}$ № 8	В $\frac{\text{Ст.}}{1 \text{ кг}}$ № 6	$x_2 - x_3 = k_6$
7	Н $\frac{\text{Ст.}}{1 \text{ кг}}$ № 8	В $\frac{\text{Ст.}}{1 \text{ кг}}$ № 15	$x_2 - x_4 = k_7$
8	В $\frac{\text{Ст.}}{1 \text{ кг}}$ № 6	В $\frac{\text{Ст.}}{1 \text{ кг}}$ № 15	$x_3 - x_4 = k_8$

На основании сличений можно составить следующие условные уравнения: *

$$\left. \begin{array}{l} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = k_0 - k_1 \quad (P_1) \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = k_0 - k_2 \quad (P_2) \\ 1 \cdot x_1 + (-1) \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = k_3 \quad (P_2) \\ 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + (-1) \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = k_4 \quad (P_2) \\ 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + (-1) \cdot x_4 = k_5 \quad (P_2) \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + (-1) \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = k_6 \quad (P_1) \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + (-1) \cdot x_4 = k_7 \quad (P_1) \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + (-1) \cdot x_4 = k_8 \quad (P_1) \end{array} \right\} \cdot (1)-(8)$$

Веса условных уравнений можно определить на основании определенных средних квадратических погрешностей для каждой серии сличений. Однако более точно и правильно при определении весов условных уравнений использовать накопленный материал аналогичных опытов.

На основании многолетней работы с эталонами установлено, что σ в данном случае определяется тем, сличаются ли гири одинаковой или разной плотности.

Обработка результатов сличений эталонных гирь на весах показала, что как для сличений гирь разной плотности, так и одинаковой плотности распределение погрешностей взвешивания подчиняется нормальному закону.

При сличениях эталонов из различного материала $\sigma_2 = 0,032$ мг против $\sigma_1 = 0,019$ мг в случае сличений эталонов из одинакового материала (средние квадратические погрешности определены из 200 сличений).

Обозначим в уравнениях (1)–(8) веса условных уравнений при сличениях гирь одинакового объема через P_1 и веса условных уравнений при сличениях гирь, объемы которых значительно отличаются, — через P_2 . Тогда

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = 2,84.$$

Следовательно, можно принять $P_2 = 1$ и $P_1 = 3$.

Система условных уравнений (1)–(8) решается методом наименьших квадратов. Для решения применим метод матриц:

матрица коэффициентов нормальных уравнений

$$|B| = |A^* \cdot |P| \cdot |A| \quad (9)$$

и матрица свободных членов нормальных уравнений

$$|C| = |A^* \cdot |P| \cdot |c|. \quad (10)$$

В уравнениях (9) и (10) обозначено:

- $|A|$ — матрица коэффициентов условных уравнений;
- $|P|$ — матрица весов;
- $|c|$ — матрица правых частей условных уравнений;
- $|A^*|$ — транспонированная матрица $|A|$.

* Через P_i обозначен вес уравнения.

Из условных уравнений (1)–(8):

$$\|A\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad (11) \quad \|P\| = \begin{vmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_1 \end{vmatrix}, \quad (12)$$

$$\|c\| = \begin{vmatrix} k_0 - k_1 \\ k_0 - k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \\ k_6 \\ k_7 \\ k_8 \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Откуда матрица коэффициентов нормальных уравнений имеет вид:

$$\|B\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_2 \\ P_2 & -P_2 & 0 & 0 \\ P_2 & 0 & -P_2 & 0 \\ P_2 & 0 & 0 & -P_2 \\ 0 & P_1 & -P_1 & 0 \\ 0 & P_1 & 0 & -P_1 \\ 0 & 0 & P_1 & -P_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} P_1 + 3P_2 & -P_2 & -P_2 & -P_2 \\ -P_2 & P_2 + 2P_1 & -P_1 & -P_1 \\ -P_2 & -P_1 & 2P_1 + P_2 & -P_1 \\ -P_2 & -P_1 & -P_1 & 2P_2 + 2P_1 \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Матрица свободных членов нормальных уравнений:

$$\|C\| = \begin{vmatrix} P_1 & 0 & P_2 & P_2 & P_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P_2 & 0 & 0 & P_1 & P_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P_2 & 0 & -P_1 & 0 & P_1 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 & -P_2 & 0 & -P_1 & -P_1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} k_0 - k_1 \\ k_0 - k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \\ k_6 \\ k_7 \\ k_8 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} P_1(k_0 - k_1) + P_2(k_3 + k_4 + k_5) \\ P_1(k_6 + k_7) - P_2k_3 \\ P_1(k_8 - k_6) - P_2k_4 \\ P_2(k_0 - k_2 - k_3) - P_1(k_7 + k_8) \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Решение системы нормальных уравнений (14) и (15) имеет вид:

$$|x| = |B|^{-1} \cdot |C|, \quad (16)$$

где $|B|^{-1}$ — «обращенная» матрица $|B|$.

Элементы матрицы $|B|^{-1}$ получаются по формуле

$$b_{ik}^{(-1)} = \frac{B_{ki}}{|B|}, \quad (17)$$

где $|B|$ — детерминант матрицы $|B|$;

B_{ki} — алгебраические дополнения матрицы $|B|$.

Детерминант матрицы $|B|$ вычисляется по формуле

$$|B| = \sum_{k=1}^4 b_{ik} B_{ik}, \quad (18)$$

где b_{ik} — элементы матрицы $|B|$;

B_{ik} — элементы матрицы алгебраических дополнений.

Алгебраические дополнения вычисляются по формуле

$$B_{ki} = (-1)^{k+i} |B|_{ik}, \quad (19)$$

где $|B|_{ik}$ — миноры матрицы $|B|$.

Вычислив по формулам (18) и (19) детерминант матрицы $|B|$ и алгебраические дополнения матрицы $|B|$, по формуле (17) определяем матрицу $|B|^{-1}$:

$$|B|^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2(2P_1 + P_2)}{(4P_1 + P_2)(P_1 + P_2)} & \frac{3P_1 + 2P_2}{(4P_1 + P_2)(P_1 + P_2)} \\ \frac{3P_1 + 2P_2}{(4P_1 + P_2)(P_1 + P_2)} & \frac{(4P_1^2 + 11P_1P_2 + 3P_2^2)(P_1 + P_2) - P_1^3}{P_2(3P_1 + P_2)(4P_1 + P_2)(P_1 + P_2)} \\ \frac{3P_1 + 2P_2}{(4P_1 + P_2)(P_1 + P_2)} & \frac{(3P_1 + 2P_2)(P_1^2 + 3P_1P_2 + P_2^2)}{P_2(3P_1 + P_2)(4P_1 + P_2)(P_1 + P_2)} \\ \frac{3P_1 + P_2}{(4P_1 + P_2)(P_1 + P_2)} & \frac{P_1^2 + 3P_1P_2 + P_2^2}{P_2(4P_1 + P_2)(P_1 + P_2)} \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3P_1 + 2P_2}{(4P_1 + P_2)(P_1 + P_2)} & \frac{3P_1 + P_2}{(4P_1 + P_2)(P_1 + P_2)} \\ \frac{(3P_1 + 2P_2)(P_1^2 + 3P_1P_2 + P_2^2)}{P_2(3P_1 + P_2)(4P_1 + P_2)(P_1 + P_2)} & \frac{P_1^2 + 3P_1P_2 + P_2^2}{P_2(4P_1 + P_2)(P_1 + P_2)} \\ \frac{(4P_1^2 + 11P_1P_2 + 3P_2^2)(P_1 + P_2) - P_1^3}{P_2(3P_1 + P_2)(4P_1 + P_2)(P_1 + P_2)} & \frac{P_1^2 + 3P_1P_2 + P_2^2}{P_2(4P_1 + P_2)(P_1 + P_2)} \\ \frac{P_1^2 + 3P_1P_2 + P_2^2}{P_2(4P_1 + P_2)(P_1 + P_2)} & \frac{P_1^2 + 4P_1P_2 + P_2^2}{P_2(4P_1 + P_2)(P_1 + P_2)} \end{pmatrix} \quad (20)$$

Элементы матрицы $|B|^{-1}$ зависят только от весов P_1 и P_2 и не зависят от свободных членов условных уравнений, следовательно, для всех сличений эту матрицу можно вычислить один раз.

Искомые значения поправок эталонов-копий рассчитываются по формулам

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= b_{11}^{(-1)}C_1 + b_{12}^{(-1)}C_2 + b_{13}^{(-1)}C_3 + b_{14}^{(-1)}C_4 \\ x_2 &= b_{21}^{(-1)}C_1 + b_{22}^{(-1)}C_2 + b_{23}^{(-1)}C_3 + b_{24}^{(-1)}C_4 \\ x_3 &= b_{31}^{(-1)}C_1 + b_{32}^{(-1)}C_2 + b_{33}^{(-1)}C_3 + b_{34}^{(-1)}C_4 \\ x_4 &= b_{41}^{(-1)}C_1 + b_{42}^{(-1)}C_2 + b_{43}^{(-1)}C_3 + b_{44}^{(-1)}C_4 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где $b_{ik}^{(-1)}$ — элементы матрицы $[B]^{-1}$, определяемой формулой (20); C_1, C_2, C_3 и C_4 — определяются формулой (15).

Средняя квадратическая погрешность условных уравнений определяется равенством

$$\sigma_4 = \sqrt{\frac{\sum P_i \sigma_i^2}{n-m}}, \quad (22)$$

где m — число неизвестных;
 n — число условных уравнений;
 $n-m$ — число степеней свободы.

