

В. П. Р. В.

КОМИТЕТ СТАНДАРТОВ, МЕР И ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ  
ПРИ СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СССР

ВСЕСОЮЗНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ИНСТИТУТ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ  
И РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

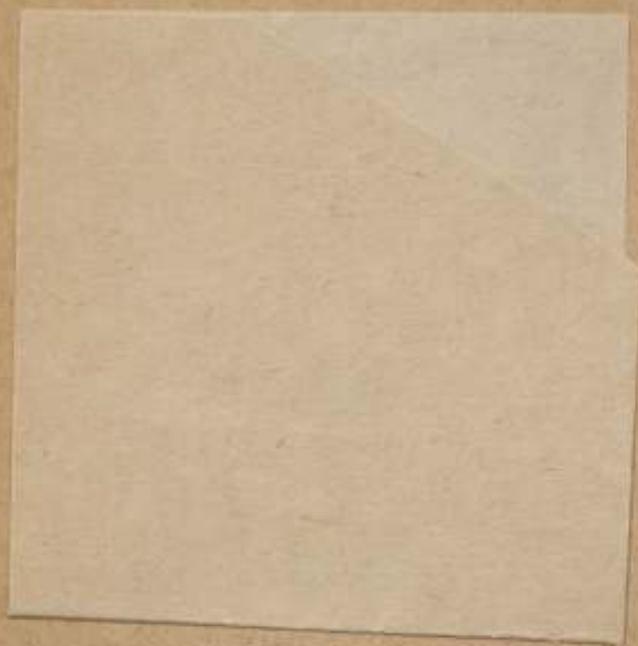
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ  
В ОБЛАСТИ ФИЗИКИ

ТРУДЫ ИНСТИТУТОВ КОМИТЕТА

Выпуск 80 (140)

80 (140)





КОМИТЕТ СТАНДАРТОВ, МЕР И ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ  
ПРИ СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СССР

ВСЕСОЮЗНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ИНСТИТУТ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ  
И РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ  
В ОБЛАСТИ ФИЗИКИ

ТРУДЫ ИНСТИТУТОВ КОМИТЕТА

ВЫПУСК 80 (140)



ж 134948

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
КОМИТЕТА СТАНДАРТОВ, МЕР И ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ  
ПРИ СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СССР

Москва — 1966

---

*Ответственный редактор выпуска*  
канд. физ.-мат. наук Л. М. ПЯТИГОРСКИЙ

В. ДУКЛЕР

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ:

Л. Н. Брянский, Г. Д. Бурдун, Н. П. Глазков, А. Н. Голенков, А. Л. Дуклер,  
М. К. Жоховский, Л. М. Закс, А. В. Кубарев, М. П. Орлова, Л. М. Пятигорский,  
В. И. Сачков, В. Д. Фрумкин, Г. К. Ягола

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Развитие метрологии и большие задачи, стоящие перед ней в нашей стране, требуют проведения широких теоретических исследований в метрологических институтах. В Трудах институтов комитета предполагается издание сборников по теоретическим вопросам физики, радиотехники и метрологии.

В настоящий, первый, сборник включены статьи, содержащие некоторые теоретические исследования в области физики, выполненные во ВНИИФТРИ в 1963—1964 гг.

Сборник состоит из четырех разделов. В первом разделе помещены статьи по теории твердого тела. Первые три из них посвящены проблеме усиления упругих волн при взаимодействии потоков заряженных частиц с волнами различных типов. В связи с тем, что эта область физики твердого тела развивается очень быстро, впервые дан обзор обширной литературы по теоретическим вопросам этой проблемы. Показано, что в слоистой системе полупроводник — пьезодиэлектрик может быть получено усиление своеобразных поверхностных акустических волн. Рассматривается интересный новый эффект — усиление изгибных волн в полупроводниковой пластинке.

В статье, посвященной измерению констант полупроводников на больших частотах, предлагается метод измерения констант по измерениям фазы и амплитуды упругой волны, распространяющейся в постоянном электрическом поле. Этот метод позволяет также, в принципе, оценивать частотную зависимость некоторых констант пьезополупроводниковых кристаллов.

Дана теория монотонной части магнитной восприимчивости в сильных магнитных полях. Показано, в частности, что путем экспериментального исследования магнитной восприимчивости можно при произвольном законе дисперсии найти зависимость энергии и плотности состояний основного состояния от магнитного поля. Исследован характер распространения электромагнитных волн в одноосных кристаллах, обладающих магнитоэлектрическим эффектом.

В статье о теплоемкости вещества вблизи критической точки жидкости и газа обсуждается вопрос о максимумах термодинамических величин в закритической области в связи с недавно обнаруженной логарифмической особенностью теплоемкости  $C_V$  в критической точке.

Второй раздел посвящен исследованиям по теоретической радиофизике. Дана коротковолновая асимптотика собственных функций уравнения Гельмгольца. Предложен и развит метод описания полей функциями параболического цилиндра.

Теоретически и экспериментально показаны возможности создания быстродействующих нитяных болометров. Рассмотрение температурных

воли позволило объяснить некоторые свойства болометров. Приведен теоретический анализ ряда вопросов поведения тонких пленок и нитей как элементов волноводных устройств, причем основное внимание уделено вопросам согласования. В одной из статей этого раздела сделаны, по-видимому, первые шаги в исследовании погрешностей отклоняющих систем бегущей волны.

Статьи третьего раздела содержат работы по теоретической ядерной физике. Первые две статьи посвящены рассмотрению основных и низко-возбужденных состояний ядер на основе теории коначных ферми-систем. В одной из них вычислены значения квадрупольных моментов большой группы нечетных ядер; они хорошо согласуются с экспериментальными данными. Другая статья посвящена изучению объемного распределения электрического заряда в ядрах различных изотопов и в ядрах, находящихся в возбужденных состояниях. На основе полученных данных проведен анализ природы изомерного состояния ядер.

В третьей статье в рамках единой теории резонансных ядерных реакций учитываются мнимые члены оптического потенциала системы ядро плюс частица, обуславливающие переход падающего нейтрона из одночастичного состояния в составное ядро во всех открытых каналах реакции. В явном виде получено выражение для среднего сечения парциальной реакции.

В отдельной статье для целей дозиметрии радиоактивных аэрозолей исследован эффект самопоглощения альфа-излучения и осаждения дочерних продуктов радона в цилиндрических каналах.

В четвертом разделе помещена статья, в которой показано, что наблюдение за прецессией гироскопа, помещенного на искусственный спутник Земли, позволяет экспериментально отличить общую теорию относительности от выдвигаемых вместо нее линейных теорий гравитации.

В. И. ПУСТОВОЙТ

УДК 539.295 : 537.533.7

## ТЕОРИЯ УСИЛЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

В последнее время проявляется большой интерес к взаимодействию потоков заряженных частиц с различными типами волн, которые могут существовать в той или иной системе. Впервые исследование таких явлений было начато в газоразрядной плазме. В электронно-ионной плазме возможно распространение волн многих типов (особенно при наличии внешнего магнитного поля) и присутствие электронных потоков или пучков, как правило, приводит к нарастанию, т. е. к усилению или генерации волн в системе. В конечном счете это приводит к развитию явлений неустойчивости в газоразрядной плазме.

Лишь сравнительно недавно начали изучаться аналогичные явления в твердом теле — в полупроводниках и полуметаллах, в которых электронные или «дырочные» потоки можно создавать с помощью внешних полей или с помощью градиентов концентрации или температуры. В литературе имеется сравнительно много работ, посвященных изучению различных явлений неустойчивости, которые вызываются электронными потоками в твердом теле. Весьма условно эти работы можно было бы разделить на две группы: первая — это работы, в которых исследуются возбуждения плазменного типа, вторая — в которых исследуется раскачка тех или иных «решетчатых» волн электронными потоками.

Характерная особенность работ первой группы заключается в том, что при возбуждениях плазменного типа решетка кристалла играет второстепенную роль: потоки носителей возбуждают ту или иную волну, существующую в самой электронно-дырочной плазме. Вторая группа работ характеризуется тем, что решетка здесь, наоборот, играет активную роль: электронные потоки возбуждают или усиливают ту или иную решетчатую волну.

Чтобы как-то сузить круг рассматриваемых вопросов, из этих двух больших и самостоятельных проблем остановимся только на второй, а именно, исследуем вопросы, связанные с усилением упругих волн в решетке\*. При этом останутся в стороне такие вопросы, как усиление оптических и спиновых волн; их рассмотрение безусловно представляет интерес, но выходит за рамки настоящей статьи.

Экспериментально усиление упругих волн было впервые обнаружено Хатсоном, Макфи и Уайтом [1], которые наблюдали усиление ультразву-

\* Читателям, интересующимся плазменными явлениями в твердых телах, можно рекомендовать обзор А. А. Веденова, опубликованный в журнале «Успехи физических наук», 84, 533, 1964.

ковой волны, проходящей в пьезополупроводящих кристаллах сернистого кадмия, когда средняя скорость движения электронов превышала скорость звука.

Физический процесс, происходящий при усилении или генерации акустических волн дрейфующим потоком электронов в твердом теле, состоит в следующем. Проходящая упругая волна приводит к перераспределению электронов в пространстве таким образом, что образуются области повышенной концентрации электронов, т. е. пространственный объемный заряд. Если теперь с помощью внешнего поля или каким-либо другим путем заставить объемный заряд дрейфовать в направлении волны со сверхзвуковой скоростью, то подобно свободным электронам, он будет излучать фононы. Такова физическая природа эффекта усиления в области малых частот, когда усиление или генерация упругих волн обусловлена излучением Черенкова объемного заряда, образованного самой волной. В области больших частот, когда объемный заряд не успевает образоваться за время, равное периоду волны, усиление обусловлено эффектом Черенкова отдельных электронов, аналогично пучковой неустойчивости в газоразрядной плазме.

Характер распространения ультразвуковых волн в твердых телах, их скорость и декремент затухания или нарастания, кроме упругих констант и тензора вязкости кристалла, определяются еще и состоянием электронно-дырочной плазмы.

Поскольку плазменная часть затухания или усиления ультразвуковых волн, а также изменение их фазовой скорости полностью определяются тензором диэлектрической проницаемости среды, то основной вопрос при исследовании этого круга явлений — нахождение тензора диэлектрической проницаемости электронно-дырочной плазмы по слабому переменному полю волны.

Наличие направленного движения электронов или дырок приводит к тому, что по отношению к некоторым волнам система становится неравновесной: вместо обычного поглощения оказывается возможным усиление или генерация волн. Последнее возможно только при выполнении условия Черенкова, т. е. тогда, когда скорость дрейфа превышает фазовую скорость волны. Для тензора диэлектрической проницаемости это соответствует изменению знака его мнимой части, т. е. проводимости.

Таким образом, основная проблема всех рассматриваемых вопросов заключается в вычислении тензора диэлектрической проницаемости кристалла при наличии направленных потоков заряженных частиц. Поэтому вначале находят тензор диэлектрической проницаемости среды в различных случаях. Следует также заметить, что тензор диэлектрической проницаемости среды определяет не только плазменную часть затухания или усиления упругих волн, но и ряд других явлений, в том числе и чисто плазменных, поэтому определение его значений представляет также и самостоятельный интерес.

Первая часть обзора посвящена нахождению тензора диэлектрической проницаемости. Вначале рассмотрена область малых частот и проанализирована физическая природа эффекта. Затем с помощью кинетического уравнения рассмотрена область больших частот. Наконец, в последнем разделе первой части рассматривается проницаемость плазменной среды в квантующем магнитном поле. В зависимости от величины магнитного поля проницаемость электронно-дырочной плазмы осциллирует, и вместе с ней осцилляторным образом изменяется и усиление (затухание) упругих волн.

Вторая часть посвящена исследованию усиления акустических волн в различных кристаллах: в пьезополупроводниках, когда взаимодействие

обусловлено электрическим полем, которым сопровождается упругая волна, и в полупроводниках и полуметаллах, когда взаимодействие обусловлено деформационным потенциалом.

## 1. ПРОНИЦАЕМОСТЬ ПЛАЗМЕННОЙ СРЕДЫ ПРИ НАЛИЧИИ ДРЕЙФА

### Общие замечания

Как уже говорилось выше, на опыте было обнаружено усиление акустических волн, когда скорость дрейфа носителей превышала скорость волны. Чтобы проиллюстрировать физическую природу этого эффекта, рассмотрим характер распространения в среде плоской продольной электрической волны

$$E(r, t) = E_- e^{i\omega t - ikx}, \quad E_- \parallel k. \quad (1.1)$$

Электрическое поле волны  $E_-$  производит над средой работу, равную  $\sigma E_-^2$ , где  $\sigma$  — проводимость среды по переменному полю волны. Знак работы, очевидно, определяется знаком проводимости  $\sigma$ : если  $\sigma > 0$ , то проходящая волна поглощается средой, если же  $\sigma < 0$ , то среда, наоборот, отдает энергию волне, и амплитуда ее растет. Таким образом, чтобы выяснить хотя бы качественно характер взаимодействия волны (1.1) со средой, необходимо определить знак проводимости среды по переменному полю волны.

Покажем, что если в плазменной среде имеется направленное движение частиц (электронов или дырок), то при скорости частиц, превышающей фазовую скорость волны  $v_{\phi} = \frac{\omega}{k}$ , проводимость среды становится отрицательной. Для определенности будем считать, что направленное движение частиц создается внешним постоянным электрическим полем  $E_+$  (разумеется, возможны и другие способы создания дрейфа, например, с помощью градиентов концентрации или температуры). Тогда для переменной составляющей тока в линейном приближении по полю волны имеем

$$j_- = (qv)_- = en_0 v_- + en_- v_d. \quad (1.2)$$

Здесь  $n_0$  — равновесное значение концентрации электронов\*,  
 $e$  — заряд,  
 $n_-(r, t)$  — отклонение концентрации носителей от равновесного значения, вызванное волной (1.1),  
 $v_d$  — скорость дрейфа носителей, обусловленная внешним постоянным электрическим полем,  $E_+$ ,  
 $v_-$  — переменная скорость частиц в поле волны.

В выражении (1.2) отброшен член  $n_- v_-$ , который в линейном приближении по  $E_-$  (считается, что  $E_- \ll E_+$ ) мал. Как видно из формулы (1.2), переменная компонента тока состоит из двух частей: первый член  $en_0 v_-$  — это ток колебательного движения электронов, который обычно учитывается в теории проводимости; второе слагаемое  $en_- v_d$  — это ток упорядоченного движения объемного заряда, для появления которого необходимо наличие дрейфа ( $v_d \neq 0$ ) и переменной составляющей плотности числа частиц,  $n_-(r, t) \neq 0$ . Предположим для простоты, что все векторы  $k$ ,  $E$  и  $E_+$  параллельны и направлены вдоль оси  $x$ . Тогда неравновесное значение

\* Далее чаще будем говорить только об электронах; разумеется, все в равной мере применимо и к дыркам.

концентрации электронов можно определить с помощью уравнения непрерывности:

$$e \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_- = 0. \quad (1.3)$$

Для плоской волны (1.1) из уравнения (1.3) находим

$$n_-(\omega, k) = n_0 \frac{k v_-}{\omega - k v_d}. \quad (1.4)$$

Колебательная составляющая скорости  $v_-$  в простейшем случае равна

$$v_- = \mu E_-, \quad (1.5)$$

где  $\mu$  — подвижность. При больших частотах  $\mu$  комплексно, однако, так как нас интересует лишь качественная картина явлений, подвижность  $\mu$  будем считать вещественной. Подставляя равенства (1.4), (1.5) в выражение (1.2), получим [2]:

$$\mathbf{j}_- = \sigma_- \mathbf{E}_-, \quad \text{где } \sigma_- = \frac{\sigma_0}{1 - \frac{v_d}{v_\phi}}. \quad (1.6)$$

Здесь  $\sigma_0 = e n_0 \mu$  — проводимость по постоянному току.

Формула (1.6) для проводимости показывает, что  $\sigma_-(\omega, k)$  меняет знак при

$$v_d > v_\phi. \quad (1.7)$$

т. е., когда скорость дрейфа носителей превышает фазовую скорость некоторой продольной электрической волны, распространяющейся в среде. При  $v_d = v_\phi$ , как видно из выражения (1.6), имеет место бесконечный резонанс. На самом деле, при резонансе ток конечен вследствие соударений носителя с фононами, диффузии объемного заряда, а также и вследствие других причин, которые могут быть учтены только при более строгом рассмотрении задачи. Как увидим ниже, простая формула для проводимости среды (1.6) справедлива лишь при малых частотах, когда  $\omega \ll \frac{m}{M} v$ , где  $v$  — эффективная частота соударений носителей,  $m$  — масса носителей, а  $M$  — эффективная масса рассеивающего центра.

Условия появления отрицательной проводимости плазменной среды для продольной электрической волны (1.7) есть не что иное, как условие для черенковского излучения [3]: скорость дрейфа электронов должна превышать фазовую скорость раскачиваемой волны. Однако роль черенковского излучателя здесь играет не одна частица, как это обычно бывает, а группа частиц — переменная составляющая плотности их заряда. Если при обычном черенковском излучении волну излучает каждая частица в отдельности (лишь бы ее скорость превышала фазовую скорость волны), то в этом случае волну излучает объемный заряд, дрейфующий под действием внешнего поля. Образование переменной компоненты плотности электронов  $n_-(\mathbf{r}, t)$ , т. е. объемного заряда  $e n_-(\mathbf{r}, t)$ , обусловлено наличием переменного поля самой продольной волны, которую усиливает или возбуждает объемный заряд. Поэтому в этом случае мы имеем систему (объемный заряд — волна), как бы связанную обратной связью. В отличие от этого при обычном излучении Черенкова электрон и вызванная им волна (в линейном приближении) не взаимодействуют друг с другом.

Поскольку направленная скорость движения электронов в твердых телах обычно не превышает  $10^3$ — $10^7$  см/сек, то ясно, что усиливать можно сравнительно медленные волны. Вопрос о том, какая именно волна может

распространяться и усиливаться в системе, зависит, разумеется, от свойств самой среды и в конечном счете решается с помощью дисперсионного уравнения.

Наиболее легко усиливаются акустические волны, скорость которых в твердых телах обычно не превышает  $10^3-10^6$  см/сек. Взаимодействие акустической волны с дрейфующим потоком носителей может осуществляться несколькими способами. Однако наиболее сильно это взаимодействие в пьезополупроводниках, когда проходящая волна сопровождается электрическим полем. Именно в пьезополупроводящих кристаллах CdS этот эффект был обнаружен впервые [1].

Для условий, когда длина свободного пробега волны  $l$  велика ( $kl \gg 1$ ), и электрон ведет себя как свободная частица, можно также привести простые соображения, показывающие, что при дрейфе электронов, превышающем фазовую скорость фононов, возможно черенковское излучение фононов. Эти рассуждения почти ничем не отличаются от обычного случая (фотонного) эффекта Черенкова [3].

Рассмотрим случай вырожденного полупроводника, когда электрон подчиняется статистике Ферми. Пусть с помощью некоторого механизма в объеме полупроводника создан дрейф электронов со скоростью  $v_d$ . Тогда при температуре, близкой к абсолютному нулю, можно считать, что все состояния с  $(v - v_d)^2 < v_F^2$  заняты, а состояния с  $(v - v_d)^2 > v_F^2$  ( $v_F$  — скорость Ферми) — свободны. Другими словами, наличие дрейфового движения приводит к смещению центра сферы Ферми на вектор  $v_d$ .

Начальная скорость электрона  $v_n$  до испускания фонона и конечная  $v_k$ , очевидно, должны удовлетворять неравенствам

$$(v_n - v_d)^2 < v_F^2, \quad (v_k - v_d)^2 > v_F^2, \quad (1.8)$$

т. е.

$$(v_n - v_d)^2 < (v_k - v_d)^2. \quad (1.9)$$

Начальная и конечная скорости электронов связаны законами сохранения энергии и импульса:

$$\frac{1}{2} m v_n^2 = \frac{1}{2} m v_k^2 + \hbar \omega, \quad m v_n = m v_k + \hbar k, \quad (1.10)$$

где  $k$  — волновой вектор фонона. Подставляя в формулу (1.9) выражение (1.10), получим условие, которому должна удовлетворять скорость дрейфа электронов

$$(k v_d) > \omega. \quad (1.7, a)$$

Следовательно, как при малых, так и при больших частотах, излучение фононов возможно только при условии выполнения условия Черенкова (1.7).

Эти рассуждения могут быть распространены и на случай конечных температур [4, 5]. Для этого рассмотрим уравнение для фоновой функции распределения  $N_k$

$$\begin{aligned} \frac{dN_k}{dt} = & \frac{2\pi}{\hbar} \Lambda_{(k)}^2 \sum_p [f_{p+q}(1-f_p)(N_k+1) - \\ & - f_p(1-f_{p+k})N_k] \delta(\epsilon_{p+k} - \epsilon_p + \hbar\omega_k), \end{aligned} \quad (1.11)$$

где  $f_p$  — функция распределения электронов с импульсом  $p$  и энергией  $\epsilon_p$ ,  $\Lambda_{(k)}$  — константа электрон-фононного взаимодействия. Пред-

положим, что электронная система описывается смещенной на вектор  $\mathbf{v}_d$  функцией распределения Ферми:

$$f_p = \left[ 1 + \exp \left( \frac{\epsilon_p - \hbar \mathbf{v}_d \mathbf{p} - \epsilon_F^0}{\kappa T} \right) \right]^{-1}, \quad (1.12)$$

где  $\epsilon_F^0$  — энергия Ферми,  $\kappa$  — постоянная Больцмана. Если в момент  $t = 0$  фононы находились в равновесии, т. е. если  $N_k = N_k^{(0)}$ , где  $N_k^{(0)}$  — функция Планка, то решение уравнения (1.11) имеет вид [6],

$$N_k(t) = [N_k^{(0)} - N_k^{(0)}(\mathbf{v}_d)] e^{\alpha t} + N_k^{(0)}(\mathbf{v}_d),$$

где

$$N_k^{(0)}(\mathbf{v}_d) = \frac{1}{\exp \frac{\hbar(\omega_k - \hbar \mathbf{v}_d \mathbf{k})}{\kappa T} - 1}$$

и

$$\alpha = \left[ 1 - \exp \left( \frac{\hbar \omega_k - \hbar \mathbf{v}_d \mathbf{k}}{\kappa T} \right) \right] \Lambda_k^2 \sum_p f_{k+p} (1 - f_p) \delta(\epsilon_{p+k} - \epsilon_p + \hbar \omega_k). \quad (1.13)$$

Из выражения (1.13) видно, что  $\alpha < 0$  для  $\omega_k > \mathbf{k} \mathbf{v}_d$  и  $\alpha > 0$  для  $\omega_k < \mathbf{k} \mathbf{v}_d$ . Таким образом, мы снова приходим к условию Черенкова (1.7).

Качественное исследование эффекта усиления акустических волн в полупроводниках, которое было сделано выше, охватывает два предельных случая: с одной стороны, когда длина свободного пробега электронов по сравнению с длиной волны мала (случай малых частот), и с другой стороны, когда она бесконечно велика. Однако интересно изучить этот эффект во всей области частот. Для этого следует найти функцию распределения электронов с учетом дрейфового движения носителей, с помощью которой уже могут быть получены все характеристики, определяющие распространение звука в полупроводниках.

### Тензор проводимости среды на малых частотах

Чтобы подробно исследовать явление усиления акустических волн в полупроводниках, предварительно необходимо найти тензор электронной проводимости при наличии направленного движения электронов, так как он полностью определяет электронную часть поглощения (или усиления) акустических волн.

Первое экспериментальное указание на то, что в поглощении звуковых волн существенную роль играют электроны проводимости, было получено Бёммелем [6], теория этого явления впервые была предложена Пиппардом [7], а затем уже развивалась многими авторами [8—12].

Полученное выше выражение (1.6) для продольной проводимости имеет весьма ограниченную область применения. Действительно, при выводе формулы (1.6) считалось, что все электроны движутся с одинаковой скоростью, определяемой внешним постоянным полем; хаотический тепловой разброс частиц по скоростям при этом не учитывался. Однако направленная скорость электронов в твердых телах практически всегда намного меньше хаотической тепловой скорости, поэтому заранее еще не очевидно, что наложение небольшой направленной скорости на хаотическое движение может привести к появлению отрицательной проводимости. Поэтому необходимо строгое вычисление тензора проводимости плазменной среды при наличии дрейфа.

Ниже тензор проводимости будет найден квазигидродинамическим методом, к которому может быть сведено строгое кинетическое рассмотрение, во всяком случае, в области малых частот.

Будем исходить из кинетического уравнения для электронной функции распределения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla_{\mathbf{r}} f + \frac{1}{m} \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} + S_1 f = 0. \quad (1.14)$$

Здесь  $\mathbf{F}$  — сила, действующая на электрон. Если в системе имеются только электрические и магнитные поля, то

$$\mathbf{F} = e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \right) \quad (1.15)$$

есть просто сила Лоренца. В случае электронно-дырочной плазмы, помимо силы Лоренца, на электрон (дырку) будет действовать и другая сила, обусловленная взаимодействием электрона с решеткой. Ниже мы еще вернемся к этому вопросу, а пока будем считать, что в среде имеется только электрическое поле  $\mathbf{E}_-$  и магнитное  $\mathbf{H}$ .

Решение кинетического уравнения (1.14) будем искать в виде разложения по полиномам Лежандра в пространстве скоростей

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_k P_k(\cos \alpha) f_k(\mathbf{r}, v, t), \quad (1.16)$$

где  $\alpha$  — угол, определяемый соотношением  $\cos \alpha = \frac{\mathbf{v} \mathbf{v}_d}{|\mathbf{v}| |\mathbf{v}_d|}$ . При определенных условиях (о которых речь пойдет ниже) для функции распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  можно ограничиться только первыми двумя членами разложения (1.16). Тогда нетрудно показать (см. [13], § 38 и [14]), что первые две функции  $f_0(\mathbf{r}, v, t)$  и  $f_1(\mathbf{r}, v, t)$  удовлетворяют следующей системе уравнений [15]:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v}{3} \operatorname{div}_{\mathbf{r}} f_1 + \frac{e}{3mv^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 \mathbf{E}_- f_1) + \hat{S}_0 f_0 = 0, \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \nabla_{\mathbf{r}} f_0 + \frac{e \mathbf{E}_-}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} + \frac{e}{mc} [\mathbf{H} f_1] + \hat{S}_1 f_1 = 0, \quad (1.18)$$

где  $\hat{S}_0 f_0$  и  $\hat{S}_1 f_1$  — преобразования Лежандра интеграла соударений [14].

Нас интересует комплексная проводимость среды по переменному полю волны при наличии дрейфа. «Включение» слабого переменного поля  $\mathbf{E}_- e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$  меняет функцию распределения, и у симметричной  $f_0(\mathbf{r}, v, t)$  и у несимметричной  $f_1(\mathbf{r}, v, t)$  частей функции распределения появляются малые добавки, вызванные волной

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_0 + \varphi(\mathbf{r}, v, t) + \frac{\mathbf{v}}{v}, \quad f_1 + \varphi_1(\mathbf{r}, v, t). \quad (1.19)$$

В линейном приближении по слабому полю волны  $\mathbf{E}_-$  уравнения для  $\varphi_0(\mathbf{r}, v, t)$  и  $\varphi_1(\mathbf{r}, v, t)$ , как это видно из выражений (1.17), (1.18), будут:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \frac{v}{3} \operatorname{div}_{\mathbf{r}} \varphi_1 + \frac{e}{3mv^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 \mathbf{E}_- \varphi_1) + \hat{S}_0 \varphi_0 = - \frac{e}{3mv^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 \mathbf{E}_- f_1), \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + v \nabla_{\mathbf{r}} \varphi_0 + \frac{e \mathbf{E}_-}{m} \frac{\partial \varphi_0}{\partial v} + \frac{e}{mc} [\mathbf{H} \varphi_1] + \hat{S}_1 \varphi_1 = \frac{e \mathbf{E}_-}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v}, \quad (1.21)$$

где в преобразованиях Лежандра интегралов соударений  $\hat{S}_0 \varphi_0$  и  $\hat{S}_1 \varphi_1$  стоит  $\varphi_0$  вместо  $f_0$  и  $\varphi_1$  вместо  $f_1$ \*. Функции  $f_0$  и  $f_1$ , входящие в систему

\* Это справедливо только для той формы интеграла соударений, которая является линейным оператором относительно функции распределения. Если он нелинейен, как например, будет при учете электрон-электронных соударений вида  $\hat{S} f$  и  $\hat{S} \varphi$  в выражениях (1.20), (1.21) и (1.17), (1.18) будут различны.

(1. 20), (1. 21), удовлетворяют уравнения (1. 17), (1. 18), решение которых в стационарном случае для однородной плазмы имеет вид [13—15]:

$$f_0(v) = \text{const exp} \left\{ - \int_0^v \frac{mv dv}{\kappa T - \frac{e^2 E_-^2}{3m\delta_{yn}v^2(v)}} \right\}, \quad (1. 22)$$

$$f_1(v) = \frac{e v^2 E_- + \Omega (\Omega E_-) - v [\Omega E_-]}{m v (\Omega^2 + v^2)} \frac{\partial f_0}{\partial v}. \quad (1. 23)$$

Здесь  $v$  — эффективная частота соударений электронов,  
 $\kappa$  — постоянная Больцмана,

$\Omega = \frac{eH}{mc}$  — циклотронная частота электронов,

$\delta_{yn} = 2m/M$ , где  $M$  — масса рассеивающего центра.

Для твердотельной плазмы, когда рассеяние носителей происходит, в основном, на тепловых и акустических колебаниях решетки (фононах), вместо массы тяжелой частицы  $M$ , в формулу входит  $\frac{\kappa T}{v_s^2}$  — эффективная масса фонона, где  $v_s$  — скорость звука в решетке [15].

Поскольку  $\varphi \sim e^{i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ , из системы уравнений (1. 20), (1. 21) может быть определена функция  $\varphi_1(\mathbf{k}, v, \omega)$  [16]:

$$\varphi_1 = \frac{1}{\Delta} [v'G - \Omega(\Omega G) - v'[\Omega G]], \quad (1. 24)$$

где  $\Delta = v'^3 \left( 1 + \frac{\Omega^2}{v'^2} \right)$ ,  $v' = v + i\omega$ , а вектор  $G$  равен

$$G = ikv\varphi_0 - \frac{eE_-}{m} \frac{\partial \varphi_0}{\partial v} - \frac{eE_-}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v}. \quad (1. 25)$$

Из определения плотности тока

$$\mathbf{j} = e \int \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v} \quad (1. 26)$$

следует, что тензор проводимости равен

$$\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = e \hat{L}_i \int_0^\infty v^3 \varphi_{1j}(v) dv, \quad (1. 27)$$

где  $\hat{L}_i$  — оператор, который отбирает члены, пропорциональные только компоненте поля  $E_{-i}$ ; ( $\hat{L}_i \sum a_{im} E_{-m} = a_{ij}$ ). Если теперь в выражение (1. 27) подставить значения из формулы (1. 24), то получим два типа интегралов от функций  $v^2 \varphi_0(v)$  и  $v^3 \varphi_0(v)$ , которые уравнением непрерывности связаны с интегралом от известной функции  $v^2 f_0(v)$ . Очевидно, что с точностью до коэффициента порядка единицы можно считать, что

$$\int_0^\infty v^4 \varphi_0(v) dv \approx v_T^2 \int_0^\infty v^2 \varphi_0(v) dv. \quad (1. 28)$$

Соотношение (1. 28) означает, что максимум функции  $\varphi_0(v)$  находится вблизи  $v = v_T$  — тепловой скорости частиц, что физически вполне разумно, так как направленная скорость — скорость дрейфа — намного меньше хаотической тепловой скорости частиц. Сравнение с одномерным случаем [17], который может быть рассчитан до конца, показывает, что

в соотношении (1.28) справа должен стоять множитель порядка трех. Легко показать, что предположение (1.28) эквивалентно квазигидродинамическому рассмотрению при изотропном давлении [13].

Подставляя выражение (1.24) в (1.27) и используя уравнение (1.28), получим выражение для тензора проводимости среды [17]:

$$\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \sigma_0 \frac{v}{\Lambda} \hat{L}_i \frac{A_{\sim j} - \frac{e}{m\Delta\omega} [(A_{\sim} A_{\sim}) \mathbf{k}]_j - \frac{iv_T^2}{\omega\Lambda} [(PA_{\sim}) \mathbf{k}]_j}{1 - \frac{e(\mathbf{k}A_{\sim})}{m\omega\Lambda} - \frac{iv_T^2}{\omega\Lambda} (\mathbf{k}P)}, \quad (1.29)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{e^2}{3m\nu} \int_0^\infty v^2 f_0(v) dv$$

— проводимость среды по постоянному току, а векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{P}$  равны

$$\mathbf{A} = v^2 \mathbf{E} + \Omega(\Omega \mathbf{E}) - v'[\Omega \mathbf{E}], \quad \mathbf{P} = v' \mathbf{k} + \Omega(\Omega \mathbf{k}) - v'[\Omega \mathbf{k}].$$

Рассмотрим некоторые частные случаи формулы (1.24). При отсутствии магнитного поля для чисто продольной волны (1.1) имеем

$$\sigma_{\parallel}(\omega, \mathbf{k}) = \sigma_0 \frac{1}{1 - \frac{kv_d}{\omega} - \frac{iv_T^2 k^2}{\omega v}}, \quad (1.30)$$

где  $v_d = \frac{eE_{\sim}}{m\nu}$  — скорость дрейфа электронов.

Как и следовало ожидать, выражение (1.30) отличается от формулы (1.6) только конечной шириной резонанса при  $v_d = v_f$ . С другой стороны, предельный переход к случаю, когда пространственная дисперсия отсутствует, дает известный результат [13—18]:

$$\text{Re } \sigma_{\parallel}(\omega, 0) = \sigma_0, \quad \text{Re } \varepsilon_{\parallel}(\omega, 0) = 1 + \frac{4\pi e^2 n_0}{m\nu^2}.$$

Наоборот, при отсутствии направленного движения частиц, когда пространственная дисперсия, существенна

$$\text{Re } \sigma_{\parallel}(0, \mathbf{k}) = \sigma_0, \quad \text{Re } \varepsilon_{\parallel}(0, \mathbf{k}) = 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2},$$

где  $r_D = \sqrt{\frac{\kappa T}{4\pi e^2 n_0}}$  — дебаевский радиус экранирования.

Ниже мы увидим, что выражение для проводимости (1.29) справедливо только в области малых частот, так что векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{P}$  и детерминант  $\Delta$  можно считать чисто вещественными величинами, и тогда нетрудно выделить действительную и мнимую части тензора диэлектрической проницаемости. В итоге действительная часть тензора проводимости меняет свой знак, когда направленная скорость электронов превышает фазовую скорость волны, т. е.

$$\frac{e(\mathbf{k}A_{\sim})}{m\Delta} > \omega.$$

Для очень сильного магнитного поля, когда  $\Omega \gg v$  это соотношение означает, что  $cE/H > (\omega/k)$ .

Это же выражение для комплексного тензора диэлектрической проницаемости может быть получено и из квазигидродинамической системы [13]:

$$m n \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = e \mathbf{E} - \nabla P - m n \mathbf{v} \mathbf{v}, \quad (1.31)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n \mathbf{v} = 0,$$

где  $n(\mathbf{r}, t)$  — концентрация электронов;  
 $P$  — давление электронного газа;  
 $P = nkT$  — как и для идеального газа.

В том случае, когда электронный газ находится в вырожденном состоянии, т. е.  $kT \ll \varepsilon_F$ , где  $\varepsilon_F$  — энергия Ферми, градиент давления  $\nabla P$  будет [19]:

$$\nabla P = \frac{m}{3} v_F^2 \nabla n, \quad (1.32)$$

где  $v_F$  — фермиевская скорость, и, как это нетрудно показать из уравнений (1.31), окончательное выражение для комплексного тензора диэлектрической проницаемости будет отличаться от выражения (1.29) только тем, что вместо тепловой скорости электронов  $v_T$  в результате войдет  $\frac{1}{\sqrt{3}} v_F$ .

Рассмотрим теперь условие применимости разложения (1.16) и роль частоты соударений.

Как показано в книге Гинзбурга [13], система (1.17), (1.18) для однородной плазмы применима, когда

$$\frac{e^2 E^2}{k T_e (v^2 + \omega^2)} \approx \delta_{yn} \ll 1, \quad (\delta_{yn} = \frac{2m}{M}), \quad (1.33)$$

т. е. практически всегда. Соотношение (1.33), если не рассматривать особые случаи зависимости частоты соударений  $\nu(v)$  от скорости ([13], § 38), выполняется во всей области частот как больших  $\omega > \nu$ , так и малых  $\omega < \nu$ .

Однако, если среда не однородна, т. е.  $\partial \varphi / \partial r \neq 0$ , условие применимости системы (1.17), (1.18) другое: функции  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  и т. д. в разложении (1.16) можно отбрасывать только в случае, когда

$$\left| \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} \right| \gg \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right|. \quad (1.34)$$

Далее, следуя работам [13, 14], из уравнения для  $\varphi_2$  находим, что  $\varphi_2 \sim \left| \frac{\langle v \rangle}{v'} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right|$ , если поле  $E$  слабое; при сильном поле  $\varphi_2 \sim \frac{eE}{m} \left| \frac{\langle v \rangle}{v'} \varphi_1 \right|$ , где  $\langle v \rangle$  означает среднее значение скорости. Из системы (1.17), (1.18) оцениваем  $\varphi_1$  и  $\varphi_0$ , полагая при этом  $S_0 \varphi_0 \sim \delta_{yn} v' f_0$ . В результате для условия (1.34) получаем

$$(\omega^2 + \delta_{yn} v^2)^{-\frac{1}{2}} \gg (\omega^2 + v^2)^{-\frac{1}{2}},$$

что фактически означает

$$\omega \ll \nu, \quad \delta_{yn} \ll 1. \quad (1.35)$$

Условия (1.35) ограничивают степень нестационарности и неоднородности в плазме, другими словами, энергия и плотность электронов не должны существенно меняться за время  $t \sim \frac{M}{m} \nu^{-1}$ .

С другой стороны, в области больших частот, когда  $\omega \gg v$  и соударениями можно пренебречь, кинетическое уравнение для малого отклонения от равновесной функции распределения будет:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} + \frac{eE}{m} \frac{\partial f_{00}}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (1.36)$$

где  $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  — малое отклонение от равновесной функции. В случае малых частот, когда соударения играют определяющую роль как для равновесной функции распределения, так и для токовой добавки, обусловленной волной, получаем полную систему уравнений [(1.17), (1.18) и (1.20), (1.21)]. Однако в области больших частот получить полную систему уравнений для определения как равновесной, так и неравновесной функций распределения мы не можем. Поэтому вид равновесной функции распределения обычно постулируют: если внешнего поля нет, то в качестве  $f_{00}$  выбирают максвелловскую или фермиевскую функции распределения, при наличии же внешнего поля можно, например, взять «смещенное» максвелловское распределение:

$$f_{00}(\mathbf{v}) \sim e^{-\frac{(\mathbf{v} - \mathbf{v}_d)^2}{2\kappa T}}.$$

В области больших частот выражение для проводимости, как это следует из выражения (1.36), будет

$$\sigma_{\parallel}(\omega, k) \sim i \int d\mathbf{v} \frac{\partial f_{00}}{\partial \mathbf{v}} \frac{1}{\omega - k\mathbf{v}}. \quad (1.37)$$

Выражение (1.37) также меняет знак при  $v_d > \omega/k$ , где  $v_d$  — некоторая направленная скорость. В литературе имеется много работ (см. например, [18, 20—29]), посвященных появлению неустойчивости без столкновений, когда направленная скорость частиц превышает фазовую скорость волн. Появление нарастающих волн при этом обусловлено черенковским излучением волны отдельной частицей или пучком заряженных частиц. В отличие от этого при малых частотах, когда  $\omega \ll v$ , роль излучателя играет не одна частица или пучок, а область пространственного заряда, которая движется со скоростью, превышающей фазовую скорость волн. Это непосредственно видно из выражения для продольной проводимости

$$\sigma_{\parallel}(\omega, k) = \frac{3e^2 E_{\perp}}{m\nu E_{\perp}} \int_0^{\infty} v^2 \varphi_0 dv + \frac{ik_{\parallel}}{E_{\perp} v} \int_0^{\infty} v^4 \varphi_0 dv + \frac{3e^2}{m\nu} \int_0^{\infty} v^2 f_0 dv. \quad (1.38)$$

Изменение знака  $\sigma_{\parallel}(\omega, k)$  зависит от первого члена в выражении (1.38), т. е. от величины, пропорциональной  $v_d q_{\perp}$ ,

где

$$q_{\perp} \equiv e \int_0^{\infty} v^2 \varphi_0(v) dv, \quad (1.39)$$

т. е. от объемного заряда.

Чтобы проиллюстрировать различие в механизме раскачки волн на малых и больших частотах, рассмотрим задачу о раскачке продольных колебаний в электронно-ионной плазме.

Как показали Коврижных и Рухадзе [30], инкремент нарастания продольных волн (ионного звука) в плазме без столкновений слабо зависит от концентрации электронов в пучке (имеется даже область изменения кон-

центрации электронов, в которой инкремент нарастания ионного звука вообще не зависит от последней). В отличие от этого на малых частотах, как показывает анализ дисперсионного уравнения, для раскачки ионного звука в плотной плазме нарастание волны в значительной степени зависит от концентрации электронов.

Реальная часть проводимости в области частот  $(\omega/v) \sim \delta_{yp} \sim \frac{2\pi}{M}$  начинает уменьшаться, что обусловлено диффузией объемного заряда. Из системы (1.20), (1.21) следует, что  $q_{\sim}$  удовлетворяет уравнению диффузии с эффективным временем  $\tau_d \approx \frac{mv}{3kT_e}$ . Если  $\tau_d > 1/\omega$ , то за время, равное периоду волны, объемный заряд не успевает образоваться, и проводимость падает. Условие  $\tau_d \geq 1/\omega$  фактически означает, что  $\omega/v \geq \delta_{yp}$ .

В квазигидродинамическом рассмотрении, приведенном выше, не учтена зависимость частоты соударений от скорости. Разумеется, получить какие-либо количественные результаты, когда неизвестен явный вид зависимости  $\nu(v)$  и функции распределения, невозможно. Необходимо предварительно решить кинетическое уравнение. Однако некоторые соображения о том, как качественно влияет зависимость  $\nu(v)$  на проводимость плазменной среды при малых частотах могут быть высказаны [16].

Можно показать, что и при учете зависимости частоты столкновений от скорости (при наличии направленного движения частиц в среде) проводимость может изменить знак [16]. Скорость дрейфа при этом определяется через некоторую эффективную частоту столкновений, зависящую, разумеется, от преобладающего типа рассеяния. Вид зависимости  $\nu(v)$ , однако, значительно влияет на температурную зависимость проводимости.

Граничное значение частоты, при которой активная проводимость падает, по-разному будет зависеть от температуры для того или иного типа рассеяния. Например, при рассеянии на нейтральных молекулах, когда

$$\nu(v) = \pi a^2 N_m v$$

( $a$  — «радиус» молекулы,  $N_m$  — концентрация) граничное значение частоты, при которой активная часть проводимости падает, будет пропорциональным  $T_e^{-1/2}$ , т. е. с увеличением температуры падение проводимости происходит при более низких частотах [16]. Наоборот, при рассеянии на заряженном ионе или на заряженной примеси граничное значение частоты оказывается пропорциональным  $T_e^{1/2}$ .

Таким образом, в зависимости от вида функции  $\nu(v)$  температурная зависимость продольной части тензора проводимости может изменяться. Граничное значение скорости дрейфа, при котором поглощение сменяется усилением, также будет зависеть от вида функции  $\nu(v)$ . Заметим, что зависимость тензора проводимости плазменной среды, в которой происходит направленное движение частиц от  $\nu(v)$  пока еще последовательно не рассматривалась.

#### Вычисление тензора проводимости с помощью кинетического уравнения

Как уже указывалось, квазигидродинамическое рассмотрение применимо только при выполнении условия  $\omega/v < \delta_{yp}$ , т. е. на сравнительно малых частотах. С целью рассмотрения вопроса о затухании и усилении высокочастотных упругих волн в полупроводниках, вычислим тензор проводимости, который можно было бы использовать и на больших частотах.

Вместо реального полупроводника рассмотрим газ электронов (дырок) плотности  $n_0$ , который движется через однородный положительный «фон» той же плотности. Функция распределения электронов определяется из решения кинетического уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} + \text{St} f = 0, \quad (1.40)$$

где  $\mathbf{F}$  — сила, действующая на электрон,

$$\mathbf{F} = -e(\mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-);$$

St — оператор столкновений.

Изменение функции распределения из-за соударений будем учитывать с помощью времени релаксации  $\tau$

$$\text{St} f = -\frac{f - f_{0s}}{\tau}, \quad (1.41)$$

где  $f_{0s}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  — сферически симметричная часть функции распределения.

При таком подходе соударения, которые приводят к появлению пар — электрона и дырки, а также к процессам рекомбинации и захвата, не учитываются. Формально все выводы справедливы для бесконечно большого времени жизни носителей, однако можно предполагать, что и при конечном времени жизни носителей основные качественные результаты не изменятся.

Наличие упругой волны в кристалле приводит к тому, что рассеяние носителей происходит на движущемся центре (например, примеси), и поэтому сферически симметричная часть функции распределения в пространстве скоростей должна быть симметрична в той системе координат, в которой находится рассеивающий центр, т. е.

$$f_{0s}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_{0s}(\mathbf{v} - \mathbf{w}(\mathbf{r}, t), \varepsilon_F(\mathbf{r}, t)). \quad (1.42)$$

Здесь  $\mathbf{w}(\mathbf{r}, t)$  — скорость рассеивающего центра,  $\varepsilon_F(\mathbf{r}, t)$  — энергия Ферми, выбранная так, чтобы локальной электронной плотности  $n(\mathbf{r}, t)$  можно было придать требуемое значение [31]. Выражение (1.42) удобно разложить в ряд Тейлора по малому возмущению, вызванному волной,

$$f_{0s} = f_{00} - \frac{\partial f_{00}}{\partial \varepsilon} (m\mathbf{v}\mathbf{w} + \Delta\varepsilon_F), \quad (1.43)$$

где  $f_{00}$  — распределение Ферми,  $\Delta\varepsilon_F$  — изменение уровня Ферми вследствие образования объемного заряда, а

$$\Delta\varepsilon_F = \varepsilon_F(\mathbf{r}, t) - \varepsilon_F^0 = \frac{2}{3} \frac{n_-(\mathbf{r}, t)}{n_0} \varepsilon_F^0. \quad (1.44)$$

Полную функцию распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  представим в виде

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_{00} + f_{01} + \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (1.45)$$

где  $f_{01}(\mathbf{v})$  — токовая добавка к равновесной функции распределения, которая вызвана внешним постоянным электрическим полем. Эта часть функции распределения постоянна во времени и пространстве.  $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  — часть функции распределения, которая полностью вызвана волной, и поэтому пропорциональна  $e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ . Подставляя выражения (1.42),

(1.43) и (1.45) в кинетическое уравнение (1.40) и решая его методом последовательных приближений, найдем [32]:

$$f_{01}(\mathbf{v}) = -m(\mathbf{v}\mathbf{v}_d) \frac{\partial f_{00}}{\partial \mathbf{v}}, \quad \mathbf{v}_d = -\frac{e}{m} \tau \mathbf{E}_- \quad (1.46)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega) = & \frac{\frac{\partial f_{00}}{\partial \mathbf{v}}}{1 + i\omega\tau - i\tau(\mathbf{k}\mathbf{v})} \left\{ e\tau \left( \mathbf{E}_- - \frac{m\boldsymbol{\omega}}{e\tau} \right) \mathbf{v} - \frac{2}{3} \frac{n_-}{n_0} e_F^0 - \right. \\ & \left. - e\tau (\mathbf{E}_- \mathbf{v}_d) - \frac{e\tau \left( \mathbf{E}_- - \frac{m\boldsymbol{\omega}}{e\tau} \right) \mathbf{v}_d + i(\mathbf{k}\mathbf{v}_d) \left[ e\tau \left( \mathbf{E}_- - \frac{m\boldsymbol{\omega}}{e\tau} \right) \mathbf{v} - \frac{2}{3} \frac{n_-}{n_0} e_F^0 \right]}{1 + i\omega\tau - i\tau(\mathbf{k}\mathbf{v})} \right\} - \\ & - \frac{m(\mathbf{v}_d \mathbf{v}) \frac{\partial^2 f_{00}}{\partial \mathbf{v}^2}}{1 + i\omega\tau - i\tau(\mathbf{k}\mathbf{v})} \left[ e\tau (\mathbf{E}_- \mathbf{v}) + e\tau \frac{\left( \mathbf{E}_- - \frac{m\boldsymbol{\omega}}{e\tau} \right) \mathbf{v} - \frac{2}{3} \frac{n_-}{n_0} e_F^0}{1 + i\omega\tau - i\tau(\mathbf{k}\mathbf{v})} \right]. \quad (1.47) \end{aligned}$$

При вычислении функций (1.46) и (1.47) удержаны только линейные члены как по переменному полю волны  $\mathbf{E}_-$ , так и по постоянному полю  $\mathbf{E}_-$  и, кроме того, использовано условие  $v_d \ll v_F$ .

Электронный ток может быть получен из функции распределения обычным образом

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = e \int \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v}. \quad (1.48)$$

Подставляя в формулу (1.48) значения функции распределения из выражений (1.46) и (1.47), получим для компоненты Фурье тока [32]:

$$j_i(\omega, \mathbf{k}) = a_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_{-j} - b_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \frac{m\omega_j}{e\tau} - en_-(\omega, \mathbf{k}) V_i. \quad (1.49)$$

Здесь

$$a_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = -e^2\tau \int \frac{d^3\mathbf{v}}{z} \frac{\partial f_{00}}{\partial \mathbf{v}} \left[ v_i v_j + \left( 1 + \frac{1}{z} \right) v_i \left( v_j \frac{i\tau \mathbf{k}\mathbf{v}_d}{z} + v_{dj} \right) \right], \quad (1.50)$$

$$b_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = -e^2\tau \int \frac{d^3\mathbf{v}}{z} \frac{\partial f_{00}}{\partial \mathbf{v}} \left[ v_i v_j \left( 1 + \frac{i\tau}{z} (\mathbf{k}\mathbf{v}_d) \right) + \frac{1}{z} v_i v_{dj} \right], \quad (1.51)$$

$$V_j(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{2}{3} \frac{e_F^0}{n_0} \int \frac{d^3\mathbf{v}}{z} \frac{\partial f_{00}}{\partial \mathbf{v}} \left[ v_j \left( 1 + \frac{i\tau}{z} (\mathbf{k}\mathbf{v}_d) \right) + \frac{1}{z} v_{dj} \right], \quad (1.52)$$

где  $z = 1 + i\omega\tau - i\tau(\mathbf{k}\mathbf{v})$ .

Выражение для тока (1.49) по структуре аналогично выражению (1.2). Первый член в формуле (1.49) — это индуцируемый электрическим полем волны ток при условии, что в решетке нет упругих волн и что волна не возмущает плотность носителей (уровень Ферми не смещается). Второй член в формуле (1.49) — это ток, образованный только столкновительным механизмом из-за рассеяния носителей на движущемся центре. Действительно, при скорости рассеивающего центра, стремящейся к нулю ( $\boldsymbol{\omega} \rightarrow 0$ ), или при отсутствии соударений ( $\tau \rightarrow \infty$ ), этот ток исчезает. Последний член в выражении (1.49) — это ток объемного заряда.

Неравновесную плотность носителей  $n_-(\mathbf{r}, t)$  также можно определить с помощью функции распределения

$$n_-(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v} - n_0,$$

однако проще воспользоваться уравнением непрерывности (1.3).

Для определения тензора проводимости в явном виде необходимо найти коэффициенты  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  и вектор  $V$ . При низких температурах функция Ферми близка к ступенчатой функции, а ее производная к  $\delta$  — функции от аргумента  $(\epsilon - \epsilon_F^0)$ . Поэтому для произвольной функции справедливо следующее соотношение:

$$\int d^3v \frac{\partial f_{00}}{\partial \epsilon} g(\mathbf{v}) = -\frac{3}{8\pi} \frac{n_0}{\epsilon_F^0} \int d\Omega(\mathbf{v}_F), \quad (\kappa T \ll \epsilon_F) \quad (1.53)$$

где  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ .

Будем считать, что векторы  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{v}_d$  параллельны. Исследовать общий случай не представляет особого интереса, поскольку нормальная к вектору составляющая дрейфа не сказывается на усилении и затухании волны [32]. Исключая с помощью уравнения непрерывности (1.3), неравновесную плотность носителей  $n_-(\mathbf{r}, t)$  найдем для тока следующее выражение:

$$j_i(\omega, \mathbf{k}) = \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j - S_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \frac{m\omega_j}{\epsilon\tau}, \quad (1.54)$$

где тензор проводимости  $\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  и тензор  $S_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  равны

$$\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = a_{ij} + \frac{V_i k_j \rho_{ij}}{\omega - (\mathbf{kV})}, \quad S_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = b_{ij} + \frac{V_i k_j b_{ij}}{\omega - (\mathbf{kV})}. \quad (1.55)$$

С помощью соотношения (1.53) нетрудно найти тензоры  $a_{ij}$  и  $S_{ij}$  в явном виде и вектор  $V$ :

$$a_{xx} = 3\sigma_0 \left[ \frac{1+i\omega\tau}{(kl)^2} \rho + \frac{v_d}{v_F} \left[ \frac{\rho-1}{ikl} + \frac{1+i\omega\tau}{ikl(1+k^2l^2)} + \frac{i\omega\tau(1+i\omega\tau)^2 - k^2l^2(1-\omega^2\tau^2)}{ikl[1+(kl)^2]^2} \right] \right]; \quad (1.56a)$$

$$a_{yy} = a_{zz} = -3\sigma_0 \left[ \frac{1+i\omega\tau}{2k^2l^2} \rho + \frac{1}{4} \left( \frac{v_d}{v_F} + \frac{1}{ikl} \right) \ln \frac{1+i\omega\tau - ikl}{1+i\omega\tau + ikl} - \frac{1}{2} \frac{v_d}{v_F} \frac{2k^2l^2 - 1 - i\omega\tau}{ikl[1+k^2l^2]} \right]; \quad (1.56b)$$

$$b_{xx} = 3\sigma_0(1+i\omega\tau) \left[ \frac{\rho}{(kl)^2} + i \frac{v_d}{v_F} \frac{kl}{(1+k^2l^2)^2} \right]; \quad (1.57a)$$

$$b_{yy} = b_{zz} = -3\sigma_0 \left[ \frac{1+i\omega\tau}{2k^2l^2} \rho + \left( \frac{v_d}{v_F} + \frac{1}{ikl} \right) \ln \frac{1+i\omega\tau - ikl}{1+i\omega\tau + ikl} - \frac{1}{2} \frac{v_d}{v_F} \frac{1+i\omega\tau}{ikl(1+k^2l^2)} \rho \right]; \quad (1.57b)$$

$$V_x = -v_F \frac{\rho}{ikl} + v_d \frac{1+2k^2l^2}{(1+k^2l^2)^2}, \quad V_y = V_z = 0, \quad (1.58)$$

где направление  $x$  соответствует вектору  $\mathbf{k}$ ;  $l = \tau v_F$  — длина свободного пробега электронов  $\sigma_0 = \frac{e^2 n_0}{m\nu}$ , а функция  $\rho$

$$\rho = 1 + \frac{1+i\omega\tau}{2ikl} \ln \frac{1+i\omega\tau - ikl}{1+i\omega\tau + ikl}. \quad (1.59)$$

При вычислении выражений (1.56)–(1.58), как и при решении кинетического уравнения (1.40), было использовано условие  $v_d \ll v_F$ .

Для выяснения физического смысла полученных формул и сравнения с результатами, приведенными в предыдущем разделе, рассмотрим предельные значения. Прежде всего отметим, что функция

$$\rho = \begin{cases} \frac{1}{3}(kl)^2 & \text{для } kl \ll 1 \\ 1 - \frac{\pi}{2kl}(1 + i\omega\tau) & \text{для } kl \gg 1 \end{cases} \quad (1.60)$$

В предельном случае малых частот, когда  $kl \ll 1$ , вектор  $V$  стремится к значению  $V_x = v_d + \frac{i}{3}klv_F$ , поэтому продольная компонента тензора проводимости будет

$$\sigma_{xx}(\omega, \mathbf{k}) = \sigma_0 \frac{1}{1 - \frac{kv_d}{\omega} - \frac{ik^2 v_F^2}{3\omega\tau}}, \quad (1.61)$$

т. е. она совпадает с результатом квазигидродинамического рассмотрения (см. формулу (1.30) и замечания на стр. 13). В области больших частот, когда длина свободного пробега намного больше длины волны, вектор  $V$  стремится к значению  $V_x = \frac{i}{kl}v_F \left(1 - \frac{\pi(1+i\omega\tau)}{2kl}\right)$ , не зависящему от направленной скорости электронов. В этих же условиях выражение для тока (1.49) определяется, главным образом, первым членом, в то время как ток, обусловленный объемным зарядом, стремится к нулю. Это обстоятельство указывает на то, что излучение и усиление волн происходит уже не вследствие излучения Черенкова объемного заряда, как это было на малых частотах, а скорее из-за «пучковой» неустойчивости [20—29] (т. е. вследствие когерентного излучения Черенкова отдельных электронов). В области  $kl \gg 1$  продольная проводимость будет

$$\sigma_{xx}(\omega, \mathbf{k}) = a_{xx}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{3\sigma_0}{(kl)^2} \left[ \frac{\pi}{2} \frac{\omega^2 \tau^2}{(kl)^2} \left(1 - \frac{kv_d}{\omega}\right) + i\omega\tau \right]. \quad (1.62)$$

Таким образом, и в области больших частот, когда длина волны намного меньше длины свободного пробега,  $kl \gg 1$ , реальная часть проводимости становится отрицательной, когда дрейф электронов превышает фазовую скорость волны. Заметим, что переходить к пределу бесконечно большой длины свободного пробега в окончательных выражениях для проводимости (1.55)—(1.58) нельзя. Действительно, выражения (1.55)—(1.58) были получены с использованием соотношения (1.53). При  $\tau \rightarrow \infty$  в выражениях (1.56) появляются полюсные знаменатели  $(\omega - kv)$ , в силу чего интегрирование по  $v$  с помощью выражения (1.53) становится неприменимым. В этом случае, как известно [33], интегрирование по действительной оси следует заменить интегрированием по контуру, обходящему сверху полюс  $\omega = kv$

$$a_{ij} \sim ie^2 \int_{\Omega} \frac{d^3v}{\omega - kv} \frac{\partial f_0}{\partial v} \left( v_i v_j - \frac{ikv_d}{\omega - kv} v_i v_j \right)$$

$\tau \rightarrow \infty$

и при отсутствии дрейфа, т. е. при  $v_d = 0$ , из последней формулы следует известный результат Ландау [33] для продольной проницаемости бесстолкновительной плазмы.

Значения (1.56)—(1.58) позволяют найти проводимость, соответствующую «столкновительному» току. В области  $kl \ll 1$  имеем  $S_{xx}(\omega,$

$\mathbf{k}) = \sigma_{xx}(\omega, \mathbf{k})$ , где  $\sigma_{xx}(\omega, \mathbf{k})$  определяется формулой (1.61). В предельном случае больших частот, когда  $kl \gg 1$ , для  $S_{xx}(\omega, \mathbf{k})$  получим

$$S_{xx} = \frac{3\sigma_0 i \omega \tau}{(kl)^2} \left[ 1 - \frac{i \omega \tau}{kl} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{kv_d}{\omega} \frac{1}{kl} \right) \right].$$

Последнее выражение показывает, что на больших частотах столкновительный механизм не дает возможности усилить волны. Физически это вполне понятно, так как при  $kl \gg 1$  электрон почти свободен и взаимодействие его с волной решетки из-за соударений не происходит.