В формуле (22):

$$n-m = 8-4 = 4;$$

$$\sum P_i \sigma_i^2 = S^2 = P_1(x_1 - k_0 + k_1)^2 + P_2(x_4 - k_0 + k_2)^2 + P_2(x_1 - x_2 - k_3)^2 + P_2(x_1 - x_3 - k_4)^2 + P_2(x_1 - x_4 - k_5)^2 + P_1(x_2 - x_3 - k_6)^2 + P_1(x_2 - x_4 - k_7)^2 + P_1(x_3 - x_4 - k_8)^2. \quad (23)$$

(21) Введем

$$\sigma_1^2 P_1 = \sigma_2^2 P_2 = \sigma_0^2. \quad (24)$$

Отношение σ_4^2 к σ_0^2 характеризует «согласованность» результатов (критерий Барджа). Обычно пользуются величиной $\chi^2 = \frac{S^2}{\sigma_0^2}$ (критерий Пирсона).

Для четырех степеней свободы этот критерий должен быть не больше 9,5 при 5%-ных доверительных пределах.

Средние квадратические погрешности результатов $S_{x_1}, S_{x_2}, S_{x_3}$ и S_{x_4} определяются формулами

$$S_{x_1} = \frac{\sigma_4}{\sqrt{P_{x_1}}}; \quad S_{x_2} = \frac{\sigma_4}{\sqrt{P_{x_2}}}; \quad S_{x_3} = \frac{\sigma_4}{\sqrt{P_{x_3}}}; \quad S_{x_4} = \frac{\sigma_4}{\sqrt{P_{x_4}}}. \quad (25)$$

где $P_{x_1}, P_{x_2}, P_{x_3}$ и P_{x_4} — веса неизвестных, определяемые из формул

$$\frac{1}{P_{x_1}} = b_{11}^{(-1)}; \quad \frac{1}{P_{x_2}} = b_{22}^{(-1)}; \quad \frac{1}{P_{x_3}} = b_{33}^{(-1)}; \quad \frac{1}{P_{x_4}} = b_{44}^{(-1)}. \quad (26)$$

По изложенным выше причинам можно принять $P_1 = 3, P_2 = 1$. Подставив $P_1 = 3$ и $P_2 = 1$ в формулы (15), (20), (21) и (26), получим после приведения подобных членов:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{52} (52k_0 - 42k_1 - 10k_2 + 3k_3 + 3k_4 + 4k_5 + 3k_7 + 3k_8); \\ x_2 &= \frac{1}{520} (520k_0 - 330k_1 - 190k_2 - 151k_3 - 99k_4 - 80k_5 + \\ &\quad + 156k_6 + 213k_7 + 57k_8); \\ x_3 &= \frac{1}{520} (520k_0 - 330k_1 - 190k_2 - 99k_3 - 151k_4 - 80k_5 - \\ &\quad - 156k_6 + 57k_7 + 213k_8); \\ x_4 &= \frac{1}{52} (52k_0 - 30k_1 - 22k_2 - 9k_3 - 9k_4 - 12k_5 - 9k_7 - 9k_8) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\frac{1}{P_{x_1}} = \frac{7}{26}; \quad \frac{1}{P_{x_2}} = \frac{261}{520}; \quad \frac{1}{P_{x_3}} = \frac{261}{520}; \quad \frac{1}{P_{x_4}} = \frac{11}{26}. \quad (28)$$

Величины $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7$ и k_8 определяются непосредственно из сличений, поправка k_0 первичного эталона известна.

Поправки x_1, x_2, x_3 и x_4 эталонов-копий рассчитываются по формулам (27), а точность определения поправок подсчитывается по формулам (25), принимая во внимание (22), (23) и (28).

Проведение и обработка результатов сличений эталонов-копий с первичным эталоном

В 1959 г. Н. М. Рудо, М. И. Тютиковой и автором были проведены сличения эталонов-копий с первичным эталоном по изложенной выше новой методике.

Взвешивания производились на метрологических весах грузоподъемностью 1 кг фирмы Рупрехта в течение всего 1959 г.

В результате взвешиваний были получены следующие значения для свободных членов условных уравнений: $k_1 = +3,203$ мг, $k_2 = -3,760$ мг,

$k_3 = -6,860$ мг, $k_4 = -6,592$ мг,

$k_5 = -6,936$ мг, $k_6 = +0,284$ мг,

$k_7 = -0,095$ мг, $k_8 = -0,372$ мг.

Каждое значение k_i получено как среднее из 5—10 взвешиваний. Поправка k_0 первичного эталона СИЛОГРАММА №12 равна +0,085 мг.

Подставив полученные значения k_i и $P_1 = 3, P_2 = 1$ в формулы (22), (23), (25)—(27), получили значения массы эталонов-копий с соответствующими средними квадратическими погрешностями результата (табл. 2).

Для обнаружения в измерениях систематических погрешностей воспользуемся критерием Пирсона. Вычисленные значения χ^2 для всех восьми условных уравнений лежат в пределах 0,3—5,7.

Таким образом, можно предполагать, что больших по величине систематических погрешностей в измерениях нет.

Пониженные значения χ^2 для некоторых условных уравнений вызваны либо грубым округлением полученных на основании сличений свободных членов условных уравнений k_i , либо наличием в измерениях систематических погрешностей, примерно соизмеримых со случайными погрешностями.

Значения k_i вычислялись до тысячных долей миллиграмма. Так как средние квадратические погрешности результатов (поправок) получились равными 0,006—0,008 мг, то такое округление k_i следует считать грубым.

При следующих сличениях эталонов-копий необходимо k_i подсчитывать до десятитысячных долей миллиграмма.

Можно также предполагать следующие источники незначительных по величине систематических погрешностей:

- 1) изменение массы эталонов из нержавеющей стали в процессе сличений, вызванное износом;
- 2) изменение массы эталонов из-за несовершенства очистки их поверхности перед сличениями;
- 3) изменение массы эталонов из-за изменения адсорбированной пленки влаги на поверхности эталонов в процессе сличений;

Таблица 2

Эталон-копия	Масса, г
$R_1 \frac{P11r}{1 \text{ кг}}$	$999,996884 \pm 0,0000062$
$H \frac{Ст. \text{ № 8}}{1 \text{ кг}}$	$1000,003746 \pm 0,0000084$
$B \frac{Ст. \text{ № 6}}{1 \text{ кг}}$	$1000,003466 \pm 0,0000084$
$B \frac{Ст. \text{ № 15}}{1 \text{ кг}}$	$1000,003838 \pm 0,0000077$

4) неправильность вводимой в результат измерения поправки на аэростатическую силу из-за изменения плотности воздуха в процессе сличений (эта поправка рассчитывается по значению плотности воздуха, определенному в конце сличения.)

Влияние первого предполагаемого источника систематических погрешностей можно проверить изложенным ниже способом.

Эталон-копия $V \frac{C_T}{1 \text{ кг}}$ № 15 после всех сличений, в которых он применялся, был сличен с первичным эталоном — с килограммом № 12.

Если бы эталон $V \frac{C_T}{1 \text{ кг}}$ № 15 изнашивался в процессе сличений, то значение массы его, рассчитанное только на основании сличений его с килограммом № 12, должно быть меньше значения массы, рассчитанного на основании всех сличений. В действительности же получили значение массы эталона $V \frac{C_T}{1 \text{ кг}}$ № 15 только по сличениям его с эталоном № 12 равным $1000,003845 \pm 0,000013 \text{ г}$ против значения массы $1000,003839 \pm 0,000006 \text{ г}$, полученного из всех сличений.

Следовательно, износ гири $V \frac{C_T}{1 \text{ кг}}$ № 15 в процессе сличений если и имеет место, то он лежит за пределами погрешностей измерения. Об этом же говорит опыт работы с рабочими эталонами единицы массы, изготовленными также из нержавеющей стали.

Ежегодная поверка этих гирь показывает, что они то увеличивают, то уменьшают свою массу, т. е. на эти гири наряду с износом действуют и другие факторы, вызывающие иногда увеличение массы. Возможно, увеличение массы вызывается несовершенством очистки поверхности эталонов перед сличением.

По нашему мнению, причиной небольших систематических погрешностей в результатах измерений является изменение плотности воздуха во время сличения, вызываемое неучитываемые изменения аэростатической силы, а также изменение адсорбированной пленки влаги на поверхности эталонов из-за изменения влажности воздуха. Последнее особенно существенно для эталонов-копий из нержавеющей стали, поверхность которых недостаточно отполирована.

Для уменьшения вероятности появления систематических погрешностей по этим причинам необходимо при следующей поверке эталонов-копий определять плотность воздуха до начала сличения и в конце сличения, а поправку на аэростатическую силу рассчитывать, беря среднее значение плотности воздуха.

Некоторые изменения в пользовании эталонами-копиями

В настоящее время имеются пять копий первичного эталона единицы массы. Одна из копий изготовлена, так же как и первичный эталон и международный прототип килограмма, из сплава платино-иридия, три копии изготовлены из нержавеющей стали марки 1X18H9T и одна копия — из бронзы. Все рабочие эталоны единицы массы изготовлены из нержавеющей стали.

При сличениях рабочих эталонов точность определяют погрешности, вносимые методом сличения, т. е. взвешиванием; погрешность исходной меры при этом незначительна.

В результате многолетнего опыта установлено, что при сличениях рабочих эталонов из нержавеющей стали с копиями, изготовленными также из нержавеющей стали, погрешность, вносимая методом сличения,

значительно меньше погрешности сличений рабочих эталонов с копией, изготовленной из сплава платино-иридия.

При сличениях рабочих эталонов с копиями из нержавеющей стали среднее квадратическое отклонение σ результатов отдельных сличений от среднего не превышает 0,019 мг, обычно даже несколько меньше этой величины, а при сличениях рабочих эталонов с копией из сплава платино-иридия σ составляет 0,032 мг, т. е. в $1\frac{1}{2}$ раза превышает σ для предыдущего случая. Это объясняется значительным влиянием аэростатической силы на результат взвешивания при сличениях гирь разного объема. Кроме того, температурные изменения и изменение влажности воздуха при сличениях гирь из одинакового материала сказываются на результате сличений значительно меньше, чем при сличениях гирь из разного материала.