При высокой температуре, когда  $kT \gg e\phi$ , равновесная часть функции распределения  $f_{00}$  является уже функцией Максвелла и интегрирование по модулю вектора скорости  $v$  с помощью уравнения (1.53) становится неприменимым. Продольная проводимость в этом случае может быть рассчитана по методу Эискога путем разложения функции распределения в ряд [17, 34]. В итоге для проводимости найдем [17, 34]:

$$\sigma_{xx}(\omega, \mathbf{k}) = \sigma_0 \frac{1 + 2i\omega\tau\gamma(\omega, \mathbf{k}, v_T) \frac{v_d}{v_\phi}}{1 - \frac{v_d}{v_\phi} - i\omega\tau \frac{v_T^2}{v_\phi^2} - 2i\omega\tau \frac{v_d}{v_\phi} \gamma + 2\omega^2\tau^2 \frac{v_T^2}{v_\phi^2} \gamma}, \quad (1.63)$$

где для функции  $\gamma(\omega, \mathbf{k}, v_T)$ , входящей в выражение (1.63), было получено разложение в виде цепной дроби

$$\gamma = \frac{1}{2\mu + i\omega\tau} + \frac{3\omega\tau \left( \frac{2\omega\tau}{\mu} - i\beta \right)}{1 + 3\mu + i\omega\tau} + \frac{4\omega\tau \left( \frac{2\omega\tau}{\mu} - i\beta \right)}{4\mu + i\omega\tau} + \dots \quad (1.64)$$

Здесь  $\mu = \frac{1}{2} v_\phi^2 / v_T^2$ ,  $\beta = v_d / v_\phi$ ,  $v_\phi = \omega / k$ . В области малых частот выражение (1.64) приводит к уже известному результату (1.30). Что касается области больших частот, когда  $kl \geq 1$ , то в этом случае формула (1.63) была исследована численным методом, и результаты представлены на рис. 1. Для вычислений было принято  $\tau \approx 10^{-12}$  сек,  $\mu \approx 3.86 \cdot 10^{-4}$ , что примерно соответствует параметрам кристалла CdS при комнатной температуре [1].

Из рисунка видно, что активная проводимость при любых частотах меняет знак при  $v_d = v_\phi$ . При малых частотах наблюдаются резонансные всплески активной проводимости, достигающие весьма больших значений. Высота всплеска падает с частотой, и на больших частотах зависимость проводимости от скорости дрейфа близка к прямой  $\sigma_{xx} \sim 1 - \frac{v_d}{v_\phi}$ . Это совпадает с результатом для вырожденного электронного газа (1.62).

Исследуем теперь проницаемость плазменной среды во внешнем магнитном поле.

При наличии магнитного поля сила, действующая на электрон, будет  $F = e(E + E_-) + \frac{e}{c} [vH]$ , где  $H$  — внешнее постоянное магнитное поле. Систему координат выберем так, чтобы ось  $z$  была направлена вдоль магнитного поля  $H$ , а ось  $y$  направим вдоль результирующего электрического поля  $E = E_- + E_H$ , где  $E_H$  — поле Холла ( $E_-$  перпендикулярно  $H$ , поэтому результирующее поле  $E$  тоже перпендикулярно вектору  $H$ ). При таком выборе координатной системы электрон или дырка будут дрейфовать в направлении оси  $x$  со скоростью  $v_d = c |EH|/H^2$ .

Следуя работам Чемберса [35], решение кинетического уравнения (1.50) будем искать в виде

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \int_{-\infty}^t f_0(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t') e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \frac{dt'}{\tau}. \quad (1.65)$$

Эта запись означает, что в момент времени  $t = -\infty$  функция распределения была  $f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ . Разложим  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  в ряд Тейлора:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_{00}(\epsilon) + \varphi_1 + \varphi_2,$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — добавки к равновесной функции  $f_{00}(\epsilon)$ , вызванные внешними электрическими и магнитными полями и наличием волны:  $\varphi_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  — это линейная по полю часть функции распределения,  $\varphi_2(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  — квадратичная, необходимость учета которой обусловлена кросс-членом  $E \cdot E$ .

Функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  равны:

$$\varphi_1 = \frac{\partial f_{00}}{\partial \epsilon} \int_{-\infty}^t [\Delta \epsilon - m(\mathbf{v}' \cdot \boldsymbol{\omega}') - (\epsilon_F' - \epsilon_F^0)] e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \frac{dt'}{\tau}, \quad (1.66a)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_{00}}{\partial \epsilon^2} \int_{-\infty}^t [\Delta \epsilon - m(\mathbf{v}' \cdot \boldsymbol{\omega}') - (\epsilon_F' - \epsilon_F^0)]^2 e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \frac{dt'}{\tau}, \quad (1.66b)$$

где штрих означает, что соответствующая величина должна быть взята в момент времени  $t'$ ,  $\Delta \epsilon = \epsilon(\mathbf{v}') - \epsilon(\mathbf{v})$  — изменение энергии электрона вследствие наличия постоянного электрического поля и волны. Очевидно, что

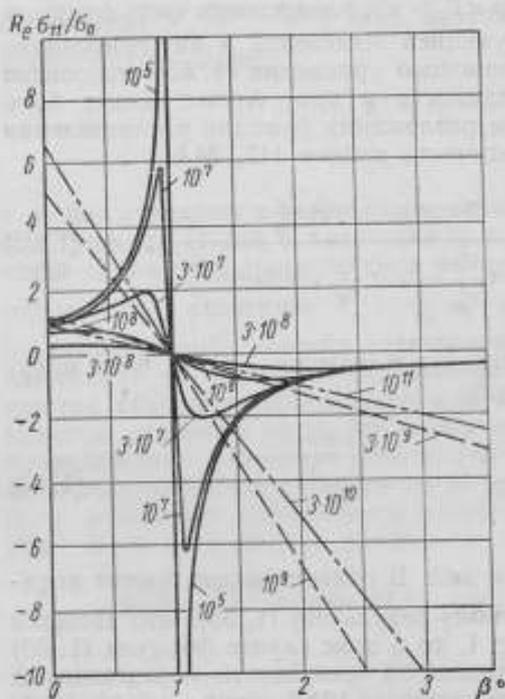


Рис. 1. Зависимость реальной части проводимости от скорости дрейфа  $\beta = \frac{v_d}{v_{\phi}}$ . Цифры на кривых обозначают частоту волны  $\omega$ . Для пунктирных и штрихпунктирных линий масштаб по оси ординат увеличен соответственно в  $10^2$  и  $10^4$  раза.

$$\int_{-\infty}^t \Delta \epsilon e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \frac{dt'}{\tau} = e\tau \int_{-\infty}^t (E_{\sim} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}') e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \frac{dt'}{\tau}. \quad (1.67)$$

Используя далее уравнения движения заряженных частиц в скрещенных электрическом и магнитном полях (см. например, [36], § 22) и тождество

$$\int_{-\infty}^t g(t') e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \frac{dt'}{\tau} = g(t) - \tau \int_{-\infty}^t \frac{dg}{dt'} e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \frac{dt'}{\tau}, \quad (1.68)$$

получим

$$-e \int_{-\infty}^t (E\mathbf{v}') e^{-\frac{t-t'}{\tau}} dt' = e \frac{v_d \tau \Omega}{1 + \Omega^2 \tau^2} \int_{-\infty}^t (\Omega \tau E_{-x'} + E_{-y'}) e^{-\frac{t-t'}{\tau}} dt' - \\ - e \tau E_y \frac{v_y - \Omega \tau v_x}{1 + \Omega^2 \tau^2}, \quad (1.69)$$

где  $\Omega$  — циклотронная частота электронов. Подставляя теперь выражения (1.67) и (1.69) в (1.65) и (1.66) и используя соотношения (1.54) и (1.67) для функций  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , получим [4, 37]

$$\varphi_1(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial f_{00}}{\partial v} \frac{m \Omega \tau v_d}{1 + \Omega^2 \tau^2} (v_y - \Omega \tau v_x) - \frac{\partial f_{00}}{\partial v} \int_{-\infty}^t \left[ e \tau (E_- + \frac{m \mathbf{w}}{e \tau} \mathbf{v}') + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \frac{n_-}{n_0} e_F^0 - \frac{e \tau^2 \Omega v_d}{1 + \Omega^2 \tau^2} (\Omega \tau E_{-x'} - E_{-y'}) \right] e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \frac{dt'}{\tau}, \quad (1.70)$$

$$\varphi_2(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial^2 f_{00}}{\partial v^2} \int_{-\infty}^t \left\{ m(\mathbf{v}_d, \mathbf{v}' - \mathbf{v}) \left[ (e \tau E_- + m \mathbf{w}', \mathbf{v}') + \frac{2}{3} \frac{n_-}{n_0} e_F^0 \right] - \right. \\ \left. - e m v_d \Omega \tau^2 (E_- \mathbf{v}') \frac{v_y - \Omega \tau v_x}{1 + \Omega^2 \tau^2} \right\} e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \frac{dt'}{\tau}. \quad (1.71)$$

При выводе выражений (1.70) и (1.71) мы пренебрегли всеми квадратичными членами по полю  $E_-$  и по полю волны  $E_-$ .

Первый член в формуле (1.70) — это токовая добавка к равновесной функции распределения, которая определяет постоянный ток в системе, и для нас поэтому не представляет интереса.

В выбранной выше координатной системе величины  $\mathbf{v}' = \mathbf{v}(t')$ ,  $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t')$  и  $\mathbf{v}(t)$ ,  $\mathbf{r}(t)$  связаны следующими соотношениями

$$v_x' = v_{\perp} \cos [\Omega(t-t') + \Phi] - v_d \cos \Omega(t-t') + v_d, \\ v_y' = v_{\perp} \sin [\Omega(t-t') + \Phi] - v_d \sin \Omega(t-t'), \\ v_z = v_{\parallel}, \quad v_{\perp} = v \sin \theta, \quad v_{\parallel} = v \cos \theta, \quad v_d = c \frac{E}{H}, \quad (1.72)$$

$$x' = x + \frac{v_{\perp}}{\Omega} \left\{ \sin [\Omega(t-t') + \Phi] - \sin \Phi \right\} - \frac{v_d}{\Omega} \sin \Omega(t-t') + v_d(t-t'),$$

$$y' = y - \frac{v_{\perp}}{\Omega} \left\{ \cos [\Omega(t-t') + \Phi] - \cos \Phi \right\} + \frac{v_d}{\Omega} [\cos \Omega(t-t') - 1],$$

$$z' = z + v_{\parallel} (t' - t),$$

где  $\theta$  — угол между  $\mathbf{v}$  и  $H$ ;  $\Phi$  — азимутальный угол вектора  $\mathbf{v}$ , отсчитываемый от оси  $x$ . Поскольку величины  $E_-$ ,  $\mathbf{w}$  и  $n_-$  пропорциональны  $e^{i\omega t - ikr}$ , то  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  могут быть представлены в виде

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \int_{-\infty}^t G(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t-t') e^{i\omega t'} dt'$$

и, следовательно, Фурье-образ будет:

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \omega) = \int_0^{\infty} G(\mathbf{r}, \mathbf{v}, s) e^{-i\omega s} ds. \quad (1.73)$$

Подставляя найденные значения функций  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  в выражение (1.58) и используя уравнения движения (1.72) и соотношение (1.73), для тока получим уравнение типа (1.54), но в котором коэффициенты  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  и вектор  $V$  равны

$$a_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = -e^2 \int d^3\mathbf{v} v_i \int_0^\infty ds e^{-\frac{\lambda s}{\tau}} e^{-\frac{ik}{\Omega}(\mathbf{v}' - \mathbf{v}_y)} \times \\ \times \left[ \frac{\partial f_{00}}{\partial \mathbf{k}} \left[ v_j - \frac{\Omega \tau v_d}{1 + \Omega^2 \tau^2} (\Omega \tau \delta_{jx} + \delta_{yj}) \right] + m v_j \frac{\partial^2 f_{00}}{\partial \mathbf{k}^2} \times \right. \\ \left. \times \left[ (\mathbf{v}_d, \mathbf{v}' - \mathbf{v}) - \frac{\Omega \tau v_d}{1 + \Omega^2 \tau^2} (\tau \Omega v_x' - v_y') \right] \right]; \quad (1.74)$$

$$b_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = -e^2 \int d^3\mathbf{v} v_i \int_0^\infty ds e^{-\frac{\lambda s}{\tau}} e^{-\frac{ik}{\Omega}(\mathbf{v}' - \mathbf{v}_y)} \times \\ \times v_j \left[ \frac{\partial f_{00}}{\partial \mathbf{k}} + \frac{\partial^2 f_{00}}{\partial \mathbf{k}^2} m (\mathbf{v}_d, \mathbf{v}' - \mathbf{v}) \right]; \quad (1.75)$$

$$V(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{2}{3} \frac{e_F^0}{\tau n_0} \int d^3\mathbf{v} \int_0^\infty ds e^{-\frac{\lambda s}{\tau}} e^{-\frac{ik}{\Omega}(\mathbf{v}' - \mathbf{v}_y)} \times \\ \times \left[ \frac{\partial f_{00}}{\partial \mathbf{k}} + \frac{\partial^2 f_{00}}{\partial \mathbf{k}^2} m (\mathbf{v}_d, \mathbf{v}' - \mathbf{v}) \right]. \quad (1.76)$$

Здесь  $\lambda = 1 + i\omega\tau(1 - kv_d/\omega)$ ,  $v_x'$ ,  $v_y'$ ,  $v_z'$  — это значения (1.72) при  $s = t - t' \neq 0$ , а  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  — при  $s = t - t' = 0$ .

Фактически для вычисления плазменного поглощения и усиления звуковых волн в полупроводниках достаточно знать компоненты тензора проводимости вдоль волны  $\sigma_{xx}(\omega, \mathbf{k})$ , т. е. следует вычислить компоненты  $a_{xx}(\omega, \mathbf{k})$  и  $V_x(\omega, \mathbf{k})$ .

Используя соотношение (1.53), уравнения (1.72) и

$$\int d^3\mathbf{v} \frac{\partial^2 f_{00}}{\partial \mathbf{k}^2} g(\mathbf{v}) = \frac{3}{8\pi} \frac{n_0}{m v_F^2 e_F^0} \frac{d}{dv} \left[ v \int d\Omega g(\mathbf{v}) \right] \Big|_{v=v_F}, \quad (1.77)$$

после интегрирования по скоростям и по переменной  $s$  получим (в области сильного магнитного поля, когда  $\Omega\tau \gg 1$ ) [37]:

$$a_{xx}(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{3\sigma_0}{ikl} \left\{ -\frac{v_d}{v_F} + \frac{1}{\chi} \sum_{n,m} \frac{J_m \left( \chi \frac{v_d}{v_F} \right)}{\lambda + i(n-m)\Omega\tau} \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{\lambda n g_n}{\chi} - \frac{v_d}{v_F} (1 + i\omega\tau) J_{2n}'(2\chi) \right] \right\}; \quad (1.78)$$

$$V_x(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\Omega}{k} \sum_{n,m} \frac{J_m \left( \chi \frac{v_d}{v_F} \right)}{\lambda + i(n-m)\Omega\tau} \left[ n g_n(\chi) - \frac{v_d}{v_F} J_{2n}'(2\chi) \right]. \quad (1.79)$$

Здесь  $\chi = \frac{kv_F}{\Omega} = kr_L$ , где  $r_L$  — ларморовский радиус и функция  $g_n(\chi)$  равна [30]:

$$g_n(\chi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_n^2(\chi \sin \theta) \sin \theta d\theta, \quad (1.80)$$

При выводе (1.78), (1.79) были опущены все члены, которые в  $(v_d/v_F)^2$  или  $(\omega/kv_F)^2$  раз меньше, чем оставленные в выражениях (1.78), (1.79). В полуметаллах и вырожденных полупроводниках отношение скорости звука к скорости Ферми порядка  $10^{-2}$ . Отношение  $\frac{v_d}{v_F}$  также намного меньше единицы практически при всех достижимых полях в проводящих телах. Во всяком случае, используемое нами решение кинетического уравнения остается справедливым, если только скорость дрейфа носителей не превышает скорость Ферми.

В предельном случае малых частот выражения (1.78) и (1.79) дают значения продольной проводимости типа формулы (1.61), но в которую вместо частоты столкновений  $\nu$  входит эффективная частота столкновений, зависящая от магнитного поля,  $\nu_{\text{эфф}} = \frac{\nu^2 + \Omega^2}{\nu}$  и  $v_d = \frac{cE}{H}$ .

**Область геометрического резонанса.** Когда длина волны оказывается того же порядка, что и ларморовский радиус классической орбиты электрона, движущегося в магнитном поле, как известно [13], в поглощении волн наблюдается так называемый геометрический резонанс. В области геометрического резонанса

$$\chi T \ll e\tau, \quad kr_T \sim 1, \quad \chi \frac{v_d}{v_F} \ll 1, \quad (1.81)$$

и поэтому выражения (1.78), (1.79) примут вид [37]:

$$a_{xx} \approx \frac{3\sigma_0}{(kl)^2} \left\{ \lambda [1 - g_0(\chi)] - ikv_d\tau \left[ 1 - g_1(\chi) + \frac{1 + i\omega\tau}{2\lambda\chi} J_0(2\chi) \right] \right\}; \quad (1.82)$$

$$V_x \approx \frac{1}{ik\tau} \left\{ 1 - g_0(\chi) - \frac{ikv_d\tau}{\lambda} \left[ \frac{1}{\chi} J_0(2\chi) - g_1(\chi) \right] \right\}. \quad (1.83)$$

Между функциями  $g_0(\chi)$ ,  $J_0(2\chi)$  и  $g_1(\chi)$  существует следующее соотношение:

$$J_0(2\chi) = \chi [g_1(\chi) - g_0(\chi)]. \quad (1.84)$$

Используя выражение (1.55) и соотношение (1.84), можно найти тензор проводимости в области геометрического резонанса

$$\sigma_{xx}(\omega, k) = \frac{3\sigma_0}{(kl)^2} \frac{\lambda [1 - g_0(\chi)]}{1 - \frac{kv_d}{\omega} + \frac{i}{\omega\tau} [1 - g_0(\chi)]}. \quad (1.85)$$

Таким образом, проводимость электронной плазмы в области геометрического резонанса определяется поведением функции  $g_0(\chi)$ , вид которой показан на рис. 2.

**Область циклотронного резонанса.** Когда циклотронная частота оказывается того же порядка, что и частота волны, происходит резонансное поглощение волн. Для обычной газоразрядной плазмы эти явления были известны давно (см., например, [13], § 12), что же касается твердотельной

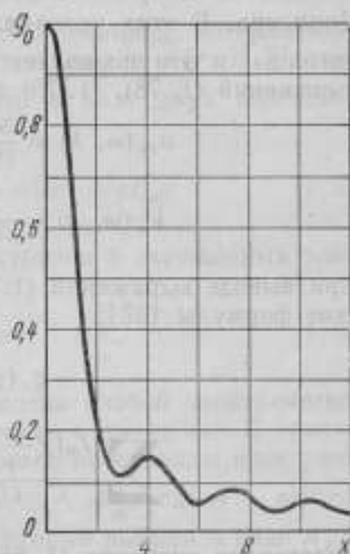


Рис. 2. Вид функции  $g_0(x)$  в соответствии с работой [32].

плазмы, то исследование и изучение циклотронного резонанса в ней было начато сравнительно недавно [38—40].

Если в среде, помимо постоянного магнитного поля, имеется еще и электрическое, приводящее к дрейфу электронов, то вместо резонансного поглощения волн следует ожидать их резонансное усиление. При этом сразу очевидно, что условие резонансного циклотронного поглощения  $\Omega = \omega$  из-за наличия дрейфа должно быть заменено условием  $\Omega = \omega'$ , где  $\omega' = \omega(1 - v_d/v_F)$  — частота волны, смещенная вследствие эффекта Доплера. В этих условиях величина  $\chi = \frac{v_F}{v_\Phi} \frac{\omega}{\Omega}$  будет много больше единицы, и это позволяет воспользоваться асимптотическим значением выражений (1.78), (1.79) при  $\chi \gg 1$  [31, 37]:

$$a_{xx}(\omega, k) = \frac{3\sigma_0}{(kl)^2} (1 + i\omega\tau) \left( 1 - \frac{\pi\lambda}{2kl} \operatorname{cth} \frac{\pi\lambda}{\Omega\tau} \right), \quad (1.86)$$

$$V_x(\omega, k) = \frac{1}{ik\tau} \left[ 1 - (1 + i\omega\tau) \frac{\pi}{2kl} \operatorname{cth} \frac{\pi\lambda}{\Omega\tau} \right]. \quad (1.87)$$

При выводе выражений (1.86), (1.87) были использованы асимптотические формулы [37]:

$$g_n(\chi) \approx \frac{1}{2\chi} + O\left(\chi^{-\frac{3}{2}}\right),$$

$$\sum_{n, m} \frac{J_m\left(\chi \frac{v_d}{v_F}\right) (\lambda - im\Omega\tau)}{\lambda - i(n-m)\Omega\tau} \approx \frac{1 + i\omega\tau}{\Omega\tau} \pi \operatorname{cth} \frac{\pi\lambda}{\Omega\tau}. \quad (1.88)$$

Подставляя значения (1.86), (1.87) в выражение для тензора проводимости (1.54), получим  $\sigma_{xx}(\omega, k)$  в области циклотронного резонанса

$$\sigma_{xx}(\omega, k) = \sigma_0 \frac{3i\omega}{k^2 v_F} \frac{1 + \frac{\pi\lambda}{2kl} \operatorname{cth} \frac{\pi\lambda}{\Omega\tau}}{1 + \frac{\pi}{2kl} \operatorname{cth} \frac{\pi\lambda}{\Omega\tau}}. \quad (1.89)$$

Последнее выражение справедливо при  $\frac{v_F}{v_\Phi} \frac{\omega}{\Omega} \gg 1$ ,  $\Omega\tau \gg 1$ , а также при  $kl \gg 1$ .

#### Проницаемость плазменной среды в квантующем магнитном поле

В сильном магнитном поле, когда кроме неравенства  $\Omega\tau \gg 1$  выполняется еще условие

$$\hbar\Omega \gg \kappa T \quad (1.90)$$

энергетический спектр электронов перестает быть непрерывным и появляются квантовые уровни Ландау [41, 42], связанные с круговым движением электронов. При этом проводимость электронного газа испытывает осцилляции, которые приводят к соответствующим осцилляциям в поглощении волн [43]. При наличии направленного движения электронов отрицательная проводимость электронного газа как функция магнитного поля будет иметь ряд максимумов и минимумов, которые приведут к соответствующим изменениям в инкременте усиления упругих волн.

Когда квантование уровней энергии становится существенным, классическая теория, основанная на понятии пространства скоростей, теряет

силу. В этих условиях следует пользоваться квантовой теорией, основанной на формализме матрицы плотности. Оператор матрицы плотности определится из решения квантового кинетического уравнения:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}] + i\hbar \frac{\hat{\rho} - \hat{\rho}_{0s}}{\tau}, \quad (1.91)$$

где  $\hat{\rho}_{0s}$  — значение оператора матрицы плотности, который симметричен в системе координат, связанной с рассеивающим центром. Собственное значение оператора  $\hat{\rho}_{0s}$ , очевидно, будет функцией Ферми  $f_{0s}$ , которая определяется локальным значением химического потенциала  $\mu(\mathbf{r}, t)$ . Полный гамильтониан системы  $\hat{H}$  удобно представить в виде двух слагаемых  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_-$ , где

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_z^2) + \frac{1}{2m} (\hat{p}_y + m\Omega x) - eE_d x \quad (1.92)$$

— независимый от волны гамильтониан электронов в скрещенных электрическом и магнитном полях, а

$$\hat{H}_- = -\frac{e}{rc} [(\hat{\mathbf{v}} \mathbf{A}_-) + (\mathbf{A}_- \hat{\mathbf{v}})] + e\Phi_- \quad (1.93)$$

— та часть гамильтониана, которая обусловлена слабой электрической волной и в дальнейшем будет рассматриваться как возмущение. В уравнениях (1.93)  $\mathbf{A}_-$  и  $\Phi_-$  — векторный и скалярный потенциалы электрической волны, а оператор скорости  $\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{m} (\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A})$ , где  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал внешнего постоянного поля, который выбран в виде  $A_x = A_z = 0$ ,  $A_y = Hx$ .

Стационарные состояния оператора  $\hat{H}_0$  характеризуются волновыми функциями [44]

$$|n, q_y, q_z\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{iq_y y + iq_z z} \Phi_n \left( x - \frac{\hbar q_y}{m\Omega} + \frac{v_d}{\Omega} \right) \quad (1.94)$$

и собственными значениями

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{n, q_y, q_z} = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\Omega + \frac{\hbar^2 q_z^2}{2m} + \hbar q_y v_d - \frac{1}{2} m v_d^2, \quad (1.95)$$

где  $\Phi_n(x)$  — ортонормированные волновые функции осциллятора,  $V$  — объем системы. Состояния электрона в квантующем магнитном поле характеризуются тремя квантовыми числами  $n, q_y, q_z$ , которые там, где это не вызовет сомнений, будем обозначать буквой  $\alpha$ .

Следуя классическому случаю, рассмотренному выше, оператор  $\hat{\rho}_0$  разложим в ряд около равновесного значения  $\hat{\rho}_0$ :

$$\hat{\rho}_{0s} |\alpha\rangle = f_{0s} |\alpha\rangle = f_0(\varepsilon_\alpha) |\alpha\rangle + \Delta\mu(\mathbf{r}, t) \frac{\partial f_{0s}}{\partial \mu(\mathbf{r}, t)} \Big|_{\mu=\mu_\alpha} |\alpha\rangle, \quad (1.96)$$

где  $\Delta\mu(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mu(\mathbf{r}, t)}{\partial n(\mathbf{r}, t)} \Big|_{n=n_\alpha} n_-(\mathbf{r}, t)$  — изменение химического потенциала, обусловленное перераспределением частиц в пространстве; член типа  $(\mathbf{p}_F \mathbf{w})$ , учитывающий рассеяние на движущемся центре [см. формулу (1.43)] в выражении (1.96) был отброшен, так как в окончательное выражение для тока дает малый вклад.

Уравнение для определения химического потенциала электронного газа

$$n(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{V} \sum_{\alpha} f[\epsilon_{\alpha}, \mu(\mathbf{r}, t)]$$

в асимптотическом приближении по  $\kappa T/\mu$  и при условии, что  $(\hbar\Omega/r) \ll \mu$ , может быть записано в виде

$$n(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{3\pi^2} \frac{(2m)^{3/2}}{\hbar^3} \mu^{3/2}(\mathbf{r}, t) - \kappa T \sqrt{\hbar\Omega} \frac{4m^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\sqrt{2r}} \times \\ \times \frac{\sin\left(2\pi r \frac{\mu(\mathbf{r}, t)}{\hbar\Omega} - \frac{\pi}{4}\right)}{\text{sh}\left(2\pi^2 r \frac{\kappa T}{\hbar\Omega}\right)}. \quad (1.97)$$

Изменение химического потенциала, которое следует из этого выражения, будет

$$\Delta\mu(\mathbf{r}, t) = \frac{2}{3} \frac{\epsilon_F^0}{n_0} (1 + G) n_{-}(\mathbf{r}, t), \quad (1.98)$$

где

$$G = \frac{2\sqrt{2} \pi \kappa T}{\sqrt{\hbar\Omega} \epsilon_F^0} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r = \frac{\cos\left(\frac{2\pi r \epsilon_F^0}{\hbar\Omega} - \frac{\pi}{4}\right)}{\text{sh}\left(2\pi^2 r \frac{\kappa T}{\hbar\Omega}\right)} \sqrt{r}. \quad (1.99)$$

Оператор матрицы плотности  $\hat{\rho}$  представим в виде  $\hat{\rho} = \hat{\rho}_0 + \hat{\rho}_{-}$ , где  $\hat{\rho}_{-}$  — отклонение от равновесного значения, обусловленное волной. Подставляя это разложение в уравнение движения (1.91) и используя значение (1.98), в первом порядке теории возмущений для матричного элемента  $\langle \alpha' | \hat{\rho}_{-} | \alpha \rangle$  в представлении (1.94) получим

$$\langle \alpha' | \hat{\rho}_{-} | \alpha \rangle = \frac{f_0(\epsilon_{\alpha'}) - f_0(\epsilon_{\alpha})}{\epsilon_{\alpha'} - \epsilon_{\alpha} - \hbar\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)} \langle \alpha' | \hat{H}_{-} | \alpha \rangle - \\ - \langle \alpha' | n_{-}(\mathbf{r}, \omega) | \alpha \rangle \frac{2i\hbar}{3\tau} \frac{\epsilon_F^0}{n_0} (1 + G) \frac{\partial f_0}{\partial \mu_0}. \quad (1.100)$$

При наличии направленного потока частиц, обусловленного постоянным электрическим полем, температура электронного газа не будет равна температуре тяжелых частиц (решетки), и в функцию Ферми  $f_0(\epsilon_{\alpha})$  должна входить зависящая от электрического поля эффективная температура электронов  $T_{\text{эфф}}$ . В зависимости от механизма рассеяния электронов изменяется вид функции  $T_{\text{эфф}}(E_d)$ ; так, для рассеяния только на фононах эффективная температура будет

$$T_{\text{эфф}} = T_{\text{реш}} \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{v_d}{v_s} \right)^2 \right],$$

где  $v_s$  — скорость фононов. Таким образом, в сильном электрическом поле электроны могут разогреться настолько, что условие (1.90) может не вы-

полняться. Это обстоятельство следует иметь в виду при исследовании квантовых явлений при условии, если имеются достаточно быстрые электронные потоки.

Плотность электронного тока определится из соотношения

$$j(\mathbf{x}, t) = S\rho(\hat{j}, \hat{\rho}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \langle \alpha | e \left( \hat{\mathbf{v}} - \frac{e}{mc} \mathbf{A}_- \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}) \hat{\rho} + \text{э. с.} | \alpha \rangle. \quad (1.101)$$

Выражение (1.101) определяет полный электронный ток. Чтобы определить тензор проводимости по переменному полю волны, из уравнения (1.101) следует выделить только члены, пропорциональные векторному и скалярному потенциалам волны и величине объемного заряда. Переходя в уравнении (1.101) к компонентам Фурье, получим для тока

$$j_{-l}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\omega_0^2}{4\pi c} [-W_{ik} A_{-k}(\omega, \mathbf{k}) + \Phi_{-l}(\omega, \mathbf{k}) K_l] - eV n_{-l}(\omega, \mathbf{k}). \quad (1.102)$$

Здесь

$$W_{ik} = \delta_{ik} + \frac{m}{n_0} \sum_{\alpha' \alpha} \frac{[f_0(\epsilon_{\alpha'}) - f_0(\epsilon_{\alpha})] \langle \alpha' | P_i | \alpha \rangle \langle \alpha' | P_k | \alpha \rangle^*}{\epsilon_{\alpha'} - \epsilon_{\alpha} - \hbar \left( \omega - \frac{i}{\tau} \right)}, \quad (1.103)$$

$$K_l = \frac{mc}{n_0} \sum_{\alpha' \alpha} \frac{[f_0(\epsilon_{\alpha'}) - f_0(\epsilon_{\alpha})] \langle \alpha' | P_l | \alpha \rangle \langle \alpha' | e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} | \alpha \rangle^*}{\epsilon_{\alpha'} - \epsilon_{\alpha} - \hbar \left( \omega - \frac{i}{\tau} \right)}, \quad (1.104)$$

$$V = \frac{2i\hbar}{3\tau} \frac{\epsilon_p^0}{n_0} (1 + G) \sum_{\alpha' \alpha} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon_{\alpha}} \langle \alpha' | P_l | \alpha \rangle \langle \alpha' | e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} | \alpha \rangle^*}{\epsilon_{\alpha'} - \epsilon_{\alpha} - \hbar \left( \omega - \frac{i}{\tau} \right)}, \quad (1.105)$$

где оператор  $P = \frac{1}{2} (e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \hat{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{v}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}})$ .

Если волновой вектор волны  $\mathbf{k}$  выбрать лежащим в плоскости  $yoz$ , то матричные элементы, входящие в выражения (1.102)—(1.105), будут [43—47]:

$$\langle \alpha' | P_x | \alpha \rangle = -i\Omega \delta_{q_y, q_y'} \delta_{q_z, q_z + k_z} \frac{\partial}{\partial k_y} I_{n'n}(k_y), \quad (1.106a)$$

$$\langle \alpha' | P_y | \alpha \rangle = \delta_{q_y, q_y + k_y} \delta_{q_z, q_z + k_z} I_{n'n}(k_y) \left( q_z + \frac{1}{2} k_z \right), \quad (1.106b)$$

$$\langle \alpha' | P_z | \alpha \rangle = \left[ v_d + (n' - n) \frac{\Omega}{k_y} \right] \delta_{q_y, q_y + k_y} \delta_{q_z, q_z + k_z} I_{n'n}(k_y), \quad (1.106в)$$

$$\langle \alpha' | e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} | \alpha \rangle = \delta_{q_y, q_y + k_y} \delta_{q_z, q_z + k_z} I_{n'n}(k_y), \quad (1.106г)$$

где  $\delta_{q', q}$  — символ Кронекера,  $I_{n'n}(x)$  — двухцентрвый интеграл от волновых функций осциллятора

$$I_{n'n}(k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \Phi_{n'}(x) \Phi_n \left( x - \frac{\hbar k_y}{m\Omega} \right). \quad (1.107)$$

Явный вид выражения для тока (1.102) не является градиентно инвариантным. Для градиентной инвариантности уравнения (1.102) необхо-

димо, чтобы выполнялось соотношение  $W_{i\alpha}K_k = \omega/cK_i^*$ . Нетрудно убедиться, что последнее условие действительно имеет место при  $\omega\tau \gg 1$ , и поэтому выражение для тока можно переписать в градиентно инвариантной форме

$$j_i(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\omega_0^2}{4\pi i \omega} W_{i\alpha} E_{\alpha k} - eV_i n_{\alpha}(\omega, \mathbf{k}). \quad (1.102a)$$

Компоненту Фурье неравновесной плотности числа частиц  $n_{\alpha}(\omega, \mathbf{k})$ , как и в классическом случае, можно определить двумя способами: либо из уравнения непрерывности (1.3), либо путем непосредственного вычисления с помощью матрицы плотности

$$n_{\alpha}(\tau, t) = \frac{1}{V} \text{Sp} \left[ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}) - \hat{\rho}_{\alpha} \right].$$

Результат, разумеется, в обоих случаях будет одинаков:

$$\sigma_{ik}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\omega_0^2}{4\pi i \omega} \left( W_{i\alpha} + V_i \frac{k_m W_{m\alpha}}{\omega - k_m V_{m\alpha}} \right). \quad (1.108)$$

Найдем тензор проводимости для случая, когда волновой вектор волны  $\mathbf{k}$  перпендикулярен магнитному полю  $\mathbf{H}$ . В нашей координатной системе это соответствует распространению волны вдоль оси  $y$ . Подставляя в выражение (1.108) значения матричных элементов из формулы (1.106) для проводимости по направлению распространения волны, получим:

$$\sigma_{\parallel} = \sigma_{yy} = \frac{3\sigma_0}{(kl)^2} (1 + i\omega\tau) \frac{R(\omega, \mathbf{k})}{1 - \frac{k}{\omega} V_y(\omega, \mathbf{k})}, \quad (1.109)$$

где

$$V_y(\omega, \mathbf{k}) = \frac{i}{k\tau} \left[ 1 - \frac{2}{3} \frac{\epsilon_P^0}{n_0} (1 + G) (i + i\omega\tau) \sum_{\alpha, n, g} \frac{\frac{\partial f_{g, n}}{\partial \mu_{\alpha}} f_{n+\alpha, n}^2(k)}{1 + i\tau(\alpha\Omega + \omega - kv_d)} \right], \quad (1.110)$$

$$R(\omega, \mathbf{k}) = \frac{2}{3} \frac{\epsilon_P^0}{n_0} [1 + i\tau(\omega - kv_d)] \sum_{\alpha, n, g} \frac{\frac{\partial f_{g, n}}{\partial \mu_{\alpha}} f_{n+\alpha, n}^2(k)}{1 + i\tau(\alpha\Omega + \omega - kv_d)}. \quad (1.111)$$

Отметим, что выражение (1.109) в полуклассическом пределе дает известные выражения для продольной проводимости, полученные выше. Полуклассический случай соответствует большим квантовым числам, поэтому суммирование по  $n$  в формулах (1.110), (1.111) можно заменить интегрированием. При этом вместо  $n$  удобно ввести  $n_1 \sin^2 \theta$ , где  $n_1 = \mu/h\Omega \gg 1$  и суммирование по  $n$  заменить интегрированием по углу  $\theta$  в пределах от 0 до  $\pi/2$ . Используя далее асимптотическое значение двухцентрового интеграла при больших значениях  $n$

$$I_{n+\alpha, n}(k) \approx J_{\alpha} \left( \sqrt{\frac{2n\hbar k^2}{m\Omega}} \right),$$

\* Следует отметить, что учет соударений с помощью введения времени релаксации  $\tau$  нарушает градиентную инвариантность выражения для тока (1.102a).

где  $J_n(x)$  — функция Бесселя, из (1.109)–(1.111), получим:

$$\sigma_{\perp}(\omega, k) = \frac{3\sigma_0(1+i\omega\tau)}{(k\ell)^2} \frac{1 - [1 + i\tau(\omega - kv_d)] \sum_a \frac{g_a \left(\frac{kv_F}{\Omega}\right)}{1 + i\tau(\alpha\Omega + \omega - kv_d)}}{1 + \frac{1+i\omega\tau}{i\omega\tau} \sum_a \frac{g_a \left(\frac{kv_F}{\Omega}\right)}{1 + i\tau(\alpha\Omega + \omega - kv_d)}}. \quad (1.112)$$

Здесь  $g_a(x)$  — функция, определенная выше (см. уравнение (1.80)). В области циклотронного резонанса, когда  $\frac{kv_F}{\Omega} \gg 1$ , выражение (1.112) сводится к значению (1.89); в области геометрического резонанса, когда  $kv_F/\Omega$  порядка единицы, из формулы (1.112) следует выражение (1.85). Интересно заметить, что при отсутствии магнитного поля вектор  $V$  для низких частот  $\omega\tau \ll 1$  сводится к скорости дрейфа  $v_d$ .

Квантовые эффекты значительны в области  $(\hbar q^2/m\Omega) \ll 1$  и  $|\Omega\tau|(1+i\omega\tau) \gg 1$ . Используя предельное значение для  $I_{nn}^2(k)$

$$I_{nn}^2(k) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar q^2}{m\Omega}, \quad (1.113)$$

найдем значения тензора проводимости в области, где квантовые эффекты существенны:

$$\sigma_{\parallel}(\omega, k) = \frac{\sigma_0}{(\tau\Omega)^2} (1+F) \frac{1 + i\omega\tau \left(1 - \frac{kv_d}{\omega}\right)}{1 - \frac{kv_d}{\omega} + \frac{i}{\omega\tau} \left[G + \frac{2}{3} \frac{k^2 e_F^0}{m\Omega^2} (1+F+G)\right]}. \quad (1.114)$$

Здесь  $F$  — осцилляторная функция, которая равна

$$F = \frac{\hbar\Omega}{n_0} \left[ \sum_{n, q_y, q_z} \frac{\partial f}{\partial \mu_0} \left(n + \frac{1}{2}\right) - 1 \right].$$

Вычисление этой суммы довольно сложно, поэтому приведем лишь окончательный результат

$$F = \frac{8\sqrt{2}\pi^2 \kappa T}{\sqrt{e_F^0} \hbar \Omega} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r V^r \frac{\left[ \cos\left(2\pi r \frac{e_F^0}{\hbar\Omega} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi r e_F^0}{\hbar\Omega} - \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{th}\left(2\pi^2 r \frac{\kappa T}{\hbar\Omega}\right)} \right]}{\operatorname{sh}\left(2\pi^2 r \frac{\kappa T}{\hbar\Omega}\right)}. \quad (1.115)$$

причем последний член в квадратных скобках существенен только при  $\kappa T/\hbar\Omega \ll 1$ . Выражение (1.115) как функция магнитного поля осциллирует. Причина появления осцилляций такая же, как и в случае эффекта де-Хааза-ван Альфена.

## Общее рассмотрение

Наличие электронов проводимости или дырок существенно влияет на процессы, которые происходят в решетке кристалла и, в частности, на распространение упругих волн. Характер взаимодействия электронов (дырок) с волнами решетки зависит, разумеется, от состояния электронно-дырочной плазмы. В большинстве случаев это взаимодействие приводит к затуханию волн в решетке, однако при наличии направленного движения частиц, как увидим ниже, это затухание сменяется усилением.

Чтобы рассмотреть это явление подробнее, необходимо знать механизм взаимодействия газа носителей (электронов и дырок) с колебаниями решетки. Очевидно, что взаимодействие электронно-дырочной плазмы с колебаниями решетки может осуществляться через электрическое поле, которым сопровождается акустическая волна, или непосредственно через электрон-фононное взаимодействие. Разумеется, такое деление на типы взаимодействия является условным, в реальном кристалле осуществляются все возможные типы взаимодействий, в том числе взаимодействие через электрическое поле и электрон-фононное взаимодействие. Электрон-фононное взаимодействие является универсальным\*, т. е. оно происходит в любом кристалле, и весь вопрос заключается в том, какова его величина. Взаимодействие же через электрическое поле возможно только в пьезополупроводниках или в ионном кристалле.

Чтобы построить дисперсионное уравнение упругих волн с учетом их взаимодействия с электронно-дырочной плазмой проще всего исходить из свободной энергии единицы объема полупроводника, которая здесь играет роль потенциальной энергии единицы объема [48]

$$F - F_0 = \frac{1}{2} \lambda_{iklm} u_{ik} u_{lm} + \beta_{i,kl} E_i u_{kl} + \frac{1}{2} a_{iklm} E_i E_k u_{lm} + \\ + \sum_{\alpha=l,h} \frac{1}{2} u_{i\alpha} \int \Lambda_{i\alpha}^{(\alpha)}(\mathbf{p}) f^{(\alpha)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3p - \frac{1}{8\pi} \mathbf{e}_i E_i E_j, \quad (2.1)$$

где  $\lambda_{iklm}$  — тензор модулей упругости,  $u_{ik}$  — тензор деформации, связанный с вектором смещения  $u$  соотношением

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right),$$

$\beta_{i,kl}$  — тензор пьезомодулей кристалла,  $a_{iklm}$  — стрикционный тензор,  $\Lambda_{ij}(\mathbf{p})$  — набор констант электрон-фононного взаимодействия (в общем случае это тензор второго ранга, число компонент которого зависит от симметрии кристалла),  $\mathbf{p}$  — квазиимпульс электрона.

Первый член в выражении (2.1) отражает упругую энергию единицы объема полупроводника. Члены с коэффициентами  $\beta_{i,kl}$  и  $a_{iklm}$  представляют соответственно линейный пьезоэффект и квадратичную электрострикцию. Они отвечают за связь звуковых и электрических (поляризационных [49]) волн. Член, пропорциональный тензору  $\Lambda_{ij}(\mathbf{p})$ , отвечает за непосредственное взаимодействие электронно-дырочной плазмы с упругими волнами решетки; (суммирование происходит по сортам частиц, т. е. электронам и дыркам). Последний член в выражении (2.1) — это плотность электрической энергии в кристалле.

\* Электрон-фононное взаимодействие называют часто еще взаимодействием через деформационный потенциал.

При таком подходе кристалл полупроводника рассматривается как однородная среда, что справедливо только в области малых частот, когда длина ультразвуковой волны  $\lambda$  намного больше постоянной решетки  $a$ . Это условие приводит к ограничению на область рассматриваемых частот  $\omega \ll 10^{13} - 10^{14} \text{ сек}^{-1}$ . Кроме того, считается, что все тензоры  $\lambda_{iklm}$ ,  $\beta_{i,kl}$ ,  $a_{iklm}$ , не зависят от частоты и волнового вектора. Другими словами, отсутствуют частотная и пространственная дисперсия акустических волн (разумеется, без учета плазмы носителей; как увидим ниже, благодаря взаимодействию упругих волн с электронно-дырочной плазмой наблюдается частотная и пространственная дисперсия последних).

В полупроводниках и металлах на электрон или дырку, кроме силы Лоренца, действует также сила со стороны деформированной решетки кристалла. Выражения для этой силы можно определить из энергии электрона в зоне проводимости с учетом деформации решетки

$$\varepsilon(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \varepsilon(p^2) + \Lambda_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}. \quad (2.2)$$

Строго говоря, помимо члена  $\Lambda_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$  в выражение необходимо еще добавить член  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_i} \frac{\partial u_i}{\partial t}$  [10], который учитывает эффект Стюарта-Толмена [50]. Можно показать, однако, что этот член всегда мал. Действительно, отношения членов

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_i} \frac{\partial u_i}{\partial t} / \Lambda_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \approx \frac{v_s}{v_F} \approx 10^{-2},$$

поскольку  $\Lambda_{ij}$  порядка энергии электрона в зоне проводимости. Таким образом, выражение для силы, которое следует из (2.2), будет

$$F_i^{(e, h)} = \frac{\partial}{\partial x_i} \Lambda_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}. \quad (2.3)$$

В кинетическое уравнение помимо силы Лоренца должно входить еще выражение для силы (2.3).

В диссипативной функции [51]

$$R = \frac{1}{2} \mu_{iklm} \frac{\partial u_{ik}}{\partial t} \frac{\partial u_{lm}}{\partial t} \quad (2.4)$$

учитываем затухание упругих волн, обусловленное только вязкостью среды, где  $\mu_{iklm}$  — тензор вязкости, причем его свойства симметрии совпадают со свойствами симметрии тензора упругости  $\lambda_{iklm}$ .

Кинетическая энергия единицы объема запишется в виде

$$T = \frac{1}{2} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad (2.5)$$

где  $\rho$  — плотность решетки.

Уравнения движения (уравнения Лагранжа), получаемые путем варьирования плотности лагранжиана  $F - T$  по вектору смещения  $\mathbf{u}$  с учетом диссипативной функции  $R$ , принимают вид

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \lambda_{iklm} \frac{\partial u_{lm}}{\partial x_k} + \tilde{\beta}_{i,kl} \frac{\partial E_l}{\partial x_k} - \sum_{a=c, h} \frac{\partial}{\partial x_k} \int \Lambda_{ikl}^{(a)} f^{(a)} d^3v + \mu_{iklm} \frac{\partial^2 u_{lm}}{\partial x_k \partial t}. \quad (2.6)$$

Здесь  $\tilde{\beta}_{i,kl} = \beta_{i,kl} + a_{iklm} E_m$  — эффективный пьезомодуль с учетом электрострикционного эффекта (т. е. кристалл, обладающий электрострикцией, во внешнем постоянном электрическом поле становится пьезоэлектриком).

Уравнения (2.6) являются общими уравнениями движения упругой среды с учетом ее взаимодействия с плазмой носителей. Действительно, при отсутствии пьезоэффекта ( $\beta_{i,kl} = 0$  и  $\Lambda_{ik} = 0$ ) оно совпадает с известными уравнениями теории упругости [51]; в случае же только  $\Lambda_{ik} = 0$  получаем уравнения распространения звука в пьезосреде, которые впервые были получены Шапошниковым [52] и впоследствии другими [53—56]; наоборот, при  $\beta_{i,kl} = 0$ , уравнения (2.6) совпадают с уравнениями, которые использовались при изучении плазменного поглощения ультразвука в металлах и полупроводниках [6—12], [57].

Чтобы система (2.6) была замкнутой, ее необходимо дополнить уравнениями для определения электрического поля  $E$  и электронной функции распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ . Вектор электрического поля волны, очевидно, должен удовлетворять уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где вектор индукции  $\mathbf{D}$  равен [45]

$$D_i = \frac{\partial f}{\partial E_i} = \epsilon_{ij} E_j - 4\pi \bar{\beta}_{i,kl} \mu_{kl}. \quad (2.8)$$

Тензор диэлектрической проницаемости среды  $\epsilon_{ik}$  можно представить в виде

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ik}^{(0)} + \epsilon_{ik}^{(n,n)} - \delta_{ik}, \quad (2.9)$$

где  $\epsilon_{ij}^{(0)}$  — тензор диэлектрической проницаемости кристалла без носителей; для кубического кристалла, например,  $\epsilon_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} \epsilon_0$ , где  $\epsilon_0$  — статическое значение диэлектрической проницаемости,  $\epsilon_{ij}^{(n,n)}$  — тензор диэлектрической плазмы носителей, который был вычислен выше.

Дальнейшее изложение, по существу, представляет собой исследование характера решений уравнений (2.6) для различных типов взаимодействия. Это, по-видимому, ближе всего соответствует опыту, поскольку, как правило, приходится встречаться с кристаллами, в которых ярко выражен какой-либо один тип взаимодействия. Однако без труда можно исследовать и такой полупроводниковый кристалл, для которого характерно несколько одинаковых по величине типов взаимодействия: в силу линейности взаимодействия, инкремент усиления (затухания) будет равен сумме соответствующих выражений.

#### Усиление упругих волн в пьезополупроводниках

Рассмотрим усиление упругих волн в пьезополупроводящих кристаллах, в которых взаимодействие электронов с волной обусловлено электрическим полем, сопровождающим упругую волну в пьезоэлектрике. Непосредственное электрон-фононное взаимодействие пока учитывать не будем, т. е. константу  $\Lambda_{ij}$  в уравнении (2.6) положим равной нулю. Уравнения Максвелла (2.7) после исключения магнитного поля волны  $\mathbf{H}$  для плоской волны (1.1) будут

$$\left[ k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right] E_{-j} = -4\pi \frac{\omega^2}{c^2} \beta_{i,kl} \mu_{kl}. \quad (2.10)$$

Для определенности будем считать, что упругая волна распространяется вдоль оси  $x$ . Фазовая скорость этой волны и, следовательно, вектора  $E_{\sim}$ , близка к скорости звука в среде  $v_s$ , и поэтому

$$\frac{\omega^2}{k^2 c^2} \left| \text{Det} \epsilon_{ij} \right|^{1/3} \ll 1. \quad (2.11)$$

Соотношение (2.11) означает, что скорость упругой волны в среде намного меньше скорости света в этой же среде. Используя критерий (2.11), нетрудно получить решение уравнений (2.10)

$$E_{\sim x} = - \frac{4\pi i k}{\epsilon_{xx}(\omega, k)} \beta_{x, xl} u_l. \quad (2.12a)$$

$$E_{\sim y} = \frac{4\pi i \omega^2}{k c^2} \beta_{y, xl} u_l, \quad E_{\sim z} = \frac{4\pi i \omega^2}{k c^2} \beta_{z, xl} u_l. \quad (2.12b)$$

Из (2.12) видно, что поля  $E_{\sim y}$ ,  $E_{\sim z}$  всегда намного меньше продольной компоненты поля  $E_{\sim x}$ , поэтому их можно не учитывать [51]. Подставляя выражение (2.12) в уравнение движения (2.6), получим дисперсионное уравнение для плоской упругой волны

$$\left| \rho \omega^2 \delta_{ij} - k^2 (\lambda_{xlx} + i \omega \mu_{xlx}) - \frac{4\pi \beta_{x, xl} \beta_{x, xl} k^2}{\epsilon_{xx}(\omega, k)} \right| = 0. \quad (2.13)$$

Если среда не обладает пьезосвойствами, то дисперсионное уравнение (2.13) переходит в известное уравнение теории упругости [48], описывающее распространение волн в кристаллах. Оно имеет три различных корня. Это означает, что для каждого направления в кристалле имеется три, а в общем случае различных, скорости распространения упругих волн: одна — для чисто продольной волны, две другие — для поперечных [58]. Наличие пьезоэффекта в среде, тензор диэлектрической проницаемости которой зависит от частоты  $\omega$  и волнового вектора  $k$ , приводит к тому, что деление волн на чисто продольные и чисто поперечные оказывается невозможным; каждому направлению волнового вектора  $k$  соответствует волна, вектор смещения в которой имеет составляющие как параллельные, так и перпендикулярные к направлению ее распространения\*. Связанность этих составляющих, как видно из дисперсионного уравнения (2.13), определяется безразмерной величиной  $\xi \approx 16\pi^2 \beta_{x, xl}^2 / \rho v_s^4 \epsilon_0^2$ . Если ввести понятие электромеханической константы, которая характеризует отношение плотности электрической энергии к плотности упругой энергии в волне

$$\xi_{\parallel} = \left( \frac{4\pi \beta_{x, xl}^2}{\rho v_{s\parallel}^2 \epsilon_0} \right)^{1/2}, \quad \xi_{\perp} = \left( \frac{4\pi \beta_{x, xy}^2}{\rho v_{s\perp}^2 \epsilon_0} \right)^{1/2} \quad (2.14)$$

(для продольных и поперечных волн соответственно), то величина  $\xi$  оказывается пропорциональной константе электромеханической связи в четвертой степени. Поскольку  $\xi^2 \approx 10^{-2}$  даже для такого сильного пьезоэлектрика как CdS [58], то ясно, что  $\xi$  порядка  $10^{-4}$  или меньше.

\* Если плазменная среда не обладает ни частотной, ни пространственной дисперсией, т. е.  $\epsilon_{xx}(\omega, k)$  не зависит ни от  $\omega$ , ни от  $k$ , то происходит только перенормировка скорости распространения волн, характер же их при этом не меняется.

Пренебрегая связанностью колебаний (к этому вопросу мы еще вернемся ниже), рассмотрим одномерное дисперсионное уравнение

$$q\omega^2 - k^2(\lambda_{xxj} e_i e_j - i\mu_{xxj} e_i e_j) - 4\pi k^2 \frac{\beta_{xx}^2 x_i^j}{v_{xx}(\omega, k)} = 0, \quad (2.15)$$

где  $e$  — единичный вектор поляризации упругой волны. Из выражения (2.15), считая последний член малой поправкой, находим инкремент нарастания (затухания) на единицу длины (для продольных волн):

$$Imk = -\frac{\omega}{2v_s} \frac{\epsilon_{\parallel}^2}{\epsilon_{\parallel}} \frac{e_0 Imv_{xx}(\omega, k)}{|\epsilon_{xx}(\omega, k)|^2} - \frac{\mu_{\parallel} \omega^2}{qv_{s\parallel}^2}, \quad (2.16)$$



Рис. 3. Схема опыта по обнаружению усиления ультразвука в полупроводниках:

1 — кварцевые преобразователи, 2 — буферы, 3 — электроды, к которым прикладывалось дрейфовое поле.

где  $\epsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость решетки в направлении волны,  $\mu_{\parallel}$  — вязкость для продольной волны. В тензоре диэлектрической проницаемости  $\omega$  и  $k$  теперь должны быть связаны соотношением  $\omega = kv_{s\parallel}$ .

В области малых частот, когда  $\epsilon_{xx}(\omega, k)$  определяется формулой (1.36), для инкремента нарастания характерно следующее выражение [59]:

$$Imk \approx \frac{1}{2} \frac{\epsilon_{\parallel}^2}{\epsilon_{\parallel}} \frac{e_0 \omega_0^2}{v v_{s\parallel}} \frac{1 - \frac{v_d}{v_{s\parallel}}}{e_0^2 \left(1 - \frac{v_d}{v_s}\right)^2 + \frac{\omega_0^4}{\omega^2 v^2} \left(1 + r_D^2 \frac{\omega^2}{v_{s\parallel}^2}\right)^2} - \frac{\mu_{\parallel} \omega^2}{qv_{s\parallel}^2}, \quad (2.17)$$

$kl < 1$

Из этого выражения видно, что при скорости дрейфа носителей, превышающей скорость звуковых волн, или при

$$v_d > v_s, \quad (2.18)$$

плазменное поглощение сменяется усилением; если это усиление превысит решеточное поглощение, то проходящая упругая волна будет нарастать. Впервые на возможность усиления акустической волны потоком электронов обратил внимание Вайррейх [60], который заметил, что плазменное затухание меняет знак при выполнении условия (2.18). Экспериментально этот эффект впервые был обнаружен Хатсоном, Мак-Фи и Уайтом [1] в пьезополупроводящих кристаллах CdS. Схема их опыта показана на рис. 3. С помощью кварцевого преобразователя звуковой импульс через звукопровод из плавленного кварца поступал на кристалл CdS длиной 7 мм, к которому прикладывалось постоянное электрическое поле. Результирующий сигнал регистрировался с помощью второго кварцевого преобразователя. Ориентация кристалла была такой, чтобы поперечная упругая волна сопровождалась продольным электрическим полем. Полученная на опыте зависимость амплитуды прошедшего звукового импульса от приложенного внешнего поля показана на рис. 4.

В результате опыта на кристалле CdS было получено усиление в 18 дБ при частоте  $\omega = 15$  МГц и в 38 дБ при частоте  $\omega = 45$  МГц. Впоследствии усиление на опыте упругих волн в пьезополупроводящих кристаллах было получено в нескольких работах [61—64]. Результаты показывают, что теория [1, 34, 37, 59, 61, 65] хорошо описывает эксперимент; на рис. 5, например, для сравнения показаны две кривые: одна — теоретическая, рассчитанная по формуле (2.17), другая — экспериментальная [61].

Изучение плазменного затухания ультразвука в пьезополупроводящих кристаллах Cd S в зависимости от температуры [66] и концентрации носителей также показало, что теория в основном хорошо описывает эксперимент.

Наибольшее значение инкремент нарастания (2.17) достигает при выполнении следующих условий [59]:

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{\epsilon_0}} \frac{v_{s\parallel}}{v_T}, \quad v = \frac{2\omega_0}{\sqrt{\epsilon_0}} \frac{v_T}{v_{s\parallel}} \left| 1 - \frac{v_d}{v_s} \right|^{-1} (v_d > v_{s\parallel}). \quad (2.19)$$

В случае усиления поперечных волн наибольшее значение инкремента равно

$$\max \text{Im}k = \frac{1}{2} \zeta_{\perp}^2 \frac{\omega_0}{\sqrt{\epsilon_0} v_T} \text{sign}(v_d - v_{s\perp}) - \mu_{\perp} \frac{\omega_0^2 v_{s\perp}^2}{\epsilon_0 v_T^2}. \quad (2.20)$$

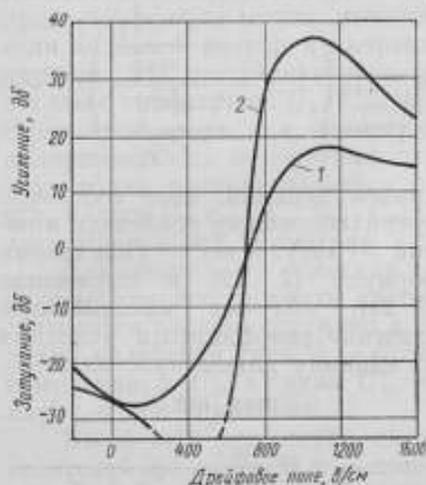


Рис. 4. Зависимость усиления ультразвуковых волн, полученная опытным путем [1], от значения дрейфового поля:

1 —  $\omega = 15$  мкс, 2 —  $\omega = 45$  мкс.

и, следовательно, частоте  $\omega$ . Нерезонансная зависимость усиления от величины дрейфа указывает на то, что эффект обусловлен движением объемного заряда, образованного самой волной и поэтому находящегося всегда с ней в фазе [16].