Несомненно также, что стабильность массы копий из нержавеющей стали меньше стабильности массы копии из платино-иридия.

Исходя из этих положений, решено разделить копии первичного эталона на две категории: в первую категорию входит копия, изготовленная из сплава платино-иридия — $R_1 \frac{\text{PtIr}}{1 \text{ кг}}$, и во вторую категорию — копии, изготовленные из нержавеющей стали: В $\frac{\text{Ст.}}{1 \text{ кг}}$ № 6; В $\frac{\text{Ст.}}{1 \text{ кг}}$ № 15 и Н $\frac{\text{Ст.}}{1 \text{ кг}}$ № 8.

Копию из бронзы Гор $\frac{\text{CuSn}}{1 \text{ кг}}$ № 12, по нашему мнению, следует исключить из числа копий, как не обладающую достаточной стабильностью массы, тем более что в настоящее время уже не имеется рабочих эталонов, изготовленных из бронзы.

Копия $R_1 \frac{\text{PtIr}}{1 \text{ кг}}$ не будет использоваться для поверки рабочих эталонов.

Для этой цели будет служить вторая категория копий — гири В $\frac{\text{Ст.}}{1 \text{ кг}}$ № 6, В $\frac{\text{Ст.}}{1 \text{ кг}}$ № 15 и Н $\frac{\text{Ст.}}{1 \text{ кг}}$ № 8.

Все копии один раз в 15—20 лет будут сличаться по изложенной выше методике с первичным эталоном.

Для контроля возможных изменений массы копий В $\frac{\text{Ст.}}{1 \text{ кг}}$ № 6, В $\frac{\text{Ст.}}{1 \text{ кг}}$ № 15 и Н $\frac{\text{Ст.}}{1 \text{ кг}}$ № 8 в промежуток времени между сличениями их с первичным эталоном будет использована копия $R_1 \frac{\text{PtIr}}{1 \text{ кг}}$. Это можно сделать с полным основанием, так как копия $R_1 \frac{\text{PtIr}}{1 \text{ кг}}$ не будет применяться для проверок, она хорошо изучена, изготовлена из сплава платино-иридия, как и международный прототип и национальные прототипы килограмма, и за 83 года своего существования показала хорошую стабильность массы.

Если при очередном контроле окажется, что изменение массы одной из копий превышает допустимую величину, то эта копия в дальнейшем не должна применяться для поверки рабочих эталонов до сличения копий с первичным эталоном.

Заключение

Разработана новая методика сличений эталонов-копий единицы массы, заключающаяся в неполных круговых сличениях эталонов-копий с первичным эталоном.

Выведены формулы для расчета поправок эталонов-копий из результатов отдельных сличений, а также формулы для оценки точности этих поправок.

Благодаря применению метода матриц для решения условных уравнений различного достоинства, составленных на основании отдельных сличений, формулы для оценки точности поправок получились простыми.

Внесены предложения об изменении порядка и сроков сличений эталонов.

Достоинства перечисленных изменений в поверке и применении эталонов-копий заключаются в значительном увеличении сохранности первичного эталона, который будет применяться для сличений один раз в 15—20 лет вместо одного раза в 5 лет, как это имело место в послевоенные годы. При этом первичный эталон будет сличаться только с двумя эталонами-копиями вместо четырех.

Новая методика поверки эталонов-копий позволяет использовать для обнаружения систематических погрешностей критерий Пирсона применительно к совокупным измерениям различного достоинства, благодаря чему повышается точность и достоверность результатов поверки.

Новая методика поверки эталонов-копий внедрена при сличениях их с первичным эталоном в 1959 г.

Поступила в редакцию
16/1 1961 г.

К. П. ШИРОКОВ

ВНИИМ

О ПРОЕКТЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ВНИИМ «ОСНОВНЫЕ МЕТРОЛОГИЧЕСКИЕ ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ»

В течение последних трех лет велась работа по составлению рекомендации ВНИИМ взамен ГОСТ 3951—47 «Основные метрологические термины и определения». В статье приводится проект этой рекомендации и излагаются основные соображения, принятые во внимание при ее составлении.

Вопрос установления единообразной и правильной терминологии привлекает большое внимание во всех государствах. С этой целью составляются терминологические стандарты или словари по отдельным отраслям науки и техники, выпускаемые как для пользования в пределах отдельных государств, так и для облегчения международных сношений.

Большой вклад в упорядочение русской метрологической терминологии внес заслуженный деятель науки и техники проф. М. Ф. Маликов. Им составлено два советских стандарта по метрологическим терминам [1, 2], в более развернутом виде терминология нашла отражение в его трудах, в частности в монографии «Точные измерения» (1935) и в капитальном курсе «Основы метрологии» (1949) [3, 4]. На этих работах, а также на курсах по отдельным отраслям измерительной техники было воспитано современное поколение советских метрологов. Эти труды были положены в основу многочисленных нормативных документов, которыми пользуется широкий круг лиц, имеющих дело с точными измерениями и с обеспечением единства измерений в нашей стране.

Однако ГОСТ 3951—47 в настоящее время уже перестал удовлетворять потребности, так как он охватывал, по существу, только рабочие меры и измерительные приборы и не касался более общих метрологических понятий, к которым относятся, например, измерения, единицы измерения, эталоны, погрешности измерений и др. Поэтому в течение последних лет во Всесоюзном научно-исследовательском институте метрологии им. Д. И. Менделеева (ВНИИМ) проводилась подготовка нового документа взамен ГОСТ 3951—47. В этой работе вначале принимали участие проф. М. Ф. Маликов и канд. физ.-мат. наук Г. Д. Кокош, а затем она была продолжена сотрудниками метрологического отдела ВНИИМ под руководством канд. техн. наук К. П. Широкова и при частичном участии канд. техн. наук Н. М. Рудо.

Вначале этот документ готовили как проект ГОСТ взамен ГОСТ 3951—47, а затем как рекомендацию ВНИИМ по основным метрологическим терминам и определениям. В последнее время были составлены одна за другой три редакции рекомендации, на которые были получены отзывы от 90 научно-исследовательских институтов, вузов, ОКБ и крупных промышленных предприятий. Общее число замечаний, касающихся конкретных формулировок терминов и определений, приближается к 1400.

Все полученные замечания можно разделить на общие и частные. В общих замечаниях обсуждаются вопросы, наиболее существенными из которых являются:

а) какой документ следует издать — ГОСТ или рекомендацию ВНИИМ;

б) какие группы понятий следует отнести к основным для метрологии и, следовательно, надлежит включить в документ;

в) какой выбрать принцип расположения разделов и понятий в разделах.

Частные замечания относятся к конкретным формулировкам терминов и определений. Ниже приводятся лишь наиболее существенные соображения, принятые во внимание при редактировании публикуемого текста рекомендации.

По вопросу о виде издаваемого документа только одна организация из 33, приславших отзывы на последнюю редакцию проекта, высказалась в пользу издания ГОСТ, 11 организаций высказались за издание рекомендации ВНИИМ. Эту же позицию занял Ученый совет ВНИИМ, и с ним согласился Комитет стандартов, мер и измерительных приборов, отменивший прежний ГОСТ 3951—47 без замены. Таким образом, этот вопрос решился однозначно.

Наибольшая противоречивость во мнениях наблюдается по вопросу об отборе терминов, подлежащих включению в рекомендацию. Часть рецензентов высказалась за резкое сокращение списка и оставление в нем только терминов, относящихся в основном к единицам измерения, эталонам и погрешностям, приводя тот мотив, что сведения о рабочих измерительных приборах относятся к измерительной технике и не принадлежат к основным метрологическим понятиям. В некоторых отзывах предполагалось также изъять некоторые общеизвестные, общепринятые или трудно определяемые термины. В других отзывах, наоборот, предлагалось дополнить список терминами, встречающимися в стандартах или инструкциях Комитета, характеризующими конструкцию измерительных приборов и представляющими наименования погрешностей в зависимости от их происхождения, например: погрешность поверки; погрешность отсчета; суммарная погрешность; динамическая погрешность и т. д. Совершенно очевидно, что на этот путь становиться нельзя, так как все эти оттенки понятий либо относятся к конкретным узким отраслям измерительной техники, либо не являются основными обобщающими понятиями метрологии.

Число окончательно отобранных терминов составило 108. По сравнению с редакцией 1959 г., в которой было 138 терминов, произведено сокращение отчасти за счет помещения некоторых разновидностей понятий в примечания к определениям (например, абсолютная, относительная и приведенная погрешности являются разновидностями общего понятия «погрешность» и помещены в примечания к определениям соответствующих терминов; разновидности приборов, получившие наименования по дополнительной функции, выполняемой ими, например: регулирующий прибор, сигнализирующий прибор и т. д., помещены в примечания к определению более общего термина — измерительный прибор). По сравнению же с ГОСТ 3951—47 список терминов значительно пополнен и в него вновь включены целые разделы, являющиеся для метрологии основными (в част-

ности, общие понятия; виды и методы измерений; единицы измерений; эталоны; погрешности измерений; общие свойства мер и измерительных приборов). Из области средств измерений включены основные виды мер и измерительных приборов, основные понятия, относящиеся к отсчету показаний, номинальным и действительным значениям, а также к погрешностям мер и измерительных приборов. Включены также термины для общих элементов приборов, соответствующие современным взглядам на измерительный прибор как устройство, состоящее из преобразователей и измерительного механизма. Вместе с тем некоторые непривившиеся понятия, а также термины, относящиеся к охватываемой приборами области значений, исключены из списка. К ним относятся, например, термины: условная мера; лабораторные и технические меры и приборы; измерительный автомат; нуль шкалы; начало шкалы; конец шкалы; пределы показаний; область показаний; рабочая часть шкалы; область перегрузки; емкость счетного механизма; диаграмма и некоторые другие. Исключены термины, имеющие общетехническое значение и не относящиеся к собственно метрологии, например: испытание мер и измерительных приборов; температурная формула; температурный коэффициент. После большой дискуссии исключен термин «калибр», поскольку он имеет значение только для области линейно-угловых измерений и не является общеметрологическим.

Руководящим принципом при отборе терминов являлось построение системы терминов, отражающей классификационные схемы понятий [5]. С этой позиции было бы неправильно отбрасывать термины только по причине их менее частого применения или, наоборот, как привычные и имеющие широкое распространение. Включая в список ту или иную группу понятий, необходимо поместить все понятия, образующие группу, если даже некоторые из них редко встречаются или, наоборот, воспринимаются как понятные без объяснений. Если эти объяснения не нужны специалистам, они несомненно сыграют положительную роль при обучении новых кадров. Следует также иметь в виду, что в разных областях измерений сложилась неединообразная терминология, и помещение в список даже очевидных понятий будет способствовать унификации терминов и устранению их многозначности.

Выбор формулировок терминов производился путем сопоставления терминологии, помещенной в капитальных работах по метрологии [4, 6] и в курсах по отдельным отраслям измерительной техники. Были также привлечены стандарты СССР, энциклопедии, толковые словари и иностранные источники [7—12]. Подавляющее большинство выбранных терминов совпадает с принятыми в курсе М. Ф. Маликова [4] и нашедшими широкое применение в литературе по измерительной технике. Однако развитие измерительной техники вызвало необходимость ввести новые термины (например, относящиеся к преобразователям), а также уточнить некоторые термины и придать им большую строгость (например, термины, относящиеся к погрешностям, которые приближены к применяемым в математической статистике).

Несколько слов о расположении разделов и о порядке следования терминов. В разделе «Общие понятия» помещены термины, характеризующие измерение и его элементы: измерение, измеряемая величина, единица измерения, средства измерения и метод измерения. Эти понятия открывают последующие разделы терминологии, за исключением понятия «измеряемая величина», разновидности которого в различных областях измерений различны.

Кроме этих разделов, имеются разделы: «Эталоны; образцовые и рабочие меры и измерительные приборы»; «Отсчет показаний, номинальные

и действительные значения»; «Погрешности измерений»; «Погрешности мер и измерительных приборов»; «Метрологические операции»; «Общие свойства мер и измерительных приборов». Как видно из этого перечня, в данную рекомендацию включены термины, необходимые для метрологической оценки измерений и применяемых для этой цели технических средств. Термины, относящиеся к принципу действия, а также к конструктивным особенностям средств измерения, естественно, должны найти себе место в терминологиях по отдельным отраслям измерительной техники и приборостроения и в данную терминологию не включены.

Расположение терминов внутри разделов следует соответствующим классификационным схемам. Вначале располагаются термины, отражающие главные понятия данной схемы, затем по очереди — группы понятий, являющиеся разновидностями главных, и т. д. Термины следуют в соответствии с рядами классификационной схемы: сначала термины верхнего ряда, затем следующего, и т. д. При этом облегчается сопоставление отличительных признаков понятий.

Задача редактирования определений понятий, сложная сама по себе, в области метрологии затрудняется в еще большей степени, так как метрология объединяет различные отрасли, имеющие дело со своеобразными методами и средствами измерения. Подобрать определения для общих метрологических понятий, одинаково удовлетворяющие специалистов по различным отраслям измерений, порою очень трудно.

Определения терминов составлялись по общему правилу: в качестве исходного включалось родовое понятие, а затем вводился отличительный признак определяемого понятия. Для придания определениям большей конкретности многие из них снабжены примерами, а в ряде случаев в примечаниях даны дополнительные пояснения.

Приведу вкратце соображения, принятые во внимание при внесении изменений в определения некоторых наиболее важных терминов.

В основу определения понятия *измерение* обычно ставится сравнение данной величины со значением той же величины, принятым за единицу. Однако это определение относится лишь к прямому измерению (см. ниже термин *б*), косвенное же и совокупные измерения (термины *7* и *8*) уже выходят за его рамки, так как в них, кроме сравнений, производятся еще и другие операции. Кроме того, даже некоторые простые случаи измерений не основаны на сравнении, например при измерении электрической энергии электрическим счетчиком или общего расхода воды водосчетчиком не производят сравнения измеряемой величины с ее единицей. Счетчик производит математические операции, выходящие за пределы этого понятия.

В известных литературных источниках определения *единицы измерения* по существу не дается, так как это понятие определяется обычно как значение величины, принятое за единицу (например [4, 6]). В данной терминологии сделана попытка выйти из этого порочного круга.

Поскольку в определении измерения входят понятия об измеряемой величине, средствах измерения и единице измерения, очевидно, что в определении этих понятий не должен входить термин «измерение».

В качестве признака различия между прямым измерением и косвенным измерением указано использование физических уравнений, связывающих данную величину с другими величинами: прямое измерение производится без использования этих уравнений, в косвенном — оно необходимо. В совокупных измерениях используется не одно, а несколько уравнений, т. е. система уравнений.

Обычно *система единиц* определялась как совокупность основных и производных единиц. Однако невозможно дать определение понятия

«основные единицы», не пользуясь понятием «система единиц», следовательно, последнюю нужно определять независимо, что и сделано в предлагаемой терминологии (термин 16).

Трудным для определения является также понятие **измерительный прибор** (23), хотя оно, казалось бы, является довольно очевидным. Однако в строгом определении необходимо дать его отличие от **меры** (22), наряду с которой он образует средства измерений. Если мера воспроизводит значения измеряемой величины, так сказать, «выдает» их, то прибор сам создавать эти значения не может, он только воспринимает существующую вне его физическую величину и преобразует ее в показания. В соответствии с этим в основу определения измерительного прибора положено преобразование величин, чего до настоящего времени не делалось.

Изменено по сравнению с ГОСТ 3951—47, в соответствии с общепринятым в приборостроении пониманием, определение термина **показывающий прибор** определен как разновидность прибора непосредственной оценки (31). Второй разновидностью является **самопишущий прибор** (34).

Далее следует отметить выделение понятия **эталон** (42) как самостоятельного, т. е. не входящего в число образцовых мер и приборов. Тем самым устраняется имевшееся в ГОСТ 3951—47 противоречие, заключавшееся в том, что эталоны в поверочной схеме стоят выше образцовых мер, но в то же время считаются их разновидностью. Согласно определению по ГОСТ 3951—47 эталоны должны воспроизводить и хранить единицы с наивысшей (метрологической) точностью. В то же время известно, что существуют не только первичные, но и вторичные эталоны, в частности рабочие эталоны, точность которых заведомо ниже наивысшей достижимой. Таким образом, признак точности не позволяет четко выявить различие между эталонами и образцовыми мерами, в то время как признак различного назначения позволяет это сделать. Однако принятие тезиса о различном назначении эталонов и образцовых мер неизбежно требует разделения этих понятий как самостоятельных.

О термине **поверочная установка** (60). Часто применяемое название «образцовая установка» является неправильным, на что всегда указывал проф. М. Ф. Маликов, так как если меры и измерительные приборы могут быть образцовыми, т. е. служить образцами для сличения с ними поверяемых мер и приборов, то измерительная установка, представляющая сложный комплекс устройств, в том числе и вспомогательных, таким образом служить не может. Далее, если образцовые меры и измерительные приборы могут делиться на разряды, то установки на разряды никак делить нельзя, поскольку в одну и ту же установку могут входить меры и приборы различных разрядов и видов, и установки друг по другу не поверяются, а поверяются входящие в них меры и измерительные приборы.

В этой статье невозможно рассмотреть обоснования всех изменений, внесенных в определения. Вероятно, в этом и нет особой надобности, так как следует иметь в виду, что постоянное применение будут иметь лишь термины, определения же нужны лишь для указания, к каким понятиям относятся термины. Поэтому отличительные признаки, помещенные в определениях, могут иметь различную формулировку при том непременном условии, если они правильно отражают содержание данного понятия и его место в соответствующей классификационной схеме. Отсюда следует, что в учебных пособиях и при преподавании могут допускаться отклонения от предлагаемых формулировок, желательно, однако, чтобы не изменялись сами термины и их смысл.

Остановимся еще только на важном термине *точность измерения* (78), в понимании которого, к сожалению, нет единообразия. Обычное и очевидное значение, применяемое в подавляющем большинстве случаев как в специальной, так и в популярной литературе, имеет в виду степень приближения результата измерения к верному (истинному) значению. Точность в этом смысле означает малые погрешности, как систематические, так и случайные. В этом же смысле понимается точность (*accuracy, précision*) в английском и французском терминологических стандартах [7, 8]. Значительно меньший круг лиц понимает под точностью степень воспроизводимости результатов измерений, т. е. под точным понимается измерение, содержащее малые случайные погрешности. В публикуемой ниже терминологии определение точности дано в соответствии с первым пониманием. Оно оставляет возможность применять термины «правильность измерений» и «воспроизводимость измерений», выражающие первый — малые систематические погрешности и второй — малые случайные погрешности.

Дополнительным преимуществом является и достигаемое при этом сближение смысла понятия «точность измерений» со значением терминов «точность меры» и «точность измерительного прибора», которые всегда понимались в указанном выше первом смысле (ср., например, термин «класс точности»).

Последняя редакция терминологии, составленная с учетом полученных отзывов, была подвергнута обсуждению на совещании руководящих работников ВНИИМ. На этом совещании была выделена комиссия в составе В. П. Зубрилина, П. П. Кремлевского, К. П. Широкова (председатель), Е. Г. Шрамкова и Б. М. Яновского для уточнения списка терминов, помещенных в документе в соответствии с пожеланиями, высказанными членами совещания. В помещаемой ниже терминологии учтены эти замечания, а также мнения членов комиссии.

Настоящая работа публикуется с целью доведения ее до сведения широких кругов специалистов и внесения возможных уточнений перед изданием ее в качестве рекомендации ВНИИМ.