Согласно константам, которые приведены в литературе [1, 54, 58, 67] для Cd S,  $\beta_{i,1} = 3,2 \cdot 10^4 \text{ г} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{сек}^{-2}$ , эффективная масса  $m = 0,07$  массы электрона,  $\epsilon_0 \approx 9$ ,  $\mu \approx 10^{-3} - 10^{-4}$  ед. CQ SE,  $\rho = 4,82 \text{ г/см}^3$ ,  $\nu \approx 10^{13} - 10^{14} \text{ сек}^{-1}$ .

Несложные численные оценки показывают, что в опыте Хатсона [1] примерно выполнялось условие максимума усиления  $\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{\epsilon_0}} \left( \frac{v_s}{v_T} \right)$ .

Зависимость инкремента усиления от частоты показана на рис. 6. Для сульфида кадмия характерна очень большая частота столкновений носителей (во всяком случае при комнатной температуре), и поэтому выполнить на опыте условие  $\Omega\tau > 1$ , только при котором возможны все резонансные явления, оказывается весьма трудным. Этим и объясняется слабая зависимость эффекта усиления от магнитного поля в пьезополупроводниках, наблюдавшаяся на опыте [68].

Таким образом, максимальное значение инкремента нарастания пропорционально концентрации электронов

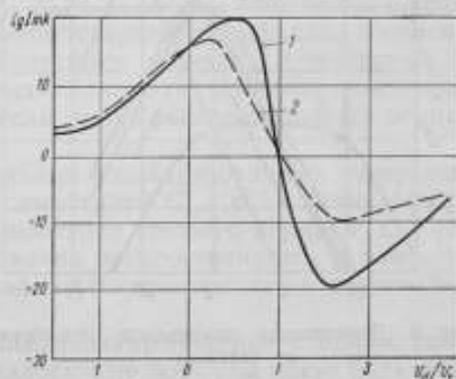


Рис. 5. Зависимость инкремента усиления от скорости дрейфа ( $v_d/v_s$ ) [62]:

1 — теоретические данные; 2 — опытные данные.

В области больших частот, когда  $kl \gg 1$ , продольная компонента тензора проводимости определяется формулой (1.62) и, следовательно, для инкремента нарастания в этом случае имеем:

$$Imk = -\frac{3\pi}{4} \epsilon_0^2 \zeta_{\parallel}^2 \frac{\frac{\epsilon_0 \omega_0^2}{\omega} \frac{v_{s\parallel}^2}{v_F^2} \left(1 - \frac{v_d}{v_{s\parallel}}\right)}{\left(\epsilon_0 + \frac{3\omega_0^2 v_{s\parallel}^2}{\omega^2 v_F^2}\right)^2 + \frac{9\pi^2}{4} \frac{\omega_0^4}{\omega^4} \left(1 - \frac{v_d}{v_{s\parallel}}\right)^2 \left(\frac{v_{s\parallel}}{v_F}\right)^2} - \frac{\mu \omega^2}{\epsilon v_{s\parallel}^2} \quad (2.21)$$

Наибольшее значение инкремента (2.21) достигается при скорости дрейфа

$$v_d = v_{s\parallel} \left(1 \pm \frac{\frac{3\omega_0^2 v_{s\parallel}^2}{\omega^2 v_F^2}}{\epsilon_0 + \frac{3\omega_0^2 v_{s\parallel}^2}{\omega^2 v_F^2}}\right), \quad (2.22)$$

причем верхний знак соответствует наибольшему усилению, нижний — затуханию. Подставляя формулу (2.22) в выражение (2.21), получим максимальное значение коэффициента усиления на единицу длины кристалла:

$$\max_{kl \gg 1} Imk = \pm \frac{3\pi}{8} \epsilon_0^2 \zeta_{\parallel}^2 \frac{\omega}{v_{s\parallel}} \frac{1}{\epsilon_0 + \frac{3\omega_0^2}{\omega^2} \frac{v_{s\parallel}^2}{v_F^2}} - \frac{\mu \omega^2}{\epsilon v_{s\parallel}^2} \quad (2.21a)$$

Рис. 6. Зависимость инкремента усиления от частоты:

1 —  $v_d/v_s = 1,5$  ( $v = 10^{14}$ ,  $\omega_s = 2 \cdot 10^{12}$ ); 2 —  $v_d/v_s = 1,5$  ( $v = 10^{14}$ ,  $\omega_s = 2 \cdot 10^{13}$ ); 3 —  $v_d/v_s = 2,0$  ( $v = 10^{14}$ ,  $\omega_s = 2 \cdot 10^{12}$ ); 4 —  $v_d/v_s = 1,2$  ( $v = 10^{14}$ ,  $\omega_s = 2 \cdot 10^{12}$ ); 5 —  $v_d/v_s = 1,5$  ( $v = 10^{12}$ ,  $\omega_s = 2 \cdot 10^{12}$ ); 6 —  $v_d/v_s = 1,5$  ( $v = 10^{14}$ ,  $\omega_s = 2 \cdot 10^{10}$ ).

Характерная особенность выражения (2.21) состоит в том, что оно не зависит от времени релаксации  $\tau$ .

Выясним, какие типы волн можно усиливать в пьезополупроводящих кристаллах.

Из дисперсионного уравнения (2.13) видно, что необходимым условием усиления акустической волны является наличие продольной компоненты электрического поля, с которой наиболее эффективно взаимодействуют движущиеся носители, поэтому симметрия кристалла должна допускать существование следующих компонент пьезотензора:  $\beta_{1,11}$ ,  $\beta_{1,12}$ ,  $\beta_{1,13}$ . В зависимости от симметрии кристалла и от выбранного направления распространения волны в среде возможно усиление следующих пяти типов волн [59]:

- I.  $\beta_{1,11} \neq 0$ ,  $\beta_{1,12} = \beta_{1,13} = 0$  — продольная звуковая волна,
- II.  $\beta_{1,11} = 0$ ,  $\beta_{1,12} \neq 0$ ,  $\beta_{1,13} \neq 0$  — поперечная волна,
- III.  $\beta_{1,11} = 0$ ,  $\beta_{1,12} \neq 0$ ,  $\beta_{1,13} = 0$   
(или  $\beta_{1,11} = 0$ ,  $\beta_{1,12} = 0$ ,  $\beta_{1,13} \neq 0$ ) — поляризованная поперечная волна.

Помимо перечисленных выше случаев, возможны также и более общие

$$\text{IV. } \beta_{1,11} \neq 0, \quad \beta_{1,12} \neq 0, \quad \beta_{1,13} = 0 \quad [(\beta_{1,12} = 0, \quad \beta_{1,13} \neq 0)]$$

$$\text{V. } \beta_{1,11} \neq 0, \quad \beta_{1,12} \neq 0, \quad \beta_{1,13} \neq 0,$$

для которых классификация на продольные и поперечные волны теряет смысл. Уравнения для вектора смещения этих волн представляют «связанную» систему, причем связанность определяется безразмерной величиной  $\xi$ . В том случае, когда  $\xi \ll 1$  «связанностью» можно пренебречь, и тогда волны распадаются на чисто продольные и чисто поперечные: тип IV — на продольную и поляризованную поперечную; тип V — на продольную и поперечную волны. Однако при определенных направлениях распространения связанность колебаний может изменить направление плоскости поляризации усиливаемой поперечной волны. Для усиления продольных волн можно использовать кристаллы с симметрией  $D_3, D_{3h}$ , если волновой вектор  $k$  направлен по одной из осей симметрии второго порядка. Из пьезоэлектриков для усиления можно использовать кристаллы с симметрией:  $C_2, C_{2v}, C_3, C_{3v}, C_4, C_{4v}, C_6, C_{6v}$ , если волна распространяется вдоль оси симметрии соответствующего порядка. Усиление поляризованных поперечных волн допускают классы с симметрией  $S_4$ , если волна распространяется перпендикулярно к зеркальноповоротной оси, классы  $C_3, C_{3v}, C_4, C_{4v}, C_6, C_{6v}$ , если волна распространяется перпендикулярно к оси симметрии.

Для совместного усиления продольных и поляризованных поперечных волн можно использовать классы с симметрией  $C_{3h}$ , если волна распространяется перпендикулярно к оси симметрии третьего порядка; для усиления колебаний типа V —  $C_3$ , если волна распространяется в плоскости симметрии, и  $C_3$ , а также  $C_1$ , если волна распространяется перпендикулярно к оси симметрии.

Выше был рассмотрен случай пьезополупроводника с одним типом носителей (фактически,  $n$  — тип). Аналогичные формулы могут быть получены и для полупроводников  $p$ -типа. Если же имеется кристалл с собственной проводимостью, то результирующий инкремент нарастания (или затухания) может быть получен из выражения (2.16), если вместо продольной проводимости  $\sigma_{||}(\omega, k)$  в него подставить значение  $\sigma_{||}^{(e)}(\omega, k) + \sigma_{||}^{(h)}(\omega, k)$  — сумму проводимостей электронной и дырочной плазмы соответственно.

**Геометрический и циклотронный резонанс.** Резонансные явления при усилении в магнитном поле возможны только тогда, когда циклотронная частота носителей больше частоты столкновений  $\nu$ , т. е. при  $\Omega\tau \geq 1$ .

Геометрический резонанс возникает в том случае, когда на орбите электрона укладывается целое число длин волн фононов и возможен поэтому только в вырожденных пьезополупроводниках. Объяснение этого резонанса впервые было дано Пиппардом [69]. В условиях геометрического резонанса проводимость электронно-дырочной плазмы определяется выражением (1.85), и инкремент нарастания (без учета вязкого члена) будет

$$\text{Im}k = -\frac{3}{2} \frac{\epsilon_0 \omega_0^2 \nu v_{s||}^2}{\epsilon_1 \omega^2 v_F^2} \frac{\left(1 - \frac{v_d}{v_{s||}}\right) g_0(\chi) [1 - g_0(\chi)]}{\left[\epsilon_0 + \frac{3\omega_0^2 v_{s||}^2}{\omega^2} (1 - g_0)\right]^2 \left(1 - \frac{v_d}{v_{s||}}\right)^2 + (1 + g_0)^2 \left(\epsilon_0 + \frac{3\omega_0^2 v_{s||}^2}{\omega^2}\right) \frac{\nu^2}{\omega^2}}$$

(2.23)

Наибольшее значение инкремента (2. 23) достигается при дрейфе

$$v_d = v_s \left\{ 1 \pm \frac{v}{\omega} \frac{[1 - g_0(\chi)] \left( \epsilon_0 + \frac{3\omega_0^2 v_s^2}{\omega^2 v_F^2} \right)}{\epsilon_0 + [1 - g_0(\chi)] \frac{3\omega_0^2 v_s^2}{\omega^2 v_F^2}} \right\}. \quad (2.24)$$

Верхний знак соответствует наибольшему усилению, нижний — наибольшему затуханию. По мере того как  $\omega$  стремится к бесконечности

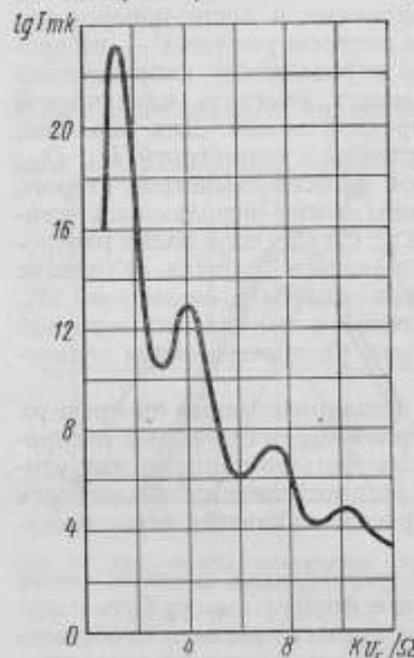


Рис. 7. Зависимость инкремента усиления ультразвука от магнитного поля в области геометрического резонанса. (График построен для полупроводника с собственной проводимостью при  $\omega\tau = 10$ ;  $v_d = 3v_s$ ).

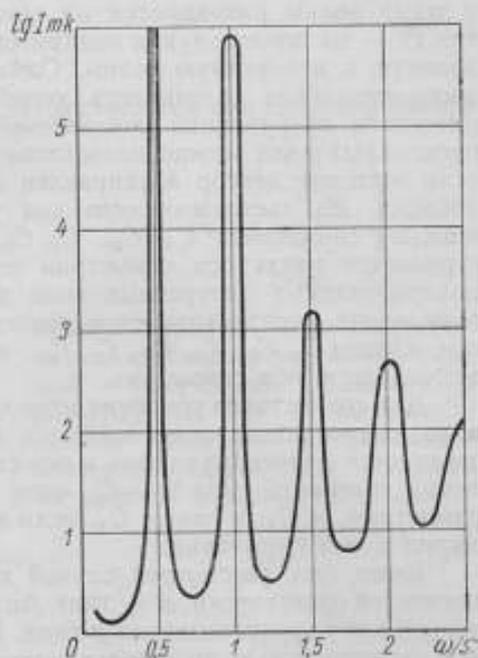


Рис. 8. Зависимость инкремента усиления упругих волн в области циклотронного резонанса от частоты.

максимальное значение инкремента достигается при скорости дрейфа  $v_d$ , стремящейся к скорости звука. Как функция магнитного поля, инкремент усиления (2. 23) может иметь ряд максимумов и минимумов, расстояние между которыми зависит от поведения функции  $g_0(\chi)$  (рис. 7).

В области циклотронного резонанса проводимость определяется выражением (1. 89) и, следовательно, инкремент (2. 16) будет

$$Imk = -\frac{3}{2} \epsilon_0 \epsilon_{\parallel}^2 \frac{\omega_0^2 v_s \parallel}{v v_F^2} \frac{\left(1 - \frac{v_d}{v_s}\right) \frac{A(1-A) - B^2}{(1-A)^2 + B^2}}{\left\{ \epsilon_0 + \frac{3\omega_0^2 v_s^2 \parallel \left[ B^2 + (1-A)^2 + \frac{\omega}{v} \left(1 - \frac{v_d}{v_s}\right) B \right]^2}{\omega^2 v_F^2 [(1-A)^2 + B^2]} \right\}^2 + \frac{\left\{ 3\omega_0^2 v_s^2 \parallel \left[ B^2 + (1-A)^2 + \frac{\omega}{v} \left(1 - \frac{v_d}{v_s}\right) B \right]^2 \right\}^2}{\omega^2 v_F^2 [(1-A)^2 + B^2]}}, \quad (2.25)$$

где  $A = \frac{\pi}{2kl} \operatorname{Re} \operatorname{cth} \frac{\pi\lambda}{\Omega\tau}$ ,  $B = \frac{\pi}{2kl} \operatorname{Im} \operatorname{cth} \frac{\pi\lambda}{\Omega\tau}$ .

Как функция магнитного поля, выражение (2. 25) имеет ряд максимумов, положение которых определяется соотношением  $\omega \left(1 - \frac{v_d}{v_s}\right) = n\Omega$ , где  $n$  — целое число. Последнее соотношение есть обычное условие циклотронного резонанса с учетом доплеровского смещения частоты. Зависимость инкремента нарастания от величины магнитного поля показана на рис. 8, на котором инкремент нарастания отложен в условных единицах.

В квантовом пределе, когда продольная проводимость определяется выражением (1. 114), инкремент усиления будет

$$\operatorname{Im} k = -\gamma^2 \frac{\epsilon_0 \omega_0^2}{2\tau \Omega^2} \frac{\left(1 - \frac{v_d}{v_s}\right)(1 - Q + F)}{\left(1 - \frac{v_d}{v_s}\right)^2 \left[\epsilon_0 + \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}(1 + F)\right]^2 + \frac{v^2}{\omega^2} \left[\epsilon_0 Q + \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}(1 + F)\right]^2}, \quad (2. 26)$$

где  $Q = G(H) + \frac{2}{3} \frac{\epsilon_p^0 k^2}{m\Omega^2} (1 + F + G)$ . Таким образом, зависимость усиления от магнитного поля носит осцилляторный характер, однако амплитуда этих осцилляций невелика.

Отметим также, что экспериментальное обнаружение этих осцилляций в пьезополупроводниках представляет весьма трудную задачу, поскольку для этого необходимы очень сильные магнитные поля.

#### Усиление в полупроводниках и полуметаллах

На возможность усиления упругих волн в полупроводниках и полуметаллах через непосредственное электрон-фононное взаимодействие, впервые, по-видимому, обратили внимание Казаринов и Скобов [70], основной результат работы которых сводился к тому, что электронное поглощение при  $v_d > v_s$  должно смениться усилением. К этому же результату пришли также Веденов и Великов [71]. Полученные выше формулы для комплексного тензора проводимости позволяют рассмотреть это явление более строго [59], выяснить частотную зависимость усиления и влияние магнитного поля.

Уравнения движения решетки (2. 6) для полупроводников или полуметаллов без учета пьезоэффекта могут быть переписаны в виде

$$\rho \frac{\partial^2 u_l}{\partial t^2} = \lambda_{iklm} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} - 4\pi \sum_{\alpha, \beta} \Lambda_{lk}^{(\alpha)} \frac{\partial}{\partial x_k} \int v^{\alpha} \varphi^{(\alpha)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} + \mu_{iklm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial t^2}. \quad (2.6a)$$

В уравнении (2. 6, a) мы предположили, что константы электрон-фононного взаимодействия  $\Lambda_{lk}$  не зависят от квазимпульса электрона (дырки), что дало возможность произвести интегрирование по всем углам в пространстве скоростей. Неравновесная плотность носителей  $n_- = \int \varphi d\mathbf{v} d\mathbf{v}^2$ , входящая в уравнение (2. 6, a), может быть определена непосредственно из выражений для тока. Чтобы учесть самосогласованное электрическое поле, в кинетическом уравнении достаточно произвести формальную замену  $E_- \rightarrow E_- - \frac{1}{e} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \Lambda_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}$ , где самосогласованное поле  $E_-$  определится из уравнений Максвелла (2. 7). Для медленных волн, фазовая скорость

которых намного меньше скорости света, уравнения Максвелла сводятся к уравнениям электростатики:

$$\operatorname{div} \epsilon_0 \mathbf{E}_- = 4\pi e (n^{(h)} - n^{(e)}), \operatorname{rot} \mathbf{E}_- = 0. \quad (2.7a)$$

Используя выражение (2.7, a) вместе с уравнениями непрерывности для электронного и дырочного токов, найдем искомые значения компонент Фурье неравновесных значений плотности электронов  $n_-^{(e)}(\omega, \mathbf{k})$  и дырок  $n_-^{(h)}(\omega, \mathbf{k})$ :

$$n_-^{(e)}(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{k^2 \sigma_{xx}^{(e)}(\omega, \mathbf{k})}{e^2 \omega} \frac{\left[ \frac{i\epsilon_0 \omega}{4\pi} \Lambda_{xx}^{(e)} + \sigma_{xx}^{(h)}(\omega, \mathbf{k}) (\Lambda_{xx}^{(e)} + \Lambda_{xx}^{(h)}) \right] u_x}{\sigma_{xx}^{(e)}(\omega, \mathbf{k}) + \sigma_{xx}^{(h)}(\omega, \mathbf{k}) + \frac{i\epsilon_0 \omega}{4\pi}}. \quad (2.27a)$$

$$n_-^{(h)}(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{k^2 \sigma_{xx}^{(h)}(\omega, \mathbf{k})}{e^2 \omega} \frac{\left[ \frac{i\epsilon_0 \omega}{4\pi} \Lambda_{xx}^{(h)} + \sigma_{xx}^{(e)}(\omega, \mathbf{k}) (\Lambda_{xx}^{(e)} + \Lambda_{xx}^{(h)}) \right] u_x}{\sigma_{xx}^{(e)}(\omega, \mathbf{k}) + \sigma_{xx}^{(h)}(\omega, \mathbf{k}) + \frac{i\epsilon_0 \omega}{4\pi}}. \quad (2.27b)$$

При выводе (2.27) были опущены члены, соответствующие «столкновительному» току. Практически при всех достижимых частотах столкновительный ток меньше тока, обусловленного деформационным потенциалом [72].

Дисперсионное уравнение, которое следует из формулы (2.6, a) для продольных волн, будет

$$\omega^2 - k^2 v_{s\parallel}^2 = \frac{4\pi k}{q\alpha_x} \sum_{\alpha=e,h} \Lambda_{xx}^{(\alpha)} n_-^{(\alpha)}(\omega, \mathbf{k}) + \frac{i\omega^2 \mu}{qv_{s\parallel}^2}. \quad (2.28)$$

Для примесных полупроводников и полуметаллов, когда преобладает один тип носителей, например электроны, дисперсионное уравнение (2.28) имеет вид

$$\omega^2 - k^2 v_{s\parallel}^2 = \frac{4\pi k^4 \epsilon_0}{q e^2 \omega} \Lambda_{xx}^{(e)} \frac{\sigma_{xx}^{(e)}(\omega, \mathbf{k})}{\epsilon_0 + \frac{4\pi \sigma_{xx}^{(e)}}{i\omega}} + \frac{i\mu \omega^2}{qv_{s\parallel}^2}. \quad (2.28a)$$

Подставляя в выражение (2.28, a) значение проводимости из (1.30), получим выражение для инкремента нарастания в области малых частот

$$\operatorname{Im} k \Big|_{k \ll 1} = \frac{2\pi \omega^2 n_0 \Lambda_{xx}^2 \epsilon_0^2}{m v q^2 v_{s\parallel}^2} \frac{\left( \frac{v_d}{v_{s\parallel}} \right) - 1}{\epsilon_0^2 \left( 1 - \frac{v_d}{v_{s\parallel}} \right)^2 + \frac{\omega_0^4}{\omega^2 v^2} \left( 1 + \frac{\omega^2 r_D^2}{v_{s\parallel}^2} \right)^2} - \frac{\mu \omega^2}{qv_{s\parallel}^2}. \quad (2.29)$$

Значение направленной скорости, при которой инкремент нарастания достигает наибольшего значения, как и для случая пьезополупроводников, определяется соотношением

$$v_d = v_s \left[ 1 \pm \frac{\omega_0^2}{\omega v \epsilon_0} \left( 1 + \frac{\omega^2 r_D^2}{v_{s\parallel}^2} \right) \right], \quad (2.30)$$

где верхний знак соответствует усилению, а нижний — затуханию. При таком значении дрейфа выражение (2.29) будет иметь вид:

$$\operatorname{Im} k \Big|_{k \ll 1} = \pm \frac{\Lambda_{xx}^2 \omega^2 \epsilon_0}{4\pi^2 q v_{s\parallel}^2} \frac{1}{1 + \frac{\omega^2 r_D^2}{v_{s\parallel}^2}} - \frac{\mu \omega^2}{qv_{s\parallel}^2}. \quad (2.29a)$$

В обычных полупроводниках константа электрон-фононного взаимодействия  $\Lambda$  порядка  $10\text{ев}$ ,  $\tau \approx 10^{-11}$  сек при низких температурах и  $v_{s\parallel} \approx$

$\approx 4 \cdot 10^6$  см/сек. При электронной плотности  $n_0 \approx 10^{18}$  см $^{-3}$  выражение (2. 29, а) принимает значение примерно  $\pm 10^3$  см $^{-1}$  при частоте  $\omega = 10^9$  сек $^{-1}$ .

В области больших частот, когда  $kl \gg 1$ , для инкремента нарастания имеем

$$Imk = \frac{6\pi}{8} \frac{\epsilon_0 \Lambda_{xx}^2 \omega_0^2 \omega}{\rho v_{\parallel}^2 v_F^2} \frac{1 - \frac{v_d}{v_{\parallel}}}{\left( \epsilon_0 + \frac{3\omega_0^2 v_{\parallel}^2}{\omega^2 v_F^2} \right)^2 + \frac{9}{4} \frac{\omega_0^4}{\omega^4} \left( 1 - \frac{v_d}{v_{\parallel}} \right) \left( \frac{v_{\perp 1}}{v_F} \right)^6} \frac{\mu \omega^2}{\rho v_{\perp 1}^2} \quad (2. 31)$$

Как и в случае пьезополупроводников, наибольшее значение инкремента нарастания (2. 29) достигается при выполнении условия (2. 19). Отношение инкрементов (2. 29) и (2. 17) (при  $\mu = 0$ ) будет:

$$\frac{[\text{эл.-фон.}]}{[\text{пьеzo}]} = \frac{\omega^2 \Lambda_{xx}^2 \epsilon_0}{\zeta_1^2 \rho v_{\parallel}^4 \epsilon^2}$$

Таким образом, усиление за счет электрон-фононного взаимодействия эффективно только при высоких частотах. Например, при  $\Lambda_{xx} = 3 \times 10^{-11}$  эрг,  $v_{\perp 1} = 5 \cdot 10^8$  см/сек,  $\zeta_1^2 \approx 0,02$ ,  $\rho = 5$  г/см $^3$ ,  $\epsilon_0 \approx 10$ , усиления в пьезополупроводниках и примесных полупроводниках сравниваются при частоте  $\omega = 10^{11}$  эц \*. При этой же частоте наибольшее значение инкремента из выражения (2. 29) составит около  $10^4$  см $^{-1}$ .

При наличии поперечного магнитного поля в области, где не наблюдается никаких резонансных явлений, все приведенные выше формулы остаются в силе, только вместо  $v$  в них входит эффективная частота столкновений  $v_{\text{эфф}} = \frac{v^2 + \Omega^2}{v}$  и  $v_d = \frac{eE_d}{mv_{\text{эфф}}}$  [59, 77—79].

Усиление упругих волн в полуметаллах в сильном магнитном поле при выполнении условия Черенкова впервые косвенно наблюдал Эсаки [80], который в монокристаллах висмута обнаружил колебания тока, растущего пропорционально  $v_d/v_{\parallel} - 1$ . Последующие опыты [81] подтвердили наличие усиления в полуметаллах при выполнении условия Черенкова.

Исследование общего случая, когда имеются два типа носителей, по сравнению с предыдущим не дает качественно ничего нового, а получающиеся окончательные формулы оказываются весьма громоздкими, поэтому их не приводим. Однако как особый следует отметить случай, когда электроны и дырки имеют равные концентрации ( $n_0^{(e)} = n_0^{(h)}$ ), одинаковое время релаксации ( $\tau^{(e)} = \tau^{(h)}$ ) и эффективные массы ( $m_e = m_h$ ). При этом в скрещенных электрическом и магнитном полях дырочная и электронная проводимость оказываются равными и, что самое важное, самосогласованное поле  $E_{\perp}$  становится равным нулю (вследствие равенства неравновесных концентраций при  $|\sigma_{xx}| > \frac{e_0 \omega}{4\pi}$ ). Последнее означает, что отсутствует экранировка Дебая [69]. При выполнении всех

\* В литературе [73, 74] описаны способы возбуждения акустических волн с частотами  $\omega/2\pi$  вплоть до  $2,4 \cdot 10^{10}$  эц. Наиболее перспективным способом генерации ультразвуковых волн при высоких частотах является, по-видимому, генерация с помощью запирающего слоя [75, 76].

этих условий инкремент нарастания будет пропорционален действительной части продольной проводимости:

$$Imk = \frac{8\pi\varepsilon_0\omega^2}{\rho v_s^5 \varepsilon^2} \Lambda_{xx}^2 \operatorname{Re} \sigma_{xx}(\omega, \mathbf{k}), \quad (2.32)$$

если  $|\sigma_{xx}| > \varepsilon_0\omega/4\pi$ .

В области больших частот, когда  $|\sigma_{xx}| < \frac{\varepsilon_0\omega}{4\pi}$  инкремент нарастания оказывается в два раза меньше значения (2.32). Подставляя в формулу (2.32) значения тензора проводимости (1.85), получим выражения для инкремента нарастания в собственном полупроводнике при условии, что все характеристики электронов и дырок совпадают [4, 76]:

$$Imk = -\frac{2\varepsilon_0\omega^2\omega_0^2 v \Lambda_{xx}^2}{\rho v_s^5 \varepsilon^2 (\Omega^2 + v^2)} \left(1 - \frac{v_d}{v_s}\right) \times \begin{cases} \varepsilon_0 \left[ \varepsilon_0^2 \left(1 - \frac{v_d}{v_s}\right)^2 + \frac{\omega^2 v^2 v_s^2}{(\Omega^2 + v^2) v_F^2} \right]^{-1} & (\omega < 1) \\ \frac{3\pi}{2} \frac{\Omega^2 + v^2}{v\omega} \left(\frac{v_s}{v_F}\right)^3 & (\omega > 1) \end{cases} \quad (2.33a) \quad (2.33b)$$

**Геометрический и циклотронный резонанс при усилении.** Остановимся вкратце на резонансных явлениях, которые возможны в сильном магнитном поле. В области геометрического резонанса для полупроводников и полуметаллов с собственной проводимостью для инкремента нарастания при  $\mu = 0$  имеем:

$$Imk = -\frac{12\pi n_0 m}{m \rho v_s^3 v_F^2} \Lambda_{xx}^2 \frac{\omega^2}{v} \frac{\left(1 - \frac{v_d}{v_s}\right) g_0(\chi) |1 - g_0(\chi)|}{\varepsilon_0 \frac{\omega^2}{v^2} \left(1 - \frac{v_d}{v_s}\right)^2 + |1 - g_0(\chi)|^2}. \quad (2.34)$$

Наибольшее значение инкремента из выражения (2.34) достигается при скорости дрейфа электронов (дырок)

$$v_d = v_s \left\{ 1 \pm \frac{v}{\omega} [1 - g_0(\chi)] \right\}; \quad (2.35)$$

где верхний знак соответствует наибольшему усилению, нижний — затуханию. Из формулы (2.35) видно, что при  $\omega \rightarrow \infty$  наибольшее значение усиления (затухания) будет наблюдаться при скорости дрейфа, стремящейся к скорости звука  $v_s$ . Поведение инкремента (2.34) как функции  $v_d/v_s$  показано на рис. 4. В сильном магнитном поле, когда  $(kv_F/\Omega) \ll 1$  резонанс исчезает, и в этом случае из выражения (2.34) следует предельное значение инкремента (2.33, а).