Составители терминологии были бы благодарны за сообщение замечаний, которые следует направлять по адресу: Ленинград, Л-5, Московский просп., д. 19, ВНИИМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. ОСТ/ВКС 7636, Меры и измерительные приборы, Основные метрологические термины и определения; введен с 1/III 1935 г.
2. ГОСТ 3951—47, Меры и измерительные приборы, Основные метрологические термины и определения; утвержден 31/XII 1947 г.
3. Маликов М. Ф., Точные измерения, М.—Л., 1935.
4. Маликов М. Ф., Основы метрологии, М., 1949.
5. Терпигоров А. М. (ред.), Руководство по разработке и упорядочению научно-технической терминологии, Изд. АН СССР, 1952.
6. Тиходеев П. М., Очерки об исходных измерениях, М.—Л., 1954.
7. British standard 2643 : 1955, Glossary of terms relating to the performance of measuring instruments.
8. Norme française NF X 07-001, 1955, Instruments de mesure, Terminologie.
9. DIN 1319, Grundbegriffe der Meßtechnik, 1942.
10. P a d e l t E., Grundbegriffe der Meßtechnik, Mitteilungsblatt № 101 des DAMG, Berlin, 1958.
11. O b a l a s k i J., Normalizacja definicji własności metrologicznych narzędzi mierzniczych, «Pomiary, Automatyka, Kontrola», 1958, № 5—6.
12. Vocabulaire Electrotechnique International de la C. E. I., Publication 50(20) de la CEI, 2-e éd.

ПРОЕКТ

РЕДАКЦИЯ 1960 г.

ТЕРМИНОЛОГИЯ

Помещаемые ниже термины рекомендуются для применения в технических документах, периодических изданиях, монографиях, учебниках, справочниках и пособиях.

Термины сгруппированы по следующим разделам:

- I. Общие понятия.
- II. Виды и методы измерений.
- III. Единицы измерений.
- IV. Средства измерений.
- V. Эталоны; образцовые и рабочие меры и измерительные приборы.
- VI. Отсчет показаний, номинальные и действительные значения.
- VII. Погрешности измерений.
- VIII. Погрешности мер и измерительных приборов.
- IX. Метрологические операции.
- X. Общие свойства мер и измерительных приборов.

В графе «Термин» помещены основные термины, рекомендуемые для определяемого понятия, а также параллельные термины. Нерекомендуемые термины приведены в той же графе, но отмечены буквами «НрЮ».

В графе «Определение термина» приведены определения и примеры, а в некоторых более сложных случаях в примечаниях даны пояснения. Цифры в скобках означают порядковые номера, под которыми помещены упоминаемые в определениях термины.

№ пп.	Термин	Определение термина
1	Измерение Нрк. Замер	<p align="center">I. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ</p> <p>Действия, выполняемые с помощью средств измерений (4) и имеющие целью нахождение числового значения измеряемой величины (2), выраженного в принятых единицах измерения (3)</p>
2	Измеряемая величина	Характеристика физического тела, явления или процесса, подлежащая количественной оценке экспериментальным путем
3	Единица измерения	Значение величины, принятое за основание для количественной оценки величин того же рода
4	Средства измерения Измерительная аппаратура	Технические средства, предназначенные для осуществления опытов, имеющих целью количественную оценку измеряемых величин (2)
5	Метод измерения	Путь выполнения измерений (1), характеризуемый применяемыми средствами измерений (4) и приемами их использования
		<p align="center">II. ВИДЫ И МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ</p>
6	Прямое измерение	<p>Измерение (1), производимое с помощью мер (22) и (или) измерительных приборов (23), предназначенных для количественной оценки данной измеряемой величины (2), и не требующее нахождения искомого значения из уравнений, связывающих данную физическую величину с другими величинами.</p> <p>Примеры. Измерение массы на шиферблатных или равноплечих весах, температуры термометром, длины с помощью линейных мер</p>
7	Косвенное измерение	<p>Измерение (1), результат которого находят на основании прямых измерений (6) величин, связанных с измеряемой величиной (2) известным физическим уравнением.</p> <p>Примеры. Нахождение плотности тела по его массе и геометрическим размерам; определение удельного электрического сопротивления проводника по его сопротивлению, длине и площади поперечного сечения</p>
8	Совокупные измерения	<p>Измерения (1), в которых значения измеряемых величин (2) находят по данным прямых (6) или косвенных (7) измерений при различных сочетаниях этих величин (или при изменяющихся условиях измерения) путем решения получаемой при этом системы уравнений.</p> <p>Примеры. Нахождение массы отдельных гирь набора по известной массе одной из них и по результатам сравнения масс различных сочетаний гирь; нахождение электрического сопротивления при 20° С и значений температурных коэффициентов образцовой катушки по данным измерений ее сопротивления при различных температурах</p>
9	Абсолютные измерения	<p>Измерения (1), основанные на прямых измерениях (6) длины, массы и времени.</p> <p>Примеры. Измерение силы тока на токовых весах; измерение давления посредством грузопоршневого манометра по массе груза, площади поршня и ускорению силы тяжести</p>

№ пп.	Термин	Определение термина
10	Абсолютный метод измерения Метод непосредственной оценки	Метод измерения (5), заключающийся в оценке с помощью мер (22) и (или) измерительных приборов (23) всего значения измеряемой величины (2) в процессе данного эксперимента
11	Относительный метод измерения Разностный метод измерения	Метод измерения (5), основанный на сравнении измеряемой величины (2) с известным значением меры (22)
12	Метод противопоставления	Относительный метод измерения (11), основанный на сравнении двух значений измеряемой величины (2), наблюдаемых одновременно. Пример. Уравновешивание массы гирями, помещаемыми на другую чашку весов
13	Метод замещения	Относительный метод измерения (11), основанный на сравнении двух близких значений одной и той же величины, наблюдаемых поочередно. Пример. Взвешивание, при котором измеряемая масса и уравновешивающие ее гири помещаются поочередно на одну и ту же чашку весов
14	Нулевой метод измерения	Разновидность метода противопоставления (12), в которой разность двух сравниваемых значений измеряемой величины (2) приводится к нулю. Пример. Взвешивание с полным уравновешиванием весов
15	Метод совпадения	Разновидность метода противопоставления (12), в котором разность двух сравниваемых значений измеряемой величины измеряется путем наблюдения совпадения отметок или сигналов. Примеры. Измерение длины изделия штангенциркулем с нониусом; измерение скорости вращения с помощью стробоскопа
III. ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЙ		
16	Система единиц	Совокупность единиц измерения (3), охватывающая все или только некоторые области измерений (механические, электрические, тепловые, световые и другие измерения), образованная так, что соотношения между единицами (за исключением соотношений между единицами, выбранными независимо) определяются физическими уравнениями, в которых значения величин приняты равными единице. Примеры. Система метр — килограмм — секунда; система метр — килограмм-сила — секунда для механики (так называемая техническая система единиц)
17	Основная единица	Каждая из выбранных независимо единиц измерения (3), на которых построена данная система единиц (16). Пример. Для Международной системы единиц основными единицами являются метр, килограмм, секунда, ампер, градус Кельвина, свеча

№ пп.	Термин	Определение термина
18	Производная единица	<p>Единица измерения (3), определяемая физическим уравнением, в котором для всех величин приняты значения, равные единицам измерения.</p> <p>Примечание. Данное определение не исключает образования производных единиц, выраженных в других производных единицах или в кратных (20) и дольных (21) единицах.</p> <p>Примеры. Единица скорости движения — метр в секунду; единица плотности — килограмм на кубический метр; единица электродвижущей силы — вольт (определяемая уравнением связи между единицами напряжения, тока и мощности); единица электрической емкости — фарада (определяемая уравнением связи между единицами емкости, количества электричества и напряжения)</p>
19	Внесистемная единица	<p>Единица измерения (3), не входящая в какую-либо систему единиц ни в качестве основной (17), ни в качестве производной (18) единицы.</p> <p>Примеры. Литр, равный 1,000028 кубического дециметра; карат, равный 0,2 грамма; физическая атмосфера, равная 760 миллиметрам ртутного столба; техническая атмосфера, равная 1 килограмму-силе на квадратный сантиметр</p>
20	Кратная единица	<p>Единица измерения (3), равная целому числу основных (17) или производных (18) единиц.</p> <p>Примеры. Километр; мегом; декалитр</p>
21	Дольная единица	<p>Единица измерения (3), составляющая определенную долю основной (17) или производной (18) единицы.</p> <p>Примеры. Миллиметр; сантиграмм; пикофарада; наносекунда</p>
IV. СРЕДСТВА ИЗМЕРЕНИЙ		
22	Мера	<p>Тело или устройство, предназначенное для целей измерения (1) и служащее для воспроизведения одного или нескольких известных значений данной величины.</p> <p>Примеры. Гиря; катушка электрического сопротивления; температурная лампа; пьезокварцевый генератор</p>
23	Измерительный прибор Прк. Измерительный аппарат	<p>Устройство, предназначенное для целей измерения (1), в состав которого входят части, предназначенные для восприятия измеряемой величины (2) или одного из связанных с ней физических явлений и для преобразования их в показание (71)</p> <p>Примеры. Весы; амперметр; манометр; термометр; интерферометр.</p> <p>Примечание. Измерительный прибор может содержать также части, предназначенные для выполнения дополнительных действий, например регулирования, сигнализации, дозирования, сортировки, посылки кодированных сигналов и др.; в таких случаях наименования приборов образуются в соответствии с выполняемыми действиями, например регулирующий измерительный прибор, дозирующий измерительный прибор, сигнализирующий измерительный прибор и т. д.</p>

№ пп.	Термин	Определение термина
24	Измерительная принадлежность	<p>Устройство, предназначенное для целей измерения (1) и служащее для поддержания надлежащих значений измеряемых (2) или влияющих (94) величин или для повышения чувствительности измерительных приборов (107).</p> <p>Примеры. Усилитель; дула; термостат для проверки термометров</p>
25	Измерительная установка	<p>Совокупность мер (22), измерительных приборов (23), измерительных принадлежностей (24) и вспомогательных устройств, объединенных в одно целое общей схемой и методом, предназначенная для измерения одной или нескольких величин.</p> <p>Примеры. Установка для измерения удельного сопротивления электротехнических материалов; установка для испытания магнитных материалов</p>
26	Однозначная мера	<p>Мера (22), воспроизводящая одно определенное значение величины.</p> <p>Примеры. Гиря; плоскопараллельная концевая мера длины; измерительная колба; катушка электрического сопротивления; нормальный элемент; конденсатор постоянной емкости</p>
27	Многозначная мера	<p>Мера (22), воспроизводящая ряд значений величины между определенными пределами.</p> <p>Примеры. Линейка, разделенная на миллиметры; вариометр индуктивности; конденсатор переменной емкости</p>
28	Набор мер	<p>Совокупность мер (22), применяемых как по отдельности, так и в различных сочетаниях с целью воспроизведения ряда значений величины между определенными пределами.</p> <p>Примеры. Набор гирь; набор плоскопараллельных концевых мер длины; набор измерительных конденсаторов</p>
29	Магазин мер	<p>Набор мер (28), в котором меры объединены в одно конструктивное целое с устройством для включения их в различных сочетаниях.</p> <p>Примеры. Магазин сопротивления; магазин емкости; магазин индуктивности</p>
30	Компарировующий прибор Прибор сравнения	<p>Измерительный прибор (23), предназначенный для сравнения мер (22) друг с другом и для сравнения измеряемой величины (2) с мерой.</p> <p>Примеры. Компаратор для линейных мер; равноплечие весы; электроизмерительный компенсатор; фотометрическая скамья</p>
31	Прибор непосредственной оценки	<p>Измерительный прибор (23), предназначенный для измерения воздействующей на него величины без сравнения с мерой (22).</p> <p>Примеры. Амперметр; манометр; ртутный термометр</p>
32	Интегрирующий прибор	<p>Прибор непосредственной оценки (31), предназначенный для измерения интегрального (накопленного) значения величины.</p> <p>Примеры. Электрический счетчик; счетчик оборотов; водомер; планиметр</p>

№ пп.	Термин	Определение термина
33	Показывающий прибор	Измерительный прибор (23), отсчетное устройство (63) которого предусматривает только визуальное получение показаний (71). Примеры. Ртутный термометр; вольтметр; манометр
34	Самопишущий прибор	Измерительный прибор (23), отсчетное устройство (63) которого предусматривает запись его показаний (71) в виде диаграммы. Примеры. Самопишущий вольтметр; самопишущий манометр; барограф; термограф
35	Измерительный преобразователь	Часть измерительного прибора (23), служащая для преобразования физических величин, действующих в приборе
36	Измерительный механизм Измеритель	Часть измерительного прибора (23), служащая для измерения величин, создаваемой измерительным преобразователем (35)
37	Приемный преобразователь	Измерительный преобразователь (35), служащий для восприятия и преобразования измеряемой величины (2) в другую физическую величину. Примеры. Терморезистор, термосопротивление; сужающее устройство расходомера. Примечания: 1. Приемный преобразователь может быть одноступенчатым, в котором измеряемая величина претерпевает только одно преобразование (например, терморезистор, диафрагма), и многоступенчатым, в котором измеряемая величина претерпевает несколько преобразований (например, приемный преобразователь термохимического газоанализатора). 2. Приемный преобразователь в тех случаях, когда это не может вызвать недоразумений, может сокращенно называться приемником
38	Передающий преобразователь	Измерительный преобразователь (35), служащий для преобразования показаний измерительного механизма (36) в другую физическую величину для целей передачи на расстояние. Примеры. Индуктивный датчик; пневматический датчик. Примечания: 1. Передающий преобразователь может быть, аналогично приемному (37), одно- и многоступенчатым. 2. Передающий преобразователь в тех случаях, когда это не может вызвать недоразумений, может сокращенно называться датчиком
39	Масштабный преобразователь	Измерительный преобразователь (35), служащий для изменения в определенное число раз значения одной из величин, действующих в цепи измерительного прибора (23) без изменения ее физической природы. Примеры. Измерительный трансформатор тока; делитель напряжения; измерительный усилитель; измерительный микроскоп

№ пп.	Термин	Определение термина
40	Первичный измерительный механизм Первичный измеритель	Измерительный механизм (36), служащий для измерения величины, создаваемой приемным преобразователем (37) Примеры. Милливольтметр термоэлектрического пирометра; дифманометр расходомера переменного перепода
41	Вторичный измерительный механизм Вторичный измеритель	Измерительный механизм (36), служащий для измерения величины, создаваемой передающим преобразователем (38). Пример. Электромагнитный следящий прибор к индуктивному датчику
V. ЭТАЛОНЫ; ОБРАЗЦОВЫЕ И РАБОЧИЕ МЕРЫ И ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ПРИБОРЫ		
42	Эталон	Тело или устройство, предназначенное для воспроизведения и хранения единицы измерения (3) в общегосударственном или международном масштабе. Примечание. Меры (22) или измерительные приборы (23), применяемые в качестве эталонов, именуются эталонными мерами или измерительными приборами.
43	Образцовая мера	Мера (22), предназначенная для хранения единиц измерения (3) и для поверки (96) и градуировки (99) по ней других мер и измерительных приборов (23).
44	Образцовый измерительный прибор	Измерительный прибор (23), предназначенный для хранения единиц измерения (3) и для поверки и градуировки по нему других мер (22) и измерительных приборов (23).
45	Нормальный образец	Образец материала или изделия с изученными свойствами, назначением которого является поверка (96) приборов для испытания подобных же образцов или изделий. Пример. Нормальный образец магнитного материала
46	Образцовое вещество	Вещество со свойствами, отличающимися высоким постоянством, применяемое для воспроизведения единиц измерения (3) или постоянных точек шкалы. Примеры. Вода высокой степени чистоты, применяемая при поверке вискозиметров и ареометров, а также при поверке термометров в точках 0 и 100°С; аттестованная безводная кислота, применяемая при поверке калориметров
47	Рабочая мера	Мера (22), применяемая для практических измерений (1) или в научных исследованиях, но не для поверки (96) других мер или измерительных приборов (23). Примеры. Гиря, применяемая для взвешивания товаров или для химического анализа; мера длины, применяемая для измерения размеров изделий или для наладки металлообрабатывающих станков

№ пп.	Термин	Определение термина
48	Рабочий измерительный прибор	Измерительный прибор (23), применяемый для практических измерений (1) или в научных исследованиях, но не для поверки (96) других мер (22) или измерительных приборов. Примеры. Приборы для измерения количества и оценки свойства материалов и изделий; приборы для наблюдения за ходом технологических процессов
49	Первичный эталон	Эталон (42), по точности стоящий выше других эталонов, воспроизводящих единицы измерения (3) той же физической величины
50	Вторичный эталон	Эталон (42), значение которого устанавливается в зависимости от значения первичного эталона (49) или эталонным методом (58). Примечание. К вторичным относятся все эталоны, значение которых устанавливается как непосредственно по первичному эталону, так и через посредство других вторичных эталонов
51	Государственный эталон	Первичный эталон (49), утвержденный в установленном порядке в качестве государственного
52	Эталон-свидетель	Вторичный эталон (50), предназначенный для проверки сохранности первичного эталона (49) и для замены его в случае порчи или утраты
53	Эталон-копия	Вторичный эталон (50), сличаемый непосредственно с первичным эталоном (49) и заменяющий его при наиболее точных метрологических работах
54	Рабочий эталон	Вторичный эталон (50), предназначенный для текущих метрологических работ по передаче единиц измерения (3) образцовым мерам (43) и измерительным приборам (44) высшей точности
55	Одиночный эталон	Эталон (42), воспроизводящий единицу измерения (3) без участия других таких же эталонов. Примеры. Эталонная гиря; эталонная катушка сопротивления
56	Групповой эталон	Группа эталонных мер или эталонных измерительных приборов (42), применяемая как одно целое для повышения точности (78) воспроизведения единицы измерения (3). Примечания. 1. Значение группового эталона определяется как взвешенное среднее (86) из значений отдельных эталонных мер. 2. Различаются групповые эталоны постоянного состава и групповые эталоны переменного состава. В последние входят эталонные меры, подверженные старению и нуждающиеся в периодической замене новыми
57	Эталонный набор	Набор эталонных мер или эталонных измерительных приборов (42), позволяющий воспроизводить значения измеряемой величины (2), лежащие между определенными пределами, в котором различные меры или измерительные приборы воспроизводят соответственно различное число единиц измерения (3) или различные области значений измеряемой величины