Для примесных полупроводников и полуметаллов инкремент в области геометрического резонанса равен

$$Imk = -\frac{3\pi n_0 \Lambda_{xx}^2 v}{m v_s^3 v_F^2} \frac{\varepsilon_0 (1 - g_0) \left(1 - \frac{v_d}{v_s}\right)}{\left[ \varepsilon_0 + \frac{3\omega_0^2 v_s^2}{\omega^2 v_F^2} (1 - g_0) \right]^2 + (1 - g_0)^2 \frac{v^2}{\omega^2} \left( \varepsilon_0 + \frac{3\omega_0^2 v_s^2}{\omega^2 v_F^2} \right)^2}. \quad (2.36)$$

Здесь также затухание при  $v_d > v_s$  сменяется усилением. Максимум усиления или поглощения будет при дрейфе

$$v_d = v_s \left\{ 1 \pm \frac{v}{\omega} [1 - g_0(\chi)] \frac{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{v_F}{v_s}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(1 - g_0 + \frac{1}{3} \left(\frac{v_F}{v_s}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)} \right\}. \quad (2.37)$$

В области циклотронного резонанса для полупроводников и полуметаллов с собственным типом проводимости, когда справедливо выражение (2. 32), для инкремента получим:

$$Imk = - \frac{6\epsilon_0\omega_0^2\omega\Lambda_{xx}^2}{\rho e^2 v_s^3 v_F^3} \left(1 - \frac{v_d}{v_s}\right) [A(1-A) - B^2] - \frac{\mu\omega^2}{\rho v_s^3}, \quad (2. 38)$$

где  $A$  и  $B$  определяются выражением (2. 25), из которого в частности видно, что осцилляции происходят при  $\Omega\tau > 1$ . Поскольку при резонансе частота фонона имеет тот же порядок, что и циклотронная частота  $\Omega$ , то для наблюдения осцилляций необходимо еще, чтобы  $\omega\tau > 1$ . Если это условие не выполнено, то амплитуда осцилляций падает. В области  $kl > 1$  величинами  $A$  и  $B$  можно пренебречь, как малыми по сравнению с единицей. Тогда выражение (2. 38) будет

$$Imk = - \frac{3\pi\epsilon_0\omega_0^2\omega\Lambda_{xx}^2}{\rho e^2 v_s^3 v_F^3} \operatorname{Re} \operatorname{cth} \frac{\pi\lambda}{\Omega\tau} - \frac{\mu\omega^2}{\rho v_s^3}, \quad (2. 38a)$$

Зависимость (2. 38, a) графически изображена на рис. 5 для случая, когда  $\omega\tau = 10$  и  $v_d = 3v_s$ . Для примесных полупроводников и полуметаллов в области  $kl > 1$  для инкремента имеем:

$$Imk = - \frac{3\pi}{4} \epsilon_0 \frac{\omega_0^2\omega\Lambda_{xx}^2}{\rho e^2 v_s^3 v_F^3} \left(1 - \frac{v_d}{v_s}\right) \frac{\operatorname{Re} \operatorname{cth} \frac{\pi\lambda}{\Omega\tau}}{\left(\epsilon_0 + 3 \frac{\omega_0^2 v_s^2}{\omega^2 v_F^2}\right)^2} - \frac{\mu\omega^2}{\rho v_s^3}, \quad (2. 39)$$

Таким образом, в условиях усиления, когда  $v_d > v_s$ , циклотронный резонанс наблюдается при  $\omega' = n\Omega$ , где  $\omega' = \omega - kv_d$  — смещенная частота волны вследствие эффекта Допплера. Резонансное поглощение ультразвуковых волн в сильном магнитном поле при отсутствии направленного движения электронов впервые, по-видимому, было предсказано Микоштой [82], а обнаружено на опыте в Ga Робертсом [83]. Осцилляции затухания ультразвука в магнитном поле, обусловленные геометрическим резонансом, были также обнаружены в чистых образцах металлического кадмия и свинца Мак-Кинном с сотрудниками.

Наиболее подходящим объектом для наблюдения резонансных явлений при усилении является, очевидно, висмут, для которого время релаксации электронов  $\tau$  по импульсу порядка  $10^{-8}$ — $10^{-9}$  сек и условие  $\Omega\tau > 1$  может быть выполнено в сравнительно слабых полях.

В квантуемом магнитном поле, когда продольная проводимость определяется выражением (1. 114) инкремент усиления в примесных полупроводниках будет:

$$Imk = - \frac{2\pi\omega^2\Lambda^2\sigma_0(1+F)}{\rho e^2 v_s^3 (\Omega\tau)^2} \times \frac{\left(1 - \frac{v_d}{v_s}\right)(1-Q+F)}{\left(1 - \frac{v_d}{v_s}\right)^2 \left[\epsilon_0 + \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}(1+F)\right]^2 + \frac{v^2}{\Omega^2} \left[\epsilon_0 Q + \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}(1+F)\right]^2}. \quad (2. 40)$$

Это выражение как функция магнитного поля имеет такой же вид, как и выражение (2. 26) и отличается от последнего только постоянным множителем. Наблюдение квантовых резонансов при усилении представляет значительные трудности и может быть осуществлено только в полупроводниках или полуметаллах с большим временем релаксации  $\tau$ .

## Литература

1. Hutson A. R., McFee J. H., White D. L., Phys. Rev. Lett., 7, 237, 1961.
2. Герценштейн М. Е., Пустовойт В. И. Радиотехника и электротехника, 7, 1009, 1962.
3. Гинзбург В. Л. УФН, 69, 537, 1959.
4. Eckstein S. G. Phys. Rev., 131, 1087, 1963.
5. Nakamura K. Progr. Theor. Phys., 30, 919, 1963.
6. Bömel H. E. Phys. Rev., 96, 200, 1954.
7. Pippard A. V. Phil. Mag., 46, 1104, 1955.
8. Силин В. П. ЖЭТФ, 38, 977, 1960, 23, 649, 1959.
9. Steinberg M. S. Phys. Rev., 111, 425, 1958.
10. Ахнезер А. И., Каганов М. И., Любарский Г. Я. ЖЭТФ, 32, 837, 1957.
11. Morse R. W. Phys. Rev., 97, 1716, 1955.
12. Bolt F. J. Phys. Rev., 105, 1118, 1957.
13. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. Физматгиз, 1961.
14. Гинзбург В. Л., Гуревич А. В. УФН, 70, 2, 1960.
15. Давыдов Б. И. ЖЭТФ, 7, 1069, 1937.
16. Пустовойт В. И. ЖЭТФ, 43, 2281, 1962.
17. Герценштейн М. Е., Пустовойт В. И. ЖЭТФ, 43, 536, 1962.
18. Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазموподобных сред. Атомиздат, 1961.
19. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М., ГИТТЛ, 1957.
20. Pierce J. Proc. IRE, 35, 111, 1947.
21. Бом Д., Гросс Е. П. Теория колебаний плазмы. Проблемы современной физики, 11, 7, 1951.
22. Ахнезер А. И., Файнберг Б. Я. УФН, 44, 321, 1951.
23. Ахнезер А. И., Файнберг Б. Я. ЖЭТФ, 21, 1262, 1955.
24. Ахнезер А. И., Файнберг Б. Я. ДАН СССР, 69, 555, 1949.
25. Маханьков В. Г., Рухадзе А. А. Ядерный синтез, 2, 177, 1963.
26. Файнберг Б. Я. Сб. «Физика плазмы и проблемы управления термоядерного синтеза», Киев, 1961.
27. Neufeld J., Royle P. H. Phys. Rev., 121, 654, 1961.
28. Neufeld J., Wright H. Phys. Rev., 129, 1489, 1962.
29. Sanablio E., Croci R., Zeitschr. für Naturforsch., 16, 1313, 1961.
30. Коврижных Л. М., Рухадзе А. А. ЖЭТФ, 38, 850, 1960.
31. Cohen M. H., Harrison M. J., Harrison W. A. Phys. Rev., 117, 937, 1959.
32. Spector H. N. Phys. Rev., 127, 1084, 1962.
33. Ландау Л. Д. ЖЭТФ, 16, 574, 1946.
34. Герценштейн М. Е., Пустовойт В. И., Филиппов С. С. Радиотехника и электроника, 8, 1607, 1963.
35. Chambers R. G. Proc. Phys. Soc. (London), A65, 458, 1952; A238, 344, 1957.
36. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., Физматгиз, 1960.
37. Spector H. N. Phys. Rev., 131, 2512, 1962.
38. Дорфман Я. ДАН, 81, 765, 1951.
39. Dingle R. V. Thesis P. D. Proc. Roy Soc., A212, 38, 1952.
40. Lax V., Mouroides I. G. Cyclotron Resonance. Solid. State Physics, v. 11, N—Y., 1960.
41. Landau L. D. Zeitschr. Phys., 64, 629, 1930.
42. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., Физматгиз, 1960.
43. Quinn J. J., Rodriguez. Phys. Rev., 128, 2487, 1962.
44. Adams E. N., Holstein I. D. Journ. Phys. Chem. Solids., 10, 254, 1959.
45. Казаринов Р. Ф., Скобов В. Г. ЖЭТФ, 42, 1047, 1962.
46. Ehrenreich H., Cohen M. H. Phys. Rev., 115, 786, 1959.
47. Spector H. N. Phys. Rev., 132, 522, 1963.
48. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. ГИТТЛ, 1957.
49. Санников Д. Г. ФТТ, 4, 1619, 1962.
50. Тамм И. Е. Основы теории электричества, М., ГИТТЛ, 1957.
51. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред, М., ГИТТЛ, 1957.
52. Шапошников И. Г. ЖЭТФ, 11, 332, 1941.
53. Kuame J. J. Journ. Aconst. Soc. Amer., 21, 159, 1949; 26, 990, 1954.
54. Hutson A. R., White D. L. Journ. Appl. Phys., 33, 40, 1962.
55. Гуревич А. В. ФТТ, 4, 909, 1962.

56. Гуревич В. Л., Каган В. Д., ФТТ, 4, 241, 1962.  
 57. Mikoshiba N. Journ. Phys. Soc. Japon, 15, 982, 1960; 15, 1189, 1960.  
 58. Hutson A. R. Phys. Rev. Lett., 4, 505, 1960.  
 59. Пустовойт В. И. ФТТ, 5, 2490, 1963.  
 60. Weinreich G. Phys. Rev., 104, 321, 1956.  
 61. White D. L. Fourth international Congress on Acoustics, K-16, Copenhagen, 1961.  
 62. Smite R. W. Phys. Rev. Lett., 9, 443, 1962.  
 63. McFee J. H. Journ. Appl. Phys.  
 64. Астров Д. Н., Байбаков В. И., Падо Г. С., Сысоев Л. А. ФТТ, 7, 46а, 1965.  
 65. Yokoto I. Journ. Phys. Soc. Japon., 18, 154, 1964.  
 66. Truell P., Elbaum C., Granato A. Journ. Appl. Phys., 35, 1483, 1964.  
 67. Nene H. D. Phys. Rev. Lett., 4, 359, 1960.  
 68. McScimin H. J., Bateman T. B., Hutson A. R. Journ. Aconst. Soc. Amer., 33, 856 (A), 1961.  
 69. Pippard A. B. Philos. Mag., 2, 1147, 1957.  
 70. Казаринов Р. Ф., Скобов В. Г. ЖЭТФ, 42, 910, 1962.  
 71. Веденов А. А., Велихов Е. П. ЖЭТФ, 43, 1110, 1962.  
 72. Spector H. N. Phys. Rev., 125, 1192, 1962.  
 73. Rowell P. M. Brith. Journ. Appl. Phys., 14, 60, 1963.  
 74. Гананольский Е. М., Чернец А. Н. ДАН 149, 72, 1963.  
 75. White D. L. IRE Transaction on Ultr. Engin., 9, 21, 1962, IRE Intern. Con. Rec. 9, part 6, 304, 1961.  
 76. Foster N. F. Journ. Appl. Phys., 34, 990, 1963.  
 77. Dumke W. P., Haerring R. R. Phys. Rev., 126, 1979, 1962.  
 78. Spector H. N. Phys. Rev., 130, 910, 1963.  
 79. Pippard A. B. Philos. Mag. 8, 14, 1963.  
 80. Esaki L. Phys. Rev. Lett., 8, 4, 1962.  
 81. Toxen A. M., Tansal S. Phys. Rev. Lett., 10, 481, 1963.  
 82. Mikoshiba N. Journ. Phys. Soc. Japon, 13, 759, 1958.  
 83. Roberts B. W. Phys. Rev. Lett., 6, 453, 1961.

*Статья поступила 2 февраля 1965 г.*

УДК 530.293:534

### УСИЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В СЛОИСТОЙ СИСТЕМЕ ПОЛУПРОВОДНИК-ПЬЕЗОДИЭЛЕКТРИК \*

Показано, что в слоистой системе полупроводник-пьезоэлектрик можно получить усиление своеобразных поверхностных волн, если скорость движения носителей в полупроводнике превышает фазовую скорость поверхностной волны.

В отличие от усиления «объемных» волн в безграничных средах при усилении таких поверхностных волн мощность, выделяемая в образце, оказывается значительно сниженной, что позволяет надеяться на возможность осуществления непрерывного режима усиления или генерации.

Сравнительно недавно было обнаружено, что в полупроводниках возможно усиление акустических волн [1], когда скорость дрейфа носителей превышает фазовую скорость акустической волны. Физически это усиление обусловлено черенковским излучением фононов дрейфующим объемным зарядом носителей [1, 2].

Наиболее подходящими для усиления оказываются пьезополупроводниковые кристаллы, взаимодействие с носителями которых осуществляется через электрическое поле, сопровождающее упругую волну в пьезоэлектрике. При больших частотах усиление возможно также и в полупроводниках и особенно в полуметаллах с достаточно большой константой электрон-фононного взаимодействия [3, 4]. В последнем случае при усилении в единице объема полупроводника выделяется сравнительно большая мощность и приходится искать специальные пути для ее уменьшения.

Ниже будет показано, что сравнительно просто осуществить усиление поверхностных акустических волн в полупроводниках и пьезоэлектриках, используя явление проникновения электрического поля медленной волны в полупроводник, в котором происходит направленное движение носителей. Удельная мощность, выделяемая в единице объема полупроводника, при этом оказывается значительно сниженной по сравнению с усилением продольных или поперечных объемных волн [1].

Впервые усиление ультразвука в твердом теле с помощью дрейфа носителей тока было осуществлено в работе [1]. Опыт ставился следующим образом. Перпендикулярно гексагональной оси пьезоэлектрического полупроводящего и фотоэлектрического кристалла сульфида кадмия (CdS) распространялась поперечная ультразвуковая волна. Согласно выбранной ориентации кристалла при прохождении такой волны в нем возникало переменное бегущее электрическое поле по направлению распространения волны. Специальной подсеткой в кристалле (являющемся в темноте почти

\* В кратком виде эта работа опубликована в «Журнале экспериментальной и теоретической физики», 46, 2253, 1964.

диэлектриком) создавались носители тока. К концам образца прикладывали постоянное электрическое напряжение так, что созданные носители тока дрейфовали также по направлению распространения волны. Когда при повышении приложенного постоянного напряжения средняя скорость дрейфа носителя достигала фазовой скорости ультразвуковой волны, последняя начинала усиливаться. Физически это усиление объясняется процессами взаимодействия дрейфового потока носителей с электрической волной в какой-то мере аналогичными процессами, протекающими в лампе бегущей волны: в бегущем переменном электрическом поле происходит группировка дрейфового потока в сгустки объемного заряда, которые дрейфуют под действием приложенного постоянного электрического поля. Если скорость дрейфа этих сгустков меньше фазовой скорости электрической волны, то волна, «обгоняя» сгустки, отдает часть своей энергии на их ускорение и затухает. Когда же скорость дрейфа превысит фазовую скорость волны, то сгустки объемного заряда будут замедляться в волне, отдавая ей часть своей энергии. Следовательно, амплитуда электрической волны будет расти, и вместе с ней, через обратный пьезоэффект, будет увеличиваться амплитуда звуковой волны.

Этот эффект и наблюдался в опытах Хатсона, Мак-Фи и Уайта. При оптимальных условиях усиление достигало весьма большой величины: на частоте  $15 \text{ Мгц}$  было получено усиление  $26 \text{ дб/см}$ , а на частоте  $45 \text{ Мгц}$  —  $54 \text{ дб/см}$ , т. е. оптимальное усиление возрастает с ростом частоты. Как следовало из опытных данных и из теоретического объяснения Хатсона и других ученых, степень усиления на данной частоте зависит от концентрации носителей тока в кристалле: чем выше частота усиливаемой волны, тем большая концентрация носителей тока требуется для достижения оптимального усиления. Таким образом, на основании теории, создавая в кристалле все более высокие концентрации носителей тока, теоретически возможно продвинуться в область сколь угодно высоких частот (вплоть до  $10^{13}$ — $10^{14} \text{ гц}$  — т. е. частот, соответствующих длинам волн порядка постоянной решетки). Практически, однако, наблюдение этого эффекта оказалось весьма затруднительным. Дело в том, что подвижность носителей тока в CdS и в других известных пьезоэлектрических кристаллах не превышает нескольких сотен практических единиц. Поэтому для достижения дрейфовых скоростей носителей порядка скорости звука требуются сравнительно большие электрические поля — порядка тысяч вольт на сантиметр. При таких полях и при концентрациях носителей тока, необходимых для усиления сравнительно высоких частот, выделяющаяся в единице объема джоулева мощность может достигать весьма больших значений. Так, в опытах Хатсона и других на частотах порядка десятков мегагерц (концентрация  $n_0 \sim 10^{12} \text{ см}^{-3}$ ) эта мощность составляла  $\sim 100 \text{ вт/см}^3$ , и поэтому опыт приходилось проводить в импульсном режиме с очень короткими импульсами (около  $80 \text{ мксек}$ ). Расчет показывает, что если продвинуться в область частот  $\sim 1000 \text{ Мгц}$ , то выделяемую мощность ( $\sim 10^4 \text{ вт/см}^3$ ) не выдержит ни один кристалл даже в импульсном режиме.

В настоящей работе предлагается новый способ (и соответствующие расчеты) усиления звуковых волн дрейфовым потоком носителей, позволяющий, в принципе, избежать указанную трудность.

Способ состоит в том, что в отличие от случая Хатсона дрейфовый поток носителей протекает не в самом пьезоэлектрическом кристалле, через который проходит звуковая волна, а в другом полупроводнике, поверхность которого соприкасается с поверхностью этого кристалла. Таким образом, мы имеем структуру типа «сэндвич», состоящую из слоев (их может быть два или более) пьезоэлектрика (который может быть

теперь и диэлектриком) и полупроводника с высокой подвижностью носителей тока. Физически усиление в такой структуре происходит в значительной мере аналогично тому, как это наблюдалось в опытах Хатсона и др. Звуковая волна, распространяющаяся вдоль границы слоев «сандвича», создает в пьезоэлектрическом слое бегущее переменное электрическое поле, проникающее в полупроводниковый слой, в котором происходит направленный дрейф носителей тока. Такое электрическое поле приводит к группировке носителей тока в сгустки объемного заряда, которые, если их дрейфовая скорость превышает фазовую скорость звуковой волны в системе, отдают часть своей энергии электрическому полю. Это увеличившееся электрическое поле, проникая обратно в пьезоэлектрический слой, вследствие обратного пьезоэффекта, вызывает увеличение амплитуды звуковой волны. Так как взаимодействие звуковой волны с дрейфовым потоком происходит через поверхность, разделяющую пьезоэлектрик и полупроводник, усиливаемая звуковая волна носит поверхностный характер.

### Проникновение поля медленной волны в полупроводник

Рассмотрим вначале вопрос о проникновении электрического поля медленной продольной волны в полупроводник, занимающий полупространство  $z \geq 0$ , в котором происходит направленное движение носителей.

Проникновение быстрых волн в среду, как известно [5], определяется глубиной скин-слоя  $\delta \approx c \sqrt{\sigma/\omega}$ , где  $c$  — скорость волны, в данном случае является просто скоростью света,  $\sigma$  — проводимость среды,  $\omega$  — частота волны. Для медленных волн, фазовая скорость которых намного меньше скорости света, глубина проникновения, как будет показано ниже, определяется радиусом Дебая (при больших концентрациях носителей) и длиной волны, если концентрация носителей мала.

Пусть вдоль границы полупроводника распространяется продольная электрическая волна

$$E(x, t) = E^0 e^{i(\omega t - kx)}, \quad (1)$$

фазовая скорость которой  $\omega/k \ll c$ . Уравнения Максвелла для электрического поля внутри полупроводника  $z \geq 0$  будут

$$\text{rot rot } E - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1 E = - \frac{4\pi i \omega}{c^2} j, \quad (2)$$

где  $\epsilon_1$  — диэлектрическая проницаемость среды (действительная величина),  $j(\omega, x)$  индуцированный волной ток.

Поведение носителей в полупроводнике будем описывать квазигидродинамической системой уравнений, которая всегда применима в области  $\omega \ll \nu$ , где  $\nu$  — эффективная частота столкновений носителей:

$$m n \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} \right] = enE - \nabla (kTn) - mn\nu \mathbf{v}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n\mathbf{v}) = 0. \quad (4)$$

Здесь  $n(x, z, t)$  — плотность электронов (в дальнейшем будем говорить только об электронах; разумеется, все результаты применимы и к полупроводникам  $p$ -типа),  $m$  — эффективная масса,  $\mathbf{v}$  — скорость носителей,  $T$  — температура,  $k$  — постоянная Больцмана. Считая, что все величины

зависят от  $x$  и  $t$  по закону плоской волны (1), вместо уравнений (3), (4) получим:

$$[i(\omega - kv_d) + \nu]v_x = \frac{e}{m} E_x^0 + ik \frac{\kappa T}{mn_0} n_-, \quad (5)$$

$$[i(\omega - kv_d) + \nu]v_z = \frac{e}{m} E_z^0 - \frac{\kappa T}{mn_0} \frac{\partial n_-}{\partial z}, \quad (6)$$

$$i(\omega - kv_d)n_- - ikn_0 + n_0 \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (7)$$

где  $v_d$  — скорость дрейфа электронов;  
 $n_0$  — равновесное значение концентрации электронов;  
 $n_-(\omega, k, z)$  — отклонение концентрации от равновесной, вызванное волной;  
 $n = n_0 + n_-$ ,  
 $E^0$  — амплитуда электрического поля волны.

Из уравнений (5)–(7) следует уравнение для неравновесного значения концентрации носителей:

$$\frac{\partial^2 n_-}{\partial z^2} - \Lambda^2 n_- = 0, \quad (8)$$

где

$$\Lambda^2 = \frac{1 + k^2 r_D^2}{r_D^2} + \frac{i(\omega - kv_d)[\nu + i(\omega - kv_d)]}{v_T^2}. \quad (9)$$

$v_T = \sqrt{\frac{\kappa T}{m}}$  — тепловая скорость электронов,  $r_D = \sqrt{\frac{\kappa T \epsilon_1}{4\pi e^2 n_0}}$  — радиус Дебая. На основании уравнений (5)–(7) можно построить выражение для тока  $J$  и, подставляя его в формулу (2), для медленных волн найдем

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - k^2 E_x = -\frac{4\pi i c k}{\epsilon_1} n_-, \quad E_z = \frac{i}{k} \frac{\partial E_x}{\partial z}. \quad (10)$$

Как и следовало ожидать, система (10) эквивалентна электростатическим уравнениям  $\text{rot } E = 0$  и  $\text{div } E = 4\pi n e$ . Подставляя в формулу (10) решение уравнения (8) в виде

$$n_- = -\frac{k \epsilon_1}{4\pi i e} c e^{-\Lambda z}, \quad (11)$$

где  $c$  — константа, определяемая из граничных условий, получим решение системы (10):

$$E_x(z) = a e^{-kz} + \frac{ck^2}{\Lambda^2 - k^2} e^{-\Lambda z}, \quad (12)$$

где  $a$  — константа.

Чтобы определить характер проникновения волны в полупроводник, очевидно, необходимо определить константы  $a$  и  $c$ . Для этого рассмотрим граничное условие для тока. Как и в случае идеальной жидкости, будем считать, что нормальная составляющая тока на границе  $z = 0$  равна нулю,  $J_z(z = 0) = 0$ . Отсюда сразу находим

$$a = \Lambda k \left( r_D^2 - \frac{1}{\Lambda^2 - k^2} \right) c \quad (13)$$

и, следовательно, электрическое поле будет:

$$E_x(z) = E_0 \frac{\Lambda [1 - (\Lambda^2 - k^2) r_D^2] e^{-kz} - k e^{-\Lambda z}}{\Lambda [1 - (\Lambda^2 - k^2) r_D^2] - k}, \quad (14)$$

где  $E_0$  — значение поля на границе  $z = 0$ .

Рассмотрим предельные значения выражения (14). При малых концентрациях носителей, когда  $n_0 \rightarrow 0$ , т. е.  $r_D \rightarrow \infty$ , из (14) имеем

$$E_x(z) \approx E_0 e^{-kz} \quad (15)$$

и, следовательно, глубина проникновения волны определяется длиной волны. При больших концентрациях, когда  $n \rightarrow \infty$ ,  $r_D \rightarrow 0$ , из выражения (14) следует

$$E_x(z) \approx E_0 \left\{ \frac{i(\omega - kv_d)[v + i(\omega - kv_d)]}{kv_T^2} r_D e^{-kz} + e^{-\frac{z}{r_D}} \right\}. \quad (16)$$

Таким образом, при больших концентрациях глубина проникновения определяется дебаевским радиусом. Существенно, что в отличие от случая быстрых волн, когда глубина проникновения с ростом концентрации электронов экспоненциально падает, для медленных волн глубина проникновения определяется законом  $n_0^{-\frac{1}{2}}$ .

Из полученных выражений следует, что эти результаты применимы в том случае, когда длина свободного пробега носителей намного меньше самой меньшей из длин дебаевского радиуса или длины волны.

#### Дисперсионное уравнение поверхностных волн

Пусть над полупроводником находится слой пьезоэлектрика толщиной  $h$  ( $0 > z > -h$ ) и вдоль границы  $z = 0$  распространяется упругая волна. Электрическое поле  $E'$ , которое возникает внутри пьезоэлектрической пластинки, удовлетворяет уравнению [6, 7]

$$\frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 E'_x}{\partial z^2} - E'_x = -\frac{4\pi}{v_2} \beta_{x, ik} u_{ik}, \quad (17)$$

где  $\epsilon_2$  — диэлектрическая проницаемость пьезоэлектрика,  $\beta_{i, ik}$  — пьезотензор «по деформации» [6],  $u_{ik}$  — тензор деформации пьезоэлектрика, связанный с вектором смещения  $u$  обычным соотношением

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right).$$

Условия на границе полупроводника и пьезоэлектрика ( $z = 0$ ) будут:

$$E_x = E'_x, \quad \epsilon_1 \frac{\partial E_x}{\partial z} = \epsilon_2 \frac{\partial E'_x}{\partial z} \quad (z = 0). \quad (18)$$

На свободной границе  $z = -h$ :

$$E'_x = E_x^r, \quad \epsilon_1 \frac{\partial E'_x}{\partial z} = \frac{\partial E_x^r}{\partial z} \quad (z = -h), \quad (19)$$

где  $E_x^r = b e^{kz}$  — электрическое поле в вакууме.

Решение уравнения (17), удовлетворяющее граничным условиям (18), (19), имеет вид:

$$E_x(z) = \frac{4\pi\beta_{x,ik}}{\epsilon_2} \int_{kz}^0 \operatorname{sh}(\tau - kz) u'_{ik}(\tau) d\tau + c_1 e^{-kz} + c_2 e^{kz}, \quad (20)$$

где

$$c_1 = -\frac{4\pi\beta_{x,ik}}{\epsilon_2} \int_{-kh}^0 e^{\tau} u'_{ik}(\tau) d\tau, \quad (21)$$

$$c_2 = c_1 \frac{\epsilon_2 + (\epsilon_1 - \epsilon_2) \Lambda (\Lambda + k) r_D^2}{\epsilon_2 - (\epsilon_1 + \epsilon_2) \Lambda (\Lambda + k) r_D^2}. \quad (22)$$

Вектор смещения упругой волны, которая затухает вглубь полупроводника [6—8], удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\kappa_1^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} - u = 0, \quad (0 < z < \infty), \quad (23)$$

где  $u$  — вектор смещения в полупроводящей среде,  $\kappa_1^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}$  ( $c_1$  — скорость поперечной упругой волны). Аналогично, в пьезосреде вектор смещения  $u'$  удовлетворяет уравнению:

$$\frac{1}{\kappa_2^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} + u' = \frac{ik\beta_{x,ik}}{\rho c_2^2 \kappa_2^2} E_x(z), \quad (0 \geq z \geq -h), \quad (24)$$

где  $\rho$  — плотность пьезоэлектрика,  $\kappa_2^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2} - k^2$  ( $c_2$  — скорость упругой волны в пьезосреде).

Подставляя в уравнение (24) выражение для электрического поля (20), получим интегродифференциальное уравнение, которое может быть решено путем разложения вектора смещения  $u$  в ряд. В качестве параметра разложения при этом фигурирует квадрат константы электромеханической связи

$$\zeta^2 = \frac{4\pi\beta_{x,ik}^2}{\rho c_2^2 \epsilon_2} \ll 1, \quad (25)$$

которая обычно намного меньше единицы. Например, для такого сильного пьезоэлектрика как CdS  $\zeta \approx 0,2$ ; для кварца  $\zeta \approx 0,01$ .

Из условий на границе  $z = 0$  и  $z = -h$  следует:

$$\sigma_{iz} = \sigma'_{iz}(z=0), \quad \sigma_{iz} = 0 \quad (z = -h), \quad (26)$$

где  $\sigma_{ik}$  — тензор напряжений. Очевидно, что этим граничным условиям проще всего удовлетворить тогда, когда волна имеет вектор смещения только с компонентой  $u_y \neq 0$ . Это означает, что в полупроводнике распространяется поверхностная поперечная волна, а в пьезоэлектрическом слое обычная поперечная волна. Поэтому  $c_1$  и  $c_2$  означают просто скорости распространения поперечных волн в соответствующих средах. Поперечная волна будет сопровождаться продольным электрическим полем, если для выбранного направления распространения симметрии пьезоэлектрика будут существовать компоненты пьезотензора

$$\beta_{x,yx} \neq 0.$$

В нулевом приближении по  $\zeta^2$  из выражения (26) следует дисперсионное уравнение рассматриваемых волн [8]:

$$\operatorname{tg} \kappa_2 h = \frac{\mu_1 \kappa_1}{\mu_2 \kappa_2}, \quad (27)$$

где  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — модули сдвига полупроводника и пьезоэлектрика. Уравнение (27) определяет в неявном виде зависимость  $\omega$  от  $k$  и, следовательно, фазовую скорость этих волн. Можно показать, что уравнение (27) имеет решения лишь при вещественных  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ , так что фазовая скорость  $\xi = \frac{\omega}{k}$  удовлетворяет неравенству

$$c_1 < \xi < c_2.$$

Отсюда видно, что распространение рассматриваемых волн возможно лишь при условии, когда скорость поперечных волн в полупроводнике больше скорости поперечных волн в пьезоэлектрике.

Следующее приближение дает уравнение для добавки  $\Delta k$  к волновому вектору  $k = \omega/\xi$ , где  $\xi$  — фазовая скорость рассматриваемой волны, определяемая из уравнения (27). Если толщина пьезоэлектрического слоя больше длины волны  $h > \lambda$  (что всегда, по-видимому, и имеет место), то из выражения (23) следует:

$$\Delta k = -\zeta^2 k \frac{\varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \Lambda (\Lambda + k) r_D^2}{\varepsilon_2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \Lambda (\Lambda + k) r_D^2} F(\omega, k, h), \quad (28)$$

где

$$F(\omega, k, h) = \frac{\left[1 + \frac{\kappa_1 \mu_1}{\kappa_2 \mu_2}\right] \left[1 + \frac{\mu_1 \kappa_1 k}{\mu_2 \kappa_2^2}\right]}{\kappa_2 h \left[1 + \left(\frac{\kappa_1 \mu_1}{\kappa_2 \mu_2}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{k}{\kappa_2}\right)^2\right]} \quad (29)$$

— действительная и положительная функция своих аргументов. В выражении (28) отброшены все члены, которые не дают вклада в мнимую часть волнового вектора: учет их приводит лишь к перенормировке фазовой скорости волны и не сказывается на затухании (усилении).

В общем случае мнимая часть волнового вектора равна

$$\operatorname{Im} \Delta k = -\zeta^2 \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \chi''(\omega/\xi)}{[\varepsilon_2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \chi' \Gamma^2 + \chi''^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2]} F\left(\omega, \frac{\omega}{\xi}, h\right), \quad (30)$$

где  $\chi'$  и  $\chi''$  — действительная и мнимая части выражения  $\Lambda (\Lambda + k) r_D^2$ :

$$\chi' = 1 + k^2 r_D^2 + \frac{k r_D}{V^2} \left[1 + k^2 r_D^2 + \sqrt{(1 + k^2 r_D^2)^2 + \frac{\omega^2 v^2}{\omega_0^4} (1 - \beta)^2}\right], \quad (31)$$

$$\chi'' = \frac{\omega v}{\omega_0^2} (1 - \beta) \left\{1 + \frac{1}{V^2} \left[1 + k^2 r_D^2 + \right.$$

$$\left. + \sqrt{(1 + k^2 r_D^2)^2 + \frac{\omega^2 v^2}{\omega_0^4} (1 - \beta)^2}\right]^{-1/2}\right\}. \quad (31')$$

Здесь  $\beta = \frac{v_d}{\xi}$  — отношение скорости дрейфа к фазовой скорости волны. Очевидно, что когда скорость дрейфа превышает фазовую скорость волны ( $\beta > 1$ ), поглощение сменяется усилением.

Для малых концентраций носителей, когда  $kr_D \gg 1$  и кроме того,  $\frac{\omega}{v} \frac{v_F^2}{\xi^2} < 1$ , из выражения (30) имеем

$$Imk = -\zeta^2 \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2} \frac{\frac{\omega_0^2}{v \xi} (1-\beta) F\left(\omega, \frac{\omega}{\xi}, h\right)}{(1-\beta)^2 + 4 \frac{v_F^2 \omega^2}{\xi^2 v^2} \left(1 + \frac{1}{8\sqrt{2}} \frac{\xi^4 v^2}{\omega^2 v_F^4}\right)^2} \quad (32)$$

и усиление, пропорциональное концентрации  $n_0$ .

Аналогичным образом, в области больших концентраций, когда  $kr_D < 1$  из того же выражения найдем

$$Im\Delta k = -\zeta^2 \frac{\omega}{\xi} \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 \frac{\omega v}{\omega_0^2} (1-\beta)}{\epsilon_1^2 + (\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 \frac{\omega^2 v^2}{\omega_0^4} (1-\beta)^2} F\left(\omega, \frac{\omega}{\xi}, h\right) \quad (33)$$

и, следовательно, усиление с ростом концентрации падает, т. е.  $n_0^{-1}$ .

Можно показать, что в оптимальных условиях усиление с частотой возрастает, и при высоких частотах может достигать весьма больших значений. Например, для пьезоэлектрика с параметрами, аналогичными параметрам CdS, усиление составит  $\sim 100$  дБ/см при частоте  $\sim 120$  МГц.

Выше рассматривался случай, когда над полупроводником находится тонкий слой пьезоэлектрика. Однако возможна и другая система — когда над пьезоэлектриком находится тонкий слой полупроводника. Можно показать, что и в этом случае глубина проникновения электрического поля медленной волны определяется выражением (14), если только длина волны меньше толщины пьезоэлектрического слоя. Вся дальнейшая схема ничем не отличается от рассмотренной выше, окончательная формула для инкремента такая же, но вместо функции в нее входит выражение

$$\tilde{F}\left(\omega, \frac{\omega}{\xi}, h\right) = \frac{\kappa_1 \mu_1^2}{\left(1 + \frac{h}{\kappa_1}\right)^2 (\mu_1^2 \kappa_1^2 + \mu_2^2 \kappa_2^2) h} > 0,$$

где 1 — относится к пьезосреде, а 2 — к полупроводнику.

Выше нами не учитывалась возможность вязкого поглощения поверхностных волн. Очевидно, что в линейном приближении учет поглощения приводит лишь к появлению дополнительного члена, пропорционального значению вязкости в выражениях для инкремента нарастания.

Полученные нами формулы для инкремента усиления в различных случаях справедливы только для бальцмановского газа электронов, далекого от вырождения. Однако они будут справедливы и для вырожденного электронного газа, если выполнить формальную замену

$$v_F \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} v_F, \quad (34)$$

где  $v_F$  — скорость Ферми. Справедливость этого утверждения непосредственно видна из выражения для давления электронного газа, находящегося в вырожденном состоянии [9]:

$$P = \frac{1}{5} \left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{n^{\frac{5}{3}}}{m} (n)^{\frac{5}{3}},$$

где  $\hbar$  — постоянная Планка;

градиент давления будет

$$\nabla P = \frac{1}{3} \left( \frac{b\pi^2}{g} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar}{m} \nabla n n_0^{\frac{2}{3}} = \frac{m}{3} v_F^2 \nabla n, \quad (15)$$

$$\text{где } v_F = \left( \frac{6\pi^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}} n_0^{\frac{1}{3}} \frac{\hbar}{m}.$$

Подставляя выражение (35) в уравнение квазигидродинамики (3), мы видим, что все результаты с учетом замены по формуле (34) остаются в силе.

В заключение в качестве примера приведем расчет оптимального усиления в системе, состоящей из кристалла Ge и кристалла CdS при температуре  $T \approx 80^\circ \text{K}$  (подвижность носителей тока в Ge при этой температуре  $\sim 5 \cdot 10^4 \text{ см}^2/\text{сек}$ ):

1) частота  $f = 10^9 \text{ гц} = 100 \text{ Мгц}$   $Imk_{\text{max}} = 58 \text{ дб/см}$ , выделяемая в единице объема мощность  $W \approx 0,2 \text{ вт/см}^3$ ;

2) частота  $f = \frac{\omega}{2\pi} = 10^9 \text{ гц} = 1000 \text{ Мгц}$   $Imk_{\text{max}} = 580 \text{ дб/см}$ , выделяемая в единице объема мощность  $W \approx 2,25 \text{ вт/см}^3$ .

Таким образом, при сравнительно большом усилении в системе мощность, выделяемая в единице объема полупроводника оказывается сравнительно малой. Это, как уже указывалось выше, снижает трудности, возникающие при усилении, и позволяет надеяться, что в дальнейшем можно будет перейти в непрерывный режим усиления или генерации поверхностных волн.

Аналогичным образом могут быть рассмотрены вопросы усиления и плазменных волн в слоистых системах [10].

Авторы выражают благодарность чл.-корр. АН СССР проф. В. Л. Гинзбургу, проф. С. Г. Калашникову, проф. В. Л. Бонч-Бруевичу и проф. Л. В. Келдышу за обсуждение работы и ценные замечания.

#### Л и т е р а т у р а

1. Hutson A. R., White D. L., McFee J. H. Phys. Rev. Lett., 7, 237, 1961.
2. Пустовойт В. И. ЖЭТФ, 43, 2281, 1962.
3. Пустовойт В. И. ФТТ, 5, 2490, 1963.
4. Spertor H. N. Phys. Rev., 130, 910, 1953.
5. Гинзбург В. Л., Мотулевич Г. П. УФН, 60, 469, 1955.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. ГИТТЛ, 1957.
7. Пустовойт В. И., Герценштейн М. Е. ФТТ, 8, 879, 1964.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред, М., ГИТТЛ, 1954.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М., ГИТТЛ, 1957.
10. Гуляев Ю. В., Бонч-Бруевич В. Л. Радиотехника и электроника, 7, 1179, 1963.

Статья поступила 30 ноября 1964

УДК 539.493:584

## О ВОЗМОЖНОСТИ УСИЛЕНИЯ ИЗГИБНЫХ ВОЛН \*

Показано, что в полупроводниковой пластинке возможно усиление изгибных волн, если скорость дрейфа носителей превышает фазовую скорость изгибной волны. Найдены инкременты нарастания и выяснена частотная зависимость усиления. Показано, что усиление возможно только в области частот, определяемых неравенством (23).

Выяснено влияние магнитного поля на инкремент нарастания.

Поскольку мощность, выделяемая в единице объема кристалла, в случае усиления изгибных волн значительно ниже, чем при усилении поперечных или продольных волн, оказывается возможным избежать интенсивного разогрева кристалла.

Плазменная среда, в которой происходит дрейфовое движение частиц, как известно [1, 2], способна усиливать волны, если их фазовая скорость меньше скорости дрейфа. Экспериментально этот эффект был обнаружен Хатсоном с сотрудниками [2]. Ими было получено усиление ультразвука в полупроводящих кристаллах Cd S, когда дрейфовое движение носителей превысило скорость звука.

Основная трудность использования этого эффекта заключается в том, что в единице объема полупроводника в режиме усиления выделяется сравнительно большая мощность. Так, в опыте Хатсона [2], эта удельная мощность составляет  $100 \text{ вт/см}^3$ , в случае же усиления в полуметаллах [3, 4] она будет значительно выше.

Одним из путей уменьшения выделяемой мощности в единице объема является использование изгибных волн. Действительно, фазовая скорость изгибных волн пропорциональна корню из частоты и для малых частот может быть значительно меньше скорости звука в неограниченной среде. Мощность, выделенная в единице объема кристалла, при постоянной концентрации носителей пропорциональна квадрату скорости дрейфа, поэтому снижение ее приводит к уменьшению разогрева кристалла. При использовании достаточно тонких пластинок это, по-видимому, дает возможность перейти в непрерывный режим усиления или генерации.

## Дисперсионное уравнение изгибных волн

Рассмотрим изгибные колебания в пластинке толщиной  $h$ . Плоскость  $XOY$  совпадает с нейтральной поверхностью, смещения которой происходят вдоль оси  $z$ . Пластинка считается тонкой, т. е.

$$h < \lambda, \quad (1)$$

где  $\lambda$  — замедленная длина волны. Вектор смещения нейтральной поверхности равен [5]:

$$u_x^{(0)} = u_y^{(0)} = 0, \quad u_z^{(0)} = \xi(x, y). \quad (2)$$

\* Работа опубликована в журнале «Физика твердого тела», 6, 3, 879, 1964.

На основании этого смещение точки с координатой  $z \neq 0$  равно [5]:

$$u_x = -z \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad u_y = -z \frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad u_z = \xi(x, y), \quad (3)$$

причем в этом выражении опущены члены порядка  $(z/\lambda)^2$ , которые в силу условия (1) малы. Зная вектор смещения, нетрудно определить тензор деформации  $u_{ik}$ . Для волны, проходящей вдоль оси  $x$ , отличные от нуля компоненты тензора  $u_{ik}$  будут

$$u_{xx} = -z \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad u_{zz} = z \frac{p}{1-p} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (4)$$

где  $p$  — коэффициенты Пуассона,  $p < 0,5$ . Свободная энергия единицы объема деформированной волной пластинки будет

$$F = \frac{1}{2} \lambda_{ijklm} u_{ik} u_{lm} = \frac{N}{1-p^2} z^2 \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)^2, \quad (5)$$

где  $\lambda_{ijklm}$  — тензор модулей упругости;

$N$  — модуль Юнга в «направлении» распространения волны.

Добавка к свободной энергии за счет пьезосвойств, как известно, имеет вид [6]:

$$\Delta F = \beta_{i,kl} E_i u_{kl}, \quad (6)$$

где  $\beta_{i,kl}$  — пьезотензор по «деформациям»,

$E$  — электрическое поле, возникающее вследствие деформации

$$E(x, t) = E(z) e^{i\omega t - ikx}. \quad (7)$$

Зависимость электрического поля от оси  $z$  вызвана неоднородной вдоль нее деформацией пластинки. Чтобы определить поле  $E$ , необходимо решить уравнения Максвелла, которые после исключения магнитного поля волны, будут:

$$\text{rot rot } E - \frac{\omega^2}{c^2} D = 0. \quad (8)$$

Здесь  $D$  — вектор индукции, определяемой согласно [6] отношением

$$D_i = \epsilon_{ik} E_k - 4\pi \beta_{i,kl} u_{kl}. \quad (9)$$

где  $\epsilon_{ik}$  — тензор диэлектрической проницаемости среды.

Полагая для упрощения  $E_y = 0$  (что всегда можно достичь соответствующим выбором симметрии пластинки), из уравнения (8) для волны  $E_x$  получим решение:

$$E_x = \frac{4\pi \beta_{x,kl} u_{kl}}{\epsilon_{xx}(\omega, k)}, \quad E_z = \frac{4\pi \beta_{z,kl}}{k \epsilon_{xx}(\omega, k)} \frac{\partial}{\partial z} u_{kl}. \quad (10)$$

При выводе уравнений (10) мы учли, что  $|\epsilon_{ij}|^2 v_{\Phi} \ll c$  — т. е. скорости света.

Подставляя значения тензора деформации из выражения (4) и найденные выражения для поля (10) в уравнение (6), получим добавку к свободной энергии, обусловленную пьезосвойствами среды:

$$\Delta F = \frac{4\pi \beta_{\text{эфф}}^2}{\epsilon_{xx}} z^2 \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{4\pi i}{k \epsilon_{xx}} z \beta_{\text{эфф}} \left[ \beta_{z,xx} - \frac{p}{1-p} \beta_{z,zz} \right] \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)^2, \quad (11)$$

где  $\beta_{\text{эфф}} = \beta_{x,xx} - \frac{p}{1-p} \beta_{x,zz}$  — эффективный пьезомодуль для изгиб-

ных волн. Полная свободная энергия пластинки определится в результате интегрирования по всему объему пластинки

$$F^{(n)} = \int_{(v)} F dv = \frac{Nh^2}{12(1-p^2)} \int \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)^2 dx dy + 4\pi\beta_{\text{эфф}}^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{z^2 dz}{v_{xx}} \int \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)^2 dx dy, \quad (12)$$

Член, пропорциональный первой степени  $z$ , в результате интегрирования становится равным нулю, поскольку  $\epsilon_{xx}(z)$  — симметричная функция  $z$ . Ниже мы увидим, что в интересующей нас области частот тензор диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{xx}(\omega, k, z)$  можно считать независимым от  $z$ . Тогда интеграл (12) легко вычисляется, и мы видим, что уравнения изгибных колебаний пьезополупроводящей пластинки можно получить из обычного уравнения путем формальной замены:

$$\frac{N}{2(1-p^2)} \rightarrow \frac{N}{2(1-p^2)} + \frac{2\pi\beta_{\text{эфф}}^2}{\epsilon_{xx}(\omega, k)}. \quad (13)$$

Поэтому уравнения для изгибных волн можно написать в виде

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{h^2}{6} \left[ \frac{N}{2(1-p^2)} + \frac{2\pi\beta_{\text{эфф}}^2}{\epsilon_{xx}(\omega, k)} \right] \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0, \quad (14)$$

где  $\rho$  — плотность. Полагая  $\xi \approx e^{i\omega t - ikx}$ , получим дисперсионное уравнение

$$\rho\omega^2 - \frac{h^2}{6} \left[ \frac{N}{2(1-p^2)} + \frac{2\pi\beta_{\text{эфф}}^2}{\epsilon_{xx}(\omega, k)} \right] k^4 = 0. \quad (15)$$

Чтобы определить инкремент нарастания и выяснить частотную зависимость эффекта, необходимо знать выражение для комплексного тензора диэлектрической проницаемости пластинки  $\epsilon_{ij}(\omega, k, z, h)$ .

#### Вычисление тензора диэлектрической проницаемости плазмы носителей в полупроводниковой пластинке

Вычисление тензора  $\epsilon_{ij}(\omega, k, z, h)$  произведем методом, развитым в работе [7], который аналогичен квазигидродинамическому приближению [8]. Рассмотрим вначале задачу для условия, когда магнитное поле отсутствует. Тогда уравнения для определения добавки  $\varphi_0 + \frac{\vec{v}}{v} \varphi_1$  к равновесной функции распределения, обусловленной наличием волны (7) и внешнего постоянного поля  $E_z$  будут [7]:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \frac{v}{3} \text{div}_r \varphi_1 + \frac{eE_z}{3mv^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 \varphi_1) + \hat{S}_0 \varphi_0 = - \frac{eE}{3mv^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 f_1); \quad (16)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + v \text{grad}_r \varphi_0 + \frac{eE_z}{m} \frac{\partial \varphi_0}{\partial v} + v \varphi_1 = - \frac{eE}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v}.$$

Здесь  $f_0$  — равновесная функция распределения;  
 $f_1$  — токовая добавка;  
 $v$  — эффективная частота соударений носителей;

$\hat{S}_0 \varphi_0$  — интеграл соударений (см. подробнее в работе [7]).

Первое уравнение (16) умножим на  $v^2 dv$  и проинтегрируем по всем скоростям. Тогда, подставляя в найденное таким образом уравнение непре-

равности значения функции  $\varphi_1(v)$ , определенные из второго уравнения (16), как и в работе [7], для волны найдем

$$\left( \omega - k v_- - \frac{i \omega^2 v_T^2}{v v_\Phi^2} \right) n_- - \frac{i v_T^2}{v} \frac{\partial^2}{\partial z^2} n_- = \frac{e}{m v} \left[ k E_x - i \frac{\partial E_x}{\partial z} \right] n_0, \quad (17)$$

где  $n_- = \int_0^\infty v^2 \varphi_0 dv$ ,  $n_0 = \int_0^\infty v^2 f_0 dv$ ,  $v_- = \frac{e E_-}{m v}$  — скорость дрейфа носителей под действием поля  $E_-$ ,  $v_T = (2 k T_e / m)^{1/2}$  — тепловая скорость носителей.

В уравнение (17) входит член с производной по  $z$ , который определяет поперечную диффузию газа носителей. Следует отметить, что замена производных по времени на  $i \omega$  уже неявно предполагает, что диффузия вдоль  $z$  мало существенна. Действительно, в том случае, когда диффузионный поток велик, происходит интенсивное перемешивание зарядов, и периодичность процесса во времени может быть нарушена. Поэтому выражение (17) справедливо при выполнении условия

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} n_-(x, t) \right| \gg \left| \frac{\partial}{\partial z} n_-(x, t) \right|. \quad (18)$$

Решение уравнения (17) для электрического поля, линейно растущего по  $z$ ,  $E(z) \approx z$ , и при граничных условиях  $n_-(z) = 0$  ( $z = 0$ ) и  $\frac{\partial}{\partial z} n_-(z = \pm h/2) = 0$ , будет иметь вид:

$$n_-(x, \omega) = n_0 \frac{v_-(z)}{v_\Phi} \frac{1 - \frac{\sin \zeta z}{\zeta z \cos \frac{1}{2} \zeta h}}{1 - \beta - \frac{i k^2 v_T^2}{\omega v}}, \quad (19)$$

где

$$\zeta = i \omega \frac{v}{v_T^2} \left( 1 - \beta - \frac{i k^2 v_T^2}{\omega v} \right)^{1/2}.$$

Тензор диэлектрической проницаемости

$$\epsilon_{xx}(\omega, k, \dots) = \epsilon_0 + \frac{4\pi}{i \omega} \sigma_{xx}(\omega, k, \dots), \quad (20)$$

где  $\epsilon_0$  — статическое значение диэлектрической проницаемости кристалла, а  $\sigma_{xx}$  — комплексная проводимость плазмы носителей, которая на основании выражения (19) легко может быть построена (см. [4, 5]):

$$\sigma_{xx}(\omega, k, z, h) = \sigma_0 \frac{1 - \frac{\sin \zeta z}{\zeta z \cos \frac{1}{2} \zeta h} \left( \beta + \frac{i k^2 v_T^2}{\omega v} \right)}{1 - \beta - \frac{i k^2 v_T^2}{\omega v}}. \quad (21)$$

где  $\sigma_0 = \frac{e^2 n_0}{m v}$  — проводимость по постоянному току.

Рассмотрим предельные значения формулы (21). Для толстой пластинки, когда  $h \rightarrow \infty$ , формула (21) дает известную формулу для комплексной проводимости [7]

$$\sigma_{xx}(h \rightarrow \infty) = \sigma_0 \frac{1}{1 - \beta - \frac{i k^2 v_T^2}{\omega v}}. \quad (22)$$

Наоборот, для очень тонких пластинок, когда  $h \rightarrow 0$ , имеем

$$\sigma_{xx}(h \rightarrow 0) \rightarrow \sigma_0$$

и усиление оказывается невозможным. Физически это обусловлено поперечной диффузией носителей, которая при  $h \rightarrow 0$  становится весьма существенной.

Выясним область частот, в которой поперечная диффузия объемного заряда не существенна, т. е., другими словами, когда формула (21) переходит в выражение (22). Очевидно, что для этого необходимо, чтобы  $h|\xi| \gg \beta \sim 1$ , т. е.

$$\omega \gg \frac{1}{v} \frac{v_T^2}{h^2}$$

Поэтому усиление изгибных волн возможно в области частот

$$\frac{1}{v} \frac{v_T^2}{h^2} \ll \omega < \frac{c_\perp}{h}, \quad (23)$$

где  $c_\perp$  — скорость поперечных волн. Для кристаллов типа CdS  $v \approx 10^{14}$  сек<sup>-1</sup>,  $\approx c_\perp \approx 2 \cdot 10^8$  см/сек и в случае использования пластинки толщиной  $\sim 10^{-2}$  см при комнатной температуре ( $v_T = 10^7$  см/сек) неравенство (23) дает

$$10^4 \text{ гц} < \omega < 10^7 \text{ гц}.$$

Мы будем рассматривать только область частот, определяемую неравенством (23), поэтому для тензора проводимости можно ограничиться его предельным значением (22).

#### Инкремент нарастания и частотная зависимость усиления

В случае изгибных волн роль константы электромеханической связи играет величина

$$K_{\text{изг}} = \left[ \frac{2\pi\beta_{\text{эфф}}^2}{\epsilon_0 Q} \frac{2(1-p)Q}{N} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \frac{2\pi\beta_{\text{эфф}}^2}{\epsilon_0 Q c_\perp^2} (1-p) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (24)$$

где  $c_\perp = \sqrt{\frac{N}{2Q(1-p)}}$  — скорость поперечной волны.

Из выражения (24) следует, что  $K_{\text{изг}} \approx (1-p)^{\frac{1}{2}} k_\perp$ , т. е. электро-механическая константа изгибных волн меньше соответствующей константы поперечных волн. Поэтому, как и в случае бесконечной среды, дисперсионное уравнение (15) можно решать методом последовательных приближений. Нулевое приближение определяет фазовую скорость изгибных волн

$$v_\Phi = \frac{hk}{\sqrt{6(1-p)}} c_\perp < \frac{2\pi h}{\sqrt{3}\lambda} c_\perp. \quad (25)$$

На основании соотношения (25) дисперсионное уравнение (15) удобно переписать в форме

$$\omega^2 - \frac{h^2 k^4}{6(1-p)} c_\perp^2 \left[ 1 + (1-p) k_\perp^2 \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{xx}(\omega, k)} \right] = 0. \quad (26)$$

Отсюда сразу находим инкремент нарастания на единицу длины пластинки

$$\text{Im}k = -\frac{1}{4} k_\perp^2 \left( \frac{6}{1-p} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\omega}{hc_\perp}} \epsilon_0 \text{Im}\epsilon_{xx}^{-1}. \quad (27)$$

Подставляя значения тензора диэлектрической проницаемости из выражений (20), (22), получим

$$Imk = -\frac{1}{4} k_{\perp}^2 \left( \frac{6}{1-p} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{\omega_0^2 \epsilon_0}{v \sqrt{hc_{\perp} \omega}} \times \\ \times \frac{1 - \beta(\omega)}{[1 - \beta(\omega)]^2 v_0^2 + \frac{\omega_0^4}{\omega^2 v^2} \left[ 1 + \frac{2}{3} \frac{\omega \epsilon_0}{hc_{\perp}} r_D^2 (1-p) \right]^2}, \quad (28)$$

где  $\omega_0 = (4\pi e^2 n_0 / m)^{\frac{1}{2}}$  — плазменная частота носителей,

$r_D = (\kappa T / 4\pi e^2 n_0)^{\frac{1}{2}}$  — радиус Дебая.

Отсюда видно, что усиление будет происходить при

$$v_{\perp} > \sqrt{\frac{c_{\perp} h \omega}{V \epsilon (1-p)}}. \quad (29)$$

Для частоты  $\omega \approx 10^6$  гц,  $h = 10^{-2}$  см,  $c_{\perp} \approx 2 \cdot 10^5$  см/сек, выражение (29) будет иметь вид

$$v_{\perp} > 2 \cdot 10^4 \text{ см/сек.}$$

т. е. скорость дрейфа должна превышать одну десятую скорости поперечной волны. Мощность, выделяемая в единице объема пластинки, пропорциональна квадрату скорости дрейфа и, следовательно, в режиме усиления составляет примерно одну сотую мощности, выделяемой при усилении поперечной волны.

Отметим, что использование изгибных волн снижает требования, предъявляемые к самому кристаллу. Действительно, условия усиления (29) могут быть осуществлены при меньшей подвижности носителей, а это открывает широкие возможности для использования такого класса веществ, как сегнетоэлектрики и различные виды керамики, подвижность носителей в которых может быть доведена до нескольких десятков см/сек·в.

При заданной частоте и толщине пластинки  $h$  максимум усиления определяется концентрацией носителей  $n_0$ . Приравняв нулю производную по  $\omega_0$  от выражения (28), находим значение плазменной частоты, при которой инкремент максимален

$$\omega_0 = \sqrt{\omega v} \left\{ 2\epsilon_0 \left[ \frac{2(1-p)}{3hc_{\perp} v} v_T^2 + \sqrt{(1-\beta)^2 + \left( \frac{2(1-p)v_T^2}{3hc_{\perp} v} \right)^2} \right] \right\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (30)$$

Подставляя уравнение (30) в уравнение (28), получим максимальное значение инкремента нарастания

$$\max Imk = -\frac{1}{8} k_{\perp}^2 \left( \frac{6}{1-p} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\omega}{hc_{\perp}}} \times \\ \times \frac{1 - \beta}{\frac{2(1-p)}{3hc_{\perp} v} v_T^2 + \left\{ (1-\beta)^2 + \left[ \frac{2(1-p)v_T^2}{3hc_{\perp} v} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}. \quad (31)$$

В предельном случае низкой температуры, когда

$$|1 - \beta| \gg \frac{2}{3} \frac{(1-p)}{hc_{\perp} v} v_T^2$$

максимальное значение инкремента нарастания, как и в случае бесконечной среды [4], не зависит от скорости дрейфа

$$\max \text{Im} k \sim \text{sign} (\beta - 1). \quad (32)$$

Для кристаллов с параметрами типа параметров кристалла CdS максимальное значение усиления составляет примерно 50 дБ/см при частоте 10 МГц.

Рассмотрим влияние магнитного поля на усиление изгибных волн. При сильном продольном магнитном поле, когда  $H \parallel k$ , поперечная диффузия электронов (дырок) уменьшается. Нетрудно показать, что в этом случае меняется только нижняя граница области усиливаемых частот; вместо неравенства (23) получим

$$\frac{v}{\Omega^2 + v^2} \frac{v_T^2}{h^2} \ll \omega < \frac{c_{\perp}}{h}, \quad (33)$$

где  $\Omega = eH/mc$  — циклотронная частота носителей.

Как видно из выражения (33), магнитное поле становится существенным только при условии  $\Omega \gg v$ .