№ пп.	Термин	Определение термина
58	Эталонный метод	<p>Метод воспроизведения единиц измерения (3) с использованием постоянных свойств вещества или физических констант, заменяющий первичный эталон (49).</p> <p>Примеры. Эталонный метод воспроизведения метра в длинах световых волн; эталонный метод воспроизведения температурной шкалы по шести постоянным точкам; эталонный метод воспроизведения единиц времени и частоты на основе звездных наблюдений; эталонный весовой метод воспроизведения единиц плотности</p>
59	Эталонная установка	<p>Измерительная установка (25), предназначенная для воспроизведения единиц измерения (3) эталонным методом (58)</p>
60	Поверочная установка Нрк. Образцовая установка	<p>Измерительная установка (25), содержащая образцовые меры (43) и (или) образцовые измерительные приборы (44), служащая для проверки других мер и измерительных приборов.</p> <p>Примеры. Установка для проверки термометров, состоящая из образцовых термометров, устройств для воспроизведения постоянных температурных точек, термостатов и т. д.; установка для проверки электрических счетчиков, включающая образцовые ваттметры, щит для навешивания счетчиков, вспомогательные измерительные приборы, а также питающие и регулирующие устройства</p>
61	Поверочная схема	<p>Документ, устанавливающий соподчинение эталонов (42), образцовых мер и измерительных приборов (43, 44), а также порядок и точность передачи единицы измерения (3) от эталонов образцовым (43, 44), а от них рабочим мерам и измерительным приборам (47, 48)</p>
62	Разряд образцовых мер и (или) измерительных приборов	<p>Категория образцовых мер (43) и (или) измерительных приборов (44), отнесенная к одной и той же ступени поверочной схемы (61).</p> <p>Примечание. Разряды нумеруются порядковыми числами: 1-й, 2-й и т. д.</p>
63	Отсчетное устройство	<p>VI. ОТСЧЕТ ПОКАЗАНИЙ, НОМИНАЛЬНЫЕ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ</p> <p>Совокупность деталей меры (22) или измерительного прибора (23), служащих для наблюдения воспроизводимого мерой или измеряемого прибором значения измеряемой величины (2).</p> <p>Примечание. Отсчетное устройство показывающего прибора (33) обычно состоит из шкалы и указателя, в самопишущем приборе (34) отсчетное устройство осуществляет запись на диаграмме, в интегрирующем приборе (32) чаще всего применяется счетный механизм</p>
64	Отметка шкалы	<p>Знак (черта, штрих, точка, зубец и пр.), соответствующий отдельному значению измеряемой величины (2).</p> <p>Примечание. Отметка, помеченная числом, называется числовой отметкой</p>

№ пп.	Термин	Определение термина
65	Деление шкалы	Промежуток между двумя соседними отметками шкалы (64)
66	Цена деления шкалы	Изменение измеряемой величины (2), соответствующее перемещению указателя (63), или шкалы относительно указателя, на одно деление шкалы (65)
67	Отсчет	Число, отсчитанное при данном измерении по отсчетному устройству (63) прибора, либо полученное путем счета последовательных отметок или сигналов
68	Постоянная прибора	Значение, на которое умножается отсчет (67), выраженный в числе делений шкалы (65), для получения показания (71) в единицах (3) измеряемой величины (2)
69	Номинальное значение меры	Значение, указанное на мере или, при отсутствии такой возможности, на ее футляре. Примечание. Термин обычно употребляется применительно к однозначной мере (26). В случае многозначной меры (27) с отсчетным устройством (63) говорят о показании меры (70)
70	Показание меры	Значение величины, воспроизводимой мерой (22), устанавливаемое по отсчету (67). Примечание. Термин относится только к многозначной мере (27), снабженной отсчетным устройством (63), или к магазину мер (29)
71	Показание измерительного прибора	Значение величины, измеряемой измерительным прибором (23), устанавливаемое по отсчету (67)
72	Действительное значение меры	Значение меры (22), найденное путем сравнения ее с более точными мерами и содержащее столь малую погрешность измерения (74), что оно может быть принято для данной меры за верное (истинное) ее значение. Примечание. В случае особо точных мер действительное значение приводится с указанием погрешности его определения
73	Действительное значение измеряемой величины Прк. Действительное показание	Значение измеряемой величины (2), найденное с помощью более точных мер (22) или измерительных приборов (23) и содержащее столь малую погрешность измерения (74), что оно для данного вида измерений (1) может быть принято за верное (истинное) значение. Примечание. В случае особо точных измерений действительное значение приводится с указанием погрешности его определения
74	Погрешность измерения	VII. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ Алгебраическая разность между полученным при измерении и верным (истинным) значением измеряемой величины (2), происходящая от несовершенства метода (5) и средств (4) измерений, непостоянства условий наблюдения, а также от недостаточного опыта наблюдателя или несовершенства его органов чувств.

№ пп.	Термин	Определение термина
		<p>Примечания: 1. Поскольку верное (истинное) значение измеряемой величины остается неизвестным, на практике погрешностью измерения называют приближенное ее значение, найденное из опытных данных. В таком смысле термин погрешность применяется и в других местах этой рекомендации.</p> <p>2. Погрешность измерения может быть выражена в единицах (3) измеряемой величины (2) или в долях (или в процентах) от верного ее значения. В первом случае она называется абсолютной, во втором — относительной погрешностью измерения.</p>
75	Систематическая погрешность	<p>Погрешность измерения (74), значение которой в данном ряде измерений остается постоянным или закономерно изменяется.</p> <p>Примеры. Погрешность вследствие отклонения действительного значения меры (72) от ее номинального значения (69), погрешность вследствие наличия термоэлектродвижущих сил в измерительной цепи, погрешность вследствие отклонения температуры от нормальной.</p>
76	Случайная погрешность	<p>Погрешность измерения (74), принимающая при повторных измерениях одной и той же величины (2) в тех же условиях различные положительные и отрицательные значения, не зависящие друг от друга.</p> <p>Примеры. Погрешность вследствие вариации показаний (103) измерительного прибора (71); погрешность округления при отсчитывании показаний прибора.</p>
77	Грубая погрешность Промех	<p>Погрешность измерения (74), существенно превышающая по своему значению оправдываемые объективными условиями измерений систематические (75) или случайные (76) погрешности.</p> <p>Примеры. Погрешность вследствие ошибочно отчитанной или записанной цифры, погрешность, вызванная применением неисправного прибора, погрешность из-за неправильных манипуляций с приборами.</p>
78	Точность измерения	<p>Степень приближения результата измерений к верному (истинному) значению измеряемой величины (2).</p> <p>Примечание. Количественная оценка точности измерения заменяется обычно указанием погрешности измерения (74). Чем меньше погрешность, тем выше точность, и наоборот.</p>
79	Отклонение от арифметического среднего Остаточная погрешность	<p>Алгебраическая разность между отдельным измеренным значением и средним арифметическим значением ряда измерений той же величины при неизменных условиях.</p>
80	Средняя квадратическая погрешность ряда измерений	<p>Количественная характеристика рассеяния ряда значений, полученных при измерениях в неизменных условиях, вычисляемая как корень квадратный из частного от деления суммы квадратов отклонений от арифметического среднего (79) на число измерений, уменьшенное на единицу.</p>

№ пп.	Термин	Определение термина
81	Вероятная погрешность ряда измерений	<p>Количественная характеристика рассеивания ряда значений, полученных при измерениях в неизменных условиях, вычисленная исходя из предположения равной вероятности появления отклонений от арифметического среднего (79) больших и меньших, чем ее значение.</p> <p>Примечание. Для нормального распределения случайных погрешностей (76), т. е. распределения по закону Гаусса, вероятная погрешность равна 0,6745 (приблизительно $\frac{2}{3}$) средней квадратической погрешности (80)</p>
82	Средняя арифметическая погрешность ряда измерений	<p>Количественная характеристика рассеивания ряда значений, полученных при измерениях в неизменных условиях, вычисляемая как арифметическое среднее абсолютных значений отклонений от арифметического среднего (79).</p> <p>Примечание. Для нормального распределения случайных погрешностей (76), т. е. распределения по закону Гаусса, средняя арифметическая погрешность равна 0,7979 (приблизительно $\frac{4}{5}$) средней квадратической погрешности (80)</p>
83	Средняя квадратическая погрешность арифметического среднего	<p>Количественная характеристика отклонения арифметического среднего ряда значений, полученных при измерениях в неизменных условиях, от теоретического арифметического среднего (т. е. предела, к которому стремилось бы среднее при безграничном возрастании числа измерений), вычисляемая как средняя квадратическая погрешность ряда измерений (80), деленная на корень квадратный из числа измерений</p>
84	Предельная погрешность арифметического среднего	<p>Количественная характеристика отклонения арифметического среднего ряда значений, полученных при измерениях в неизменных условиях, от теоретического арифметического среднего (т. е. предела, к которому стремилось бы среднее при безграничном возрастании числа измерений), вычисляемая путем умножения средней квадратической погрешности арифметического среднего (83) на коэффициент, зависящий от числа измерений в ряде и от заданной вероятности того, что вычисленное значение отклонения будет не меньше истинного отклонения.</p> <p>Примечание. Таблицы значений указанного коэффициента прилагаются к курсам математической статистики. В частности, в случае нормального распределения случайных погрешностей (76), т. е. распределения по закону Гаусса, при большом числе измерений и заданной вероятности 0,997 этот коэффициент равен 3, а при вероятности 0,99 он равен 2,6</p>
85	Веса измерений	<p>Неотрицательные числа (т. е. положительные или ноль), используемые в качестве относительных числовых характеристик точности измерений (78) при совместной обработке результатов этих измерений.</p> <p>Примечание. При разделении ряда равноточных измерений на группы вес арифметического среднего отдельной группы равен абсолютной или относительной (по отношению к общему числу всех результатов) численности группы. При образовании взвешенного среднего из арифметических средних нескольких рядов измерений различной точности веса отдельных средних обратно пропорциональны квадратам средних квадратических погрешностей этих рядов (80)</p>

№ пп.	Термин	Определение термина
86	Взвешенное среднее	Среднее из нескольких измеренных значений, вычисленное с учетом весов измерений (85)
VIII. ПОГРЕШНОСТИ МЕР И ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ		
87	Погрешность меры	<p>Алгебраическая разность между номинальным (69) и действительным (72) значением мер.</p> <p>Примечания: 1. В случае многозначной меры (27) с устройством для отсчета показаний (63) погрешность меры (при данном показании) определяется как разность между показанием (70) и действительным значением (72) меры.</p> <p>2. Погрешность меры может быть выражена в единицах измеряемой величины (2), либо в долях (или в процентах) от действительного ее значения (73). В первом случае она называется абсолютной, во втором — относительной погрешностью меры.</p> <p>Примеры. Погрешность (абсолютная) концевой меры длины с номинальным значением 100 мм и действительным значением 100,0006 мм равна $-0,6$ мк. Погрешность (относительная) катушки сопротивления в 1 ом, имеющей действительное значение 0,99995 ом, равна $+0,005\%$</p>
88	Погрешность измерительного прибора (при данном показании)	<p>Алгебраическая разность между показанием прибора (71) и действительным значением измеряемой им величины (73).</p> <p>Примечание. Погрешность измерительного прибора может быть выражена в единицах измеряемой величины или в долях (или в процентах) от действительного ее значения. В первом случае она называется абсолютной, во втором — относительной погрешностью прибора. Иногда погрешность прибора выражают в процентах от диапазона шкалы, тогда она носит название «приведенная погрешность».</p> <p>Примеры. Погрешность (абсолютная) циферблатных весов при показании их 500,0 г и действительном значении измеряемой массы 499,5 г равна $+0,4$ г. Приведенная погрешность вольтметра с верхним пределом измерения 150 в при показании его 100,0 в и действительном значении измеряемого напряжения 100,6 в равна $-0,4\%$</p>
89	Поправка	<p>Значение, которое должно быть алгебраически прибавлено к номинальному значению меры (69), к показанию многозначной меры (70) или к показанию измерительного прибора (71), чтобы получить действительное значение величины, воспроизводимое мерой (72) или измеряемое прибором (73).</p> <p>Примечание. Поправка численно равна абсолютной погрешности меры (87) или измерительного прибора (88), взятой с обратным знаком.</p> <p>Примеры. Поправка к значению 100-миллиметровой концевой меры длины при действительном ее значении 100,0006 мм равна $+0,6$ мк. Поправка к показанию вольтметра, равному 100,0 в, при действительном значении измеряемого напряжения 100,6 в равна $+0,6$ в.</p>

№ пп.	Термин	Обращение термина
90	Поправочный множитель	<p>Число, на которое должно быть умножено номинальное значение меры (69) или показание измерительного прибора (71), чтобы получить соответствующее действительное значение меры (72) или действительное значение измеряемой прибором величины (73).</p> <p>Пример. Поправочный множитель к показанию счетчика электрической энергии, показывающего расход энергии, равный 52,3 <i>квт·ч</i>, при действительном значении израсходованной энергии 52,8 <i>квт·ч</i>, равен 1,010</p>
91	Основная погрешность	<p>Погрешность меры (87) или измерительного прибора (88), свойственная им при нормальных условиях применения (95)</p>
92	Дополнительная погрешность	<p>Изменение значения меры или показания измерительного прибора (71), вызванное изменением одной из влияющих величин (94).</p> <p>Пример. Изменение показания амперметра, вызываемое изменением температуры окружающей среды или изменением частоты переменного тока</p>
93	Допускаемая погрешность	<p>Предусмотренная нормами наибольшая погрешность меры (87) или измерительного прибора (88), при которой они могут быть допущены к применению.</p> <p>Примечание. Допускаемая погрешность может быть выражена как в виде абсолютной, так и в виде относительной или приведенной погрешности</p>
94	Влияющая величина	<p>Одна из физических величин, действующих на данную меру (22) или измерительный прибор (23), но не являющаяся измеряемой величиной (2).</p> <p>Примечание. Значение влияющей величины, при котором погрешности меры (87) или измерительного прибора (88) не должны превышать предусмотренных нормами, называется нормальным значением. Если нормируется область значений влияющей величины, она называется нормальной областью значений</p>
95	Нормальные условия применения	<p>Условия применения меры (22) или измерительного прибора (23), при которых влияющие величины (94) имеют нормальное значение или находятся в пределах нормальной области значений</p>
IX. МЕТРОЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ		
96	Проверка мер и (или) измерительных приборов Прк. Проверка мер и измерительных приборов	<p>Совокупность действий, имеющих целью оценку погрешностей мер и измерительных приборов (87, 88) или, если меры и измерительные приборы применяются без введения поправок (89), выяснение, не превышают ли их погрешности допускаемых (93).</p> <p>Примечание. В поверочной практике в операцию проверки включается также внешний осмотр и проверка, нет ли неисправностей, препятствующих применению меры или измерительного прибора по прямому назначению</p>
97	Сличение мер или измерительных приборов	<p>Равновидность проверки (96), при выполнении которой проводится прямое сравнение двух мер (22) или двух измерительных приборов (23)</p>

№ пп.	Термин	Определение термина
98	Калибровка мер	<p>Поверка (96) совокупности однозначных мер (26) или одной многозначной меры (27) на различных отметках шкалы, в которой оценка погрешностей отдельных мер (отдельных значений шкалы) производится на основании сравнения друг с другом в различных сочетаниях отдельных мер или групп мер (отдельных участков шкалы).</p> <p>Примечание. Калибровка мер есть частный случай совокупных измерений (8)</p>
99	Градуировка мер и (или) измерительных приборов	<p>Нанесение отметок на шкалу меры (22) или измерительного прибора (23), или определение значений измеряемой величины (2), соответствующих уже нанесенным условным отметкам.</p> <p>Примечание. При отсутствии шкалы, например в случае светозмерительных или температурных ламп, мер твердости и др., под градуировкой понимают определение значений воспроизводимой мерой величины или определение зависимости между измеряемой величиной и соответствующим параметром меры или измерительного прибора (например, силой тока лампы и т. д.)</p>
<p>X. ОБЩИЕ СВОЙСТВА МЕР И ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ</p>		
100	Стабильность меры	<p>Свойство меры (22) сохранять неизменным во времени свое значение.</p> <p>Примечание. Сравнение стабильности мер производят путем сравнения относительных изменений их действительных значений (72) за длительный промежуток времени (например, за 1 год), вызванных только старением и износом, но не изменением условий их поверки (96). Стабильность меры тем выше, чем меньше эти изменения</p>
101	Стабильность измерительного прибора	<p>Свойство измерительного прибора (23) сохранять неизменными во времени поправки (89) к его показаниям.</p> <p>Примечание. Сравнение стабильности приборов производят путем сравнения относительных изменений их показаний (71) за длительный промежуток времени (например, за 1 год), вызванных только старением и износом, но не изменением условий их поверки (96). Стабильность прибора тем выше, чем меньше эти изменения</p>
102	Вариация значений меры	<p>Наибольшая находимая экспериментально разность между действительными значениями (72), воспроизводимыми многозначной мерой (27) при повторных установках отсчетного устройства (63) в одно и то же положение и при неизменных внешних условиях</p>
103	Вариация показаний	<p>Наибольшая находимая экспериментально разность между повторными показаниями измерительного прибора (71), соответствующими одному и тому же действительному значению измеряемой им величины (73) при неизменных внешних условиях</p>

№ пп.	Термин	Определение термина
104	Точность меры	<p>Свойство меры (22), характеризующее степень приближения действительного значения меры (72) к ее номинальному значению (69).</p> <p>Примечание. Сравнение точности мер производят сравнением их относительных погрешностей (87). Мера тем точнее, чем меньше ее относительная погрешность.</p>
105	Точность измерительного прибора	<p>Свойство измерительного прибора (23), характеризующее степень приближения показаний измерительного прибора (71) к действительным значениям измеряемой величины (73).</p> <p>Примечание. Сравнение точности измерительных приборов производят сравнением их относительных (или приведенных) погрешностей (88). Прибор тем точнее, чем меньше его относительные (приведенные) погрешности.</p>
106	Класс точности мер (измерительных приборов)	<p>Категория мер (22) измерительных приборов (23) данного вида, характеризующаяся уровнем допускаемых погрешностей (93).</p> <p>Примечание. При указании конкретного обозначения класса точности слово «точности» обычно опускается.</p> <p>Примеры. Катанки сопротивления класса 0,01, пружинные манометры класса 1, концевые меры длины 2-го класса.</p>
107	Чувствительность измерительного прибора	<p>Свойство измерительного прибора (23), заключающееся в способности прибора реагировать на изменения измеряемой величины (2).</p> <p>Примечание. Чувствительность оценивается отношением изменения положения указателя относительно шкалы (выраженного в линейных или угловых единицах) к соответствующему изменению измеряемой величины. Если измеряемой величиной является длина или угол и значение чувствительности выражается безразмерным числом, последнее называется передаточным отношением.</p>
108	Порог чувствительности измерительного прибора	<p>Изменение измеряемой величины (2), вызывающее наименьшее изменение его показаний (71), обнаруживаемое при нормальном для данного измерительного прибора (23) способе отсчета (67).</p>

Поступило в редакцию
6/VI 1961 г.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
В. Л. Кан. К вопросу об оценке погрешностей сложных приборов (комплектов)	7
Н. А. Чехонадский. Некоторые вопросы оценки погрешностей сложных измерительных устройств, состоящих из ряда отдельных блоков	10
Б. Е. Рабинович. Методика суммирования частных погрешностей в области радиотехнических измерений	19
Ф. Б. Гриневич, К. Б. Карандеев. Об определении погрешности измерения комплексных сопротивлений	34
М. А. Гольдинов. Определение погрешности измерения передаточных функций приборов с линейными динамическими системами	39
В. А. Волконский, А. С. Немировский. Оценка динамических погрешностей и ошибок интегрирования измерительных приборов	47
А. С. Немировский. Методическая ошибка дискретного интегрирования	68
А. Н. Карташева. О статистических критериях оценки надежности поверки приборов для линейных измерений	78
Н. А. Смирнова. Оценка погрешностей при сличениях эталонов-копий с первичным эталоном единицы массы СССР и некоторые изменения в использовании ими	91
К. П. Широков. О проекте рекомендаций ВНИИМ «Основные метрологические термины и определения»	101

Редактор издательства *Н. Н. Александрова*

Техн. редактор *Р. Г. Польская*
Корректоры: *М. А. Беляева, Л. Н. Кириш*

Подписано к печати 30/XII 1961 г.

Уч.-изд. л. 10,7

Формат бумаги 70×108^{1/16}

Печ. л. 10,6.

М-63114.

Тираж 3000 экз. Заказ 708

Типография № 6 УПП Ленсовнархоза, Ленинград, ул. Моисеенко, 10

10.7
114.

11

Цена 75 коп.