Поперечное магнитное поле, направленное по оси  $y$ , приводит к тому, что во всех формулах частоту соударений  $v$  необходимо заменить на  $v_{\text{эфф}}$ , определяемую выражением [4]

$$v_{\text{эфф}} = v \left( \frac{\Omega^2 + v^2}{v^2} \right). \quad (34)$$

Скорость дрейфа при этом, однако, остается неизменной, что обусловлено появлением соответствующего «холловского поля»\*.

#### Усиление изгибных волн в полупроводящей пластинке

Выше рассматривался вопрос об усилении изгибных волн в пьезополупроводящей пластинке. Взаимодействие между электронами проводимости и акустическими колебаниями решетки при этом осуществляется через электрическое поле волны, которое возникает вследствие деформации пьезосреды. Однако возможно и непосредственное электрон-фононное взаимодействие; энергия электрона в зоне проводимости в этом случае зависит от деформации решетки и в линейном приближении пропорциональна тензору деформации. Действующая на решетку объемная сила, обусловленная электрон-фононным взаимодействием, равна [9]:

$$F_i^{(p)} = \frac{\partial}{\partial x_k} \int d\mathbf{v} \Lambda_{ik}(\mathbf{v}) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (35)$$

где  $\Lambda_{ik}(\mathbf{v})$  — набор констант электрон-фононного взаимодействия. Уравнения движения (14) в этом случае примут вид:

$$e \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{h^2 N}{12(1-p^2)} \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} - \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} F_z^{(p)} dz = 0, \quad (36)$$

\* Мы не рассматриваем возможную поверхностную рекомбинацию носителей или другие явления, которые могут повлиять на величину «холловского поля», предполагая, что носители зеркально отражаются от соответствующих поверхностей пластинки.

где  $F_z^{(p)}$  является составляющей по оси  $z$  силы, определяемой соотношением (35). Подставляя в уравнение (35) выражение для разложения функции распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  (см. [4, 7]) и интегрируя его по углам в пространстве скоростей, получим

$$F_z^{(p)} = 4\pi\Lambda_{zk} \frac{\partial}{\partial x_k} \int_0^\infty v^2 \varphi_0 dv, \quad (37)$$

причем здесь мы предположили, что тензор  $\Lambda_{jk}$  не зависит от квазиимпульса электрона. Чтобы получить выражение для переменной компоненты плотности объема заряда  $n_-(\mathbf{x}, t)$  в уравнениях (16), достаточно произвести формальную замену

$$e\mathbf{E} \rightarrow e\mathbf{E}^{(n)} + \Lambda_{ij} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial x_j}, \quad (38)$$

где  $\mathbf{E}^{(n)}$  — поле поляризации, которое определяется из уравнения Пуассона

$$\text{div } \epsilon_0 \mathbf{E}^{(n)} = 4\pi e n_-(\mathbf{x}, t). \quad (39)$$

В итоге для компоненты Фурье плотности получим

$$n_-(k, \omega) = n_0 \frac{\Lambda_{kj}}{mvv_\phi} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x \partial x_j} \cdot \frac{1 - \frac{\sin \zeta z}{\zeta z \cos \frac{1}{2} \zeta z}}{1 - \beta - \frac{i\omega_0^2}{\omega v \epsilon_0} (1 + k^2 r_D^2 \epsilon_0)}. \quad (40)$$

Подставляя выражение (40) в выражение (37), а затем в (36) после интегрирования по  $z$  получим уравнение движения в виде:

$$e \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\hbar^2 N}{12(1-\rho^2)} \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + \frac{4\pi n_0 \Lambda_{xx} \Lambda_{zz}}{mvv_\phi \left[ 1 - \beta - \frac{i\omega_0^2}{\omega v \epsilon_0} (1 + k^2 r_D^2 \epsilon_0) \right]} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0, \quad (41)$$

которое справедливо в области частот, указанных в выражении (23). Следовательно, инкремент нарастания будет:

$$\text{Im } k = \frac{6\pi n_0}{mv} \frac{\Lambda^2 [\beta(\omega) - 1] [6(1-\rho)]^{\frac{1}{4}}}{\hbar^{\frac{5}{2}} \rho c_{\perp}^{\frac{5}{2}} \omega^{\frac{1}{2}} \left[ (1-\beta)^2 + \frac{\omega_0^4}{\omega^2 v^2} (1 + k^2 r_D^2 \epsilon_0)^2 \right]}, \quad (42)$$

где мы положили  $\Lambda_{xx} \approx \Lambda_{zz}$ .

Численные оценки показывают, что инкремент нарастания в случае электрон-фононного взаимодействия значительно меньше, чем для пьезополупроводников.

Авторы выражают глубокую благодарность проф. В. Л. Гинзбургу и проф. Л. В. Келдышу за ценные советы и замечания.

### Литература

1. Герденштейн М. Е., Пустовойт В. И. Радиотехника и электроника, 7, 1009, 1962; ЖЭТФ, 43, 536, 1962.
2. Hutson A. R., McFee J. H., White D. L. Phys. Rev. Lett., 7, 237, 1961.
3. Dumke W. P., Haerring A. R. Phys. Rev., 126, 1974, 1962.
4. Пустовойт В. И. ФТТ, 5, 2480, 1963.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1953.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1957.
7. Пустовойт В. И. ЖЭТФ, 43, 2281, 1962.
8. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., Физматгиз, 1960.
9. Силан В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмopodobных сред. М., Атомиздат, 1961.

Статья поступила 30 ноября 1961 г

УДК 639.293 : 537.225.1

## ОБ ИЗМЕРЕНИИ КОНСТАНТ ПОЛУПРОВОДНИКОВ НА БОЛЬШИХ ЧАСТОТАХ

Показано, что измерения фазового сдвига и амплитуды распространяющейся упругой волны в пьезополупроводнике в зависимости от приложенного внешнего постоянного электрического поля позволяют определить константы пьезополупроводника. Измерения можно производить при сравнительно слабом электрическом поле, не переходя на режим усиления упругой волны.

Этот метод эффективен в области больших частот и позволяет в принципе оценить частотную зависимость некоторых констант пьезополупроводящих кристаллов.

Известно, что измерение пьезомодулей проводящих кристаллов наталкивается на определенные трудности. Вследствие наличия конечной проводимости, измерение емкостных (пьезо-) эффектов весьма затруднительно [1]. Статические измерения также трудны, поскольку возникающие вследствие деформации поля исчезают из-за проводимости кристалла.

Сравнительно недавно было обнаружено, что в полупроводниках при определенных условиях возможно усиление акустических волн [2—5]. Как известно, в полупроводниках и металлах затухание акустических колебаний, помимо «вязкости» решетки, обусловлено также взаимодействием акустических колебаний (фононов) с электронами проводимости [6]. Величина затухания зависит от состояния электронного газа носителей: если, например, электронный газ находится в неравновесном состоянии, то вместо обычного затухания в системе оказывается возможным усиление. Создать такую неравновесную среду, как оказывается, можно с помощью дрейфа носителей (электронов).

Физика эффекта усиления (затухания) заключается в следующем. Пусть в плотной плазменной среде (под плазменной средой мы понимаем электронный или дырочный газ носителей, взаимодействующий с решеткой) распространяется плоская продольная электрическая волна. Электрическое поле волны вызовет перераспределение зарядов в пространстве, так что образуются области с повышенной концентрацией частиц, т. е. пространственный объемный заряд. Ясно, что в этом случае электрическое поле волны совершает над средой работу и, следовательно, сама волна в итоге затухает. Однако иначе обстоит дело, когда объемный заряд не находится в покое, а движется. Если приложить внешнее электрическое поле, которое заставит дрейфовать объемный заряд со скоростью, большей чем фазовая скорость волны, то произойдет черенковское излучение волны объемным зарядом [7].

Электрическое поле в объеме полупроводника может возникать по различным причинам. Например, если кристалл полупроводника обладает пьезосвойствами\*, или решетка кристалла состоит из заряженных ионов

\* Пьезосвойства могут также возникать вследствие стрикционных свойств среды из-за наложения внешнего постоянного электрического поля.

(ионный кристалл), то при распространении упругой волны будет возникать электрическое поле. Взаимодействие плазмы носителей с колебаниями решетки может осуществляться также вследствие электрон-фононного взаимодействия. Следует отметить, что это взаимодействие становится значительным только при сравнительно большой концентрации носителей и, как увидим ниже, измерения поэтому следует производить при больших частотах.

Далее мы покажем, что измерение фазовой скорости и амплитуды звуковой волны в зависимости от дрейфа дает возможность оценить ряд констант кристалла и, в частности, величину пьезомодуля и константы электрон-фононного взаимодействия. Измерения можно выполнять при слабом поле, так что разогрев кристалла не будет велик.

### Элементы теории распространения ультразвука в полупроводниках

Уравнения, описывающие распространение упругих волн в среде, имеют вид [8]:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{u}$  — вектор смещения,  $c$  — скорость соответствующей (продольной или поперечной) волны. Уравнение (1) описывает свободные незатухающие волны, распространяющиеся по направлению  $x$ .

Как уже упоминалось, в полупроводниках происходит достаточно сильное взаимодействие акустических колебаний с электронами проводимости. Наиболее сильно это взаимодействие в пьезополупроводниках, т. е. в веществах, которые сочетают в себе как свойства полупроводников, так и свойства пьезоэлектриков. Учет этого взаимодействия приводит к тому, что в уравнении распространения ультразвука в пьезополупроводниках появится дополнительный член, ответственный за это взаимодействие [9]:

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} \beta_{i,ik} \frac{\partial E_l}{\partial x_k} = 0, \quad (2)$$

где  $\rho$  — плотность решетки,  $\beta_{i,ik}$  — пьезотензор по «деформации»,  $E(x, t)$  — электрическое поле, которым сопровождается упругая волна.

Электрическое поле  $E(x, t)$  определяется из уравнений Максвелла. Для медленных процессов, когда все скорости (в данном случае скорость звука) намного меньше скорости света в среде, уравнения Максвелла сводятся к соотношению

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad (3)$$

где  $\mathbf{D}$  — вектор индукции, согласно [8], равный

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j - 4\pi \beta_{i,kl} u_{kl}. \quad (4)$$

Здесь  $u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$  — тензор деформации,  $\epsilon_{ij}$  — комплексный тензор диэлектрической проницаемости среды (с учетом наличия электронов проводимости). Тензор диэлектрической проницаемости можно определить из кинетического уравнения. В итоге для волны, проходящей вдоль  $x$ , получим (см. подробнее в работе [7]):

$$\epsilon_{ij}(\omega, k) = \epsilon_0 + \frac{4\pi\sigma}{i\omega} \frac{1}{1 - \frac{v_{\text{др}}}{v_{\Phi}} - \frac{i\omega}{v} \frac{v_{\text{др}}^2}{v_{\Phi}^2}}, \quad (5)$$

где  $\epsilon_0$  — статическое значение диэлектрической проницаемости решетки,  $\sigma_0$  — проводимость кристалла на постоянном токе,  $\sigma_0 = \frac{e^2 n_0}{m\nu}$ , где  $n_0$  — концентрация,  $m$  — эффективная масса носителей,  $\nu$  — эффективная частота соударений,  $v_T = \sqrt{\frac{\kappa T}{m}}$  — тепловая скорость,  $\kappa$  — постоянная Больцмана,  $v_\phi = \frac{\omega}{k}$  — фазовая скорость,  $\omega$  — частота,  $k$  — волновой вектор,  $v_-$  — скорость дрейфа,  $v_- = \frac{eE_-}{m\nu}$ , где  $E_-$  — внешнее постоянное электрическое поле.

Подставляя в выражение (2) значения электрического поля волны из выражений (3) и (4) и определяя зависимость всех величин от координаты  $x$  и времени  $t$  по закону плоской волны

$$E(x, t) = E_- e^{i\omega t - ikx}, \quad u \sim e^{i\omega t - ikx}, \quad (6)$$

получим дисперсионное уравнение для продольных волн:

$$\omega^2 - k^2 c_l^2 \left( 1 + \frac{4\pi\beta_{x'xx}^2}{\epsilon_l^2 \epsilon_l(\omega, k)} \right) = 0, \quad (7)$$

где  $c_l$  — скорость продольной волны. Если ввести электромеханическую константу для продольных волн

$$\zeta_l = \sqrt{\frac{4\pi\beta_{x'xx}^2}{\epsilon_l^2 \epsilon_0}}, \quad (8)$$

то уравнение (7) будет

$$\omega^2 - k^2 c_l^2 \left( 1 + \zeta_l^2 \frac{v_-}{\epsilon_l(\omega, k)} \right) = 0. \quad (7a)$$

Корни этого уравнения определяют характер распространяющихся волн. Если  $Im \omega(k) > 0$  — распространяющаяся волна будет затухать, если же  $Im \omega(k) < 0$  — она будет нарастать. Мы не будем сейчас интересоваться вопросами усиления (об этом см. работы [2–5]), а рассмотрим только характер изменения затухания и фазы при сравнительно малых значениях скорости дрейфа электронов, т. е. при

$$v_- \ll c_l, \quad \text{или} \quad \frac{eE_-}{m\nu} \ll c_l. \quad (9)$$

Точно также строится дисперсионное уравнение для случая распространения ультразвука в полупроводниках, не обладающих пьезосвойствами, когда взаимодействие обусловлено только электрон-фононным эффектом [5]:

$$\omega^2 - k^2 c_l^2 - \frac{4\pi k^4 \Lambda^2 n_0}{m\nu\epsilon_0 \omega \left[ 1 - \frac{v_-}{v_\phi} - \frac{i\omega_0^2}{\omega\nu} (1 + k^2 r_D^2) \right]} = 0. \quad (10)$$

Здесь  $\Lambda$  — константа электрон-фононного взаимодействия, обычно она порядка нескольких электрон-вольт  $\Lambda \approx 10^{-11} + 10^{-12}$  эрг,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_0}{m\epsilon_0}}$  — плазменная частота носителей,  $r_D = \sqrt{\frac{\kappa T \epsilon_0}{4\pi e^2 n_0}}$  — дебаевский радиус экранирования.

Приведем также дисперсионное уравнение для ионного кристалла [5]:

$$\omega^2 - k^2 c_{\parallel}^2 \left[ 1 + \frac{i\alpha}{v} \frac{\omega_0^2}{\omega - kv - \frac{i\omega_0^2}{v} (1 + k^2 r_D^2)} \right] = 0, \quad (11)$$

где  $\alpha$  — отношение числа носителей к числу рассеивающих центров,  $\alpha \ll 1$ .

#### Изменение фазовой скорости и затухания в зависимости от дрейфа

Дисперсионные уравнения (7), (10), (11) позволяют найти изменение фазовой скорости волны и относительное изменение амплитуды в зависимости от приложенного внешнего электрического поля. Для кристалла длиной  $l$  имеем [10]:

$$\frac{\Delta A}{A} = l \frac{\partial}{\partial \beta} (Im \Delta k) \Delta \beta, \quad (\beta = \frac{v_{\text{др}}}{v_{\phi}}), \quad (12)$$

$$\Delta \psi = l \frac{\partial}{\partial \beta} (Re \Delta k) \Delta \beta, \quad (\beta \ll 1), \quad (13)$$

где  $A$  — амплитуда, а  $\psi$  — фаза волны. Поскольку  $\xi_{\parallel}^2 < 1$ , уравнение (7а) можно решать методом возмущений. Тогда

$$\Delta k = k \xi_{\parallel}^2 \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{\perp}(\omega, k)} = \frac{\omega}{c} \xi_{\parallel}^2 \frac{\epsilon_D}{\epsilon_{\perp}(\omega, k)}. \quad (14)$$

Подставляя в (12), (13) выражения (14) и значения  $\epsilon_{\perp}(\omega, k)$  из выражения (5), для пьезополупроводников получим:

$$\frac{\Delta A}{A} = l \xi_{\parallel}^2 \frac{\omega_0^2}{2c_{\perp} v} \frac{1 - \frac{\omega_0^4}{\omega^2 v^2} (1 + k^2 r_D^2)^2}{\left[ 1 + \frac{\omega_0^4}{\omega^2 v^2} (1 + k^2 r_D^2) \right]^2} \Delta \beta, \quad (15)$$

$$\Delta \psi = l \frac{\omega}{c_{\parallel}} \xi_{\parallel}^2 \frac{\omega^4}{\omega^2 v^2} \frac{k^4 r_D^4 - 1}{\left[ 1 + \frac{\omega_0^4}{\omega^2 v^2} (1 + k^2 r_D^2) \right]^2} \Delta \beta. \quad (16)$$

Полученные формулы показывают, что относительное изменение амплитуды и фазы при малых значениях имеет разный характер в зависимости от частоты  $\omega$ , концентрации  $n_0$ , температуры  $T$ . По-видимому, на опыте наиболее просто выделить случай, когда на некоторых частотах относительное изменение амплитуды  $\Delta A/A$  и фазы не зависят от величины дрейфа:

$$\Delta \psi = 0 \text{ при } r_D = \frac{\omega_{\phi}}{c_{\perp}}, \quad (17)$$

$$\frac{\Delta A}{A} = 0 \text{ при } 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_{AV}^2} \left( 1 + \frac{\omega_A^2 r_D^2}{c_{\parallel}^2} \right) = 0, \quad (18)$$

где  $\omega_{\phi}$  и  $\omega_A$  — корни уравнений (17), (18). Уравнение (17) всегда имеет корень, и зная  $\omega_{\phi}$ , можно сразу определить концентрацию носителей

$$n_0 = \frac{\omega_{\phi}^2 \epsilon_0}{4\pi e^2 c_{\perp}}. \quad (19)$$

Путем измерений на постоянном токе можно определить статическую проводимость  $\sigma_0 = \frac{e^2 n_0}{m\nu}$ . Зная концентрацию  $n_0$  и проводимость  $\sigma_0$ , из формулы (16) можно определить постоянную электромеханической связи  $k$ , следовательно, — соответствующий пьезомодуль:

$$k_{11}^2 = \frac{c_{11}}{\omega} \frac{\Delta\psi}{\Delta\beta} \frac{\left[ 1 + \frac{16\pi^2\sigma_0}{\omega^2} \left( 1 + \frac{\omega^2}{\omega_\psi^2} \right)^2 \right]^2}{\frac{16\pi^2\sigma_0^2}{\omega^2} \left( \frac{\omega^4}{\omega_\psi^4} - 1 \right)}, \quad (20)$$

причем, естественно,  $\omega \neq \omega_\psi$ . Из уравнения (19), кроме того, можно определить подвижность носителей  $\mu$ :

$$\mu = \frac{e}{m\nu} = \frac{\omega_\psi \times T \varepsilon_0}{4\pi e c_{11}} \quad (21)$$

Для определения констант пьезополупроводников мы пока использовали только уравнение (16), что соответствует измерениям фазы. Измерение же относительного затухания амплитуды тоже может служить одним из способов измерения. Однако следует отметить, что условие (18) не всегда разрешимо в поле действительных чисел, поэтому этот метод следует применять тогда, когда

$$\frac{4\omega_0 \sigma T}{\nu c_{11}} < 1. \quad (22)$$

Если условие (22) выполнено, то аналогичные формулы для констант могут быть получены и через  $\omega_d$ . Из-за громоздкости мы их не приводим.

Что касается измерения констант полупроводящих и ионных кристаллов, то они будут рассмотрены отдельно.

#### Литература

1. Ogawa T. Journ. Phys. Soc. Japon. **17**, 400, 1962.
2. Hutson A. R., McFee J. H., White D. L. P. R. L. **7**, 237, 1961.
3. Герценштейн М. Е., Пустовойт В. И. Радиотехника и электроника, **8**, 1009, 1962; ЖЭТФ, **42**, 536, 1962.
4. Тохеп А. М., Tansal S. Phys. Rev. Lett. **10**, 481, 1963.
5. Пустовойт В. И. ФТТ, **5**, 2490, 1963.
6. Сидин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. Атомиздат, 1960.
7. Пустовойт В. И. ЖЭТФ, **43**, 2281, 1963.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1953.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1957.
10. Герценштейн М. Е., Пустовойт В. И., Филиппов С. С. Радиотехника и электроника, **8**, 1607, 1963.

Статья поступила 30 ноября 1964 г.

УДК 638 : 214

## МАГНИТНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ В СИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Найден магнитный момент в сильных магнитных полях. Установлено, что при произвольном законе дисперсии экспериментальное исследование магнитной восприимчивости позволяет определить зависимость энергии и плотности состояний основного состояния от магнитного поля. Показано, что при квадратичном законе дисперсии в сильных магнитных полях полный магнитный момент (диамагнитный и парамагнитный) стремится к насыщению.

В настоящее время хорошо изучена как теоретически, так и экспериментально (см. например [1]) осциллирующая часть магнитной восприимчивости, эффект де Хааза-ван Альфена. Осцилляции, как известно, наблюдаются при низких температурах  $T$  ( $kT < \mu H$ ) в слабых магнитных полях ( $\mu H < \xi_0$ ,  $\mu$  — магнетон Бора для электрона проводимости,  $\xi_0$  — граничная фермиевская энергия).

Значительно менее исследована монотонная часть  $\chi$  магнитной восприимчивости, которая только и остается для сильных магнитных полей при высоких температурах. Экспериментально это связано с тем, что трудно отделить монотонную восприимчивость электронов проводимости от восприимчивости решетки. Теоретическое исследование восприимчивости при неквадратичном законе дисперсии электронов не может быть проведено, потому что для этого необходимо знать правила квантования даже в слабых магнитных полях [2]. Поэтому для понимания интересующей нас зависимости большое значение имеет вычисление, проведенное Румером [3] для свободного электронного газа\*. Особый интерес представляет, естественно, область сильных магнитных полей:

$$\mu H \gg kT, \xi_0, \quad (1)$$

где магнитная восприимчивость электронного газа зависит от магнитного поля (при  $\mu H \ll \xi_0$  и  $\mu H \ll kT$  в основном приближении  $\chi$  не зависит от  $H$ ) и может быть, благодаря этому, отделена от восприимчивости решетки.

Однако именно в области сильных магнитных полей рассмотрение Румера не дает понимания ситуации в общем случае. Для того чтобы показать это, обратимся к простейшему случаю закона дисперсии  $\epsilon = p^2/2m^*$  ( $\epsilon$  — энергия,  $p$  — импульс), где эффективная масса  $m^*$  не совпадает с массой  $m_0$  свободного электрона. Тогда уровни энергии имеют вид

$$\epsilon_n^{\pm} = \frac{p_z^2}{2m^*} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\mu H \pm \frac{\mu_0 H}{2} \quad (2)$$

\* Весьма интересно также вычисление магнитной восприимчивости для полупроводников с петлей экстремумов в перпендикулярном петле магнитном поле, проведенное на основании точных правил квантования [7].

(последний член в этом уравнении связан со спиновым парамагнетизмом), так что энергия основного состояния равна

$$\epsilon_{\min} = \frac{c\hbar}{2c} \left( \frac{1}{m^x} - \frac{1}{m_0} \right) = \frac{1}{2} (\mu - \mu_0) H;$$

где  $z$  — направление магнитного поля.

В магнитных полях (1), когда расстояние между уровнями является наибольшим энергетическим расстоянием, все электроны скапливаются вблизи  $\epsilon_{\min}$ . Из выражения для  $\epsilon_{\min}$  очевидно, что случай, когда  $m^x = m_0$ , является особым; только в этом случае при любом значении  $H$ ,  $\epsilon_{\min} = 0$ , тогда как при  $m^x \neq m_0$ ,  $|\epsilon_{\min}| \rightarrow \infty$  при  $H \rightarrow \infty$ . В результате, в общем случае, естественно, ожидать существенно иной, чем приводится в работе [3] зависимости.

Выяснению вида этой зависимости и посвящена настоящая статья.

### Магнитная восприимчивость при изотропном квадратичном законе дисперсии

Для нахождения полного магнитного момента

$$M = - \left( \frac{\partial F}{\partial H} \right)_{TVN}, \quad (3)$$

как известно, достаточно знать свободную энергию системы (см. [4])

$$F = N\xi + \Omega;$$

$$\Omega = - \frac{2c\hbar kT}{ch^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dp_z \left[ \ln \left( 1 + e^{\frac{\xi - \epsilon_n^+}{kT}} \right) + \ln \left( 1 + e^{\frac{\xi - \epsilon_n^-}{kT}} \right) \right] \quad (4)$$

[ $\epsilon_n^{\pm}$  определяется по формуле (2), входящие в выражение (4)  $F$ ,  $N$  и  $\Omega$  определены на единицу объема].

Химический потенциал  $\xi$  находится из условия постоянства числа частиц:

$$N = - \frac{d\Omega}{d\xi} = \frac{2c\hbar}{ch^2} \sum_n \int_0^{\infty} dp_z \left( \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_n^+ - \xi}{kT}} + 1} + \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_n^- - \xi}{kT}} + 1} \right). \quad (5)$$

Поскольку  $\mu H \gg \xi_0$ , сделаем основное допущение, что (с экспоненциальной по  $\mu H/kT$  точностью) все электроны сосредоточены вблизи уровня  $n = 0$  — это ясно физически и легко проверяется верификацией. При этом задача становится одномерной  $\left( \epsilon_0 = \frac{p_z^2}{2m^x} + \frac{1}{2} (\mu - \mu_0) H \right)$  и, полагая

$$p_z = \sqrt{2m^x kT x}; \quad \alpha_{\pm} = \frac{\xi - \frac{1}{2} (\mu \mp \mu_0) H}{kT}; \quad (6)$$

$$\gamma = \frac{4}{3} \frac{\xi_0^{\frac{3}{2}}}{\mu H \sqrt{kT}}; \quad A = \frac{NkT}{\gamma H},$$

получим уравнение для определения  $\alpha$  и  $\Omega$ :

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{Vx} \left( \frac{1}{e^{x-\alpha_+} + 1} + \frac{1}{e^{x-\alpha_-} + 1} \right) = \gamma, \quad (7)$$

$$\Omega = -AH \int_0^{\infty} \frac{dx}{Vx} [\ln(1 + e^{\alpha_+ - x}) + \ln(1 + e^{\alpha_- - x})]. \quad (8)$$

Определим прежде всего восприимчивость системы частиц с массой  $m^*$ , гораздо меньшими, чем масса свободного электрона  $m_0$ , т. е. рассмотрим случай  $\mu \gg \mu_0$ . Уравнение (7) можно решить для двух предельных случаев:

1)  $\gamma \gg 1$  (т. е.  $\xi \ll \mu H \ll \xi_0 \sqrt{\frac{\xi}{kT}}$ , так что во всяком случае  $\xi_0 \gg \gg kT$ . При этом  $\alpha_+ \gg 1$ ,  $\alpha_+ / \frac{\mu H}{kT} \ll 1$  (это проверяется верификацией после определения  $\xi$  и  $\alpha_+$ ), так что  $\frac{\mu H}{kT} - \alpha_+ \approx \frac{\mu H}{kT}$  и опущенные в выражении (5) члены следующего порядка малости по  $\mu H/kT$  (члены с  $n \neq 0$ ) экспоненциально малы. Таким образом, действительно существенны лишь электроны, расположенные на основном энергетическом уровне  $n = 0$ . При  $\alpha_+ \gg 1$   $\gamma$  может в принципе иметь любое значение. Если  $\alpha_- \gg 1$ , то

$$\gamma \approx \int_0^{\alpha_+} \frac{dx}{Vx} + \int_0^{\alpha_-} \frac{dx}{Vx} = 2(\sqrt{\alpha_+} + \sqrt{\alpha_-}); \quad \sqrt{\alpha_{\pm}} = \frac{\gamma}{4} \pm \frac{\mu_0 H}{\gamma kT},$$

$$\xi = \frac{1}{2} \mu H + kT \left( \frac{\gamma}{4} \right)^2 + k \left( \frac{\mu_0 H}{\gamma kT} \right)^2. \quad (9)$$

Для того чтобы выполнялось неравенство  $\alpha_- \gg 1$ , необходимо, чтобы  $\frac{\gamma}{4} \pm \frac{\mu_0 H}{\gamma kT} \gg 1$ , или

$$\left( \frac{\mu H}{\xi_0} \right)^3 \ll \frac{4}{9} \frac{\mu}{\mu_0} \quad (10)$$

(что возможно лишь при  $\mu \gg \mu_0$ ). Используя выражения (8) и (9), найдем термодинамический потенциал

$$\Omega = -\frac{4}{3} AH \left( \alpha_+^{\frac{3}{2}} + \alpha_-^{\frac{3}{2}} \right) = NkT \left[ \frac{\gamma^2}{24} + 8 \left( \frac{\mu_0 H}{\gamma kT} \right)^2 \right],$$

и затем магнитный момент

$$M = -\frac{1}{2} N\mu \left[ 1 - \frac{4}{27} \left( \frac{\xi_0}{\mu H} \right)^3 - \frac{9}{2} \frac{\mu H}{\xi_0} \left( \frac{\mu_0 H}{\xi_0} \right)^2 \right]. \quad (11)$$

Если же  $\alpha_- < 1$ , второй член в уравнении (7) можно отбросить. Тогда  $\gamma = 2\sqrt{\alpha_+}$ . Требование  $\alpha_- < 1$  выполняется при условии

$$\left( \frac{\mu H}{\xi_0} \right)^3 \gg \frac{4}{9} \frac{\mu}{\mu_0}. \quad (12)$$

В этом случае химический и термодинамический потенциалы определяются как

$$\xi = \frac{1}{2} \mu H + \frac{kT\gamma^2}{4} - \frac{\mu_0 H}{2}, \quad (13)$$

$$\Omega = -\frac{4}{3} AH\alpha_+^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{6} NkT\gamma^2.$$

Поэтому для магнитного момента имеем

$$M = -\frac{N\mu}{2} \left[ 1 - \frac{\mu_0}{\mu} - \frac{\mu}{27} \left( \frac{\xi_0}{\mu H} \right)^3 \right]. \quad (14)$$

2) В другом предельном случае  $\gamma \ll 1$  (т. е. в энергетическом интервале  $\mu H \gg \xi_0 \sqrt{\frac{\xi_0}{kT}}$ ) необходимо, как видно из равенства (7), чтобы  $-\alpha_{\pm} \gg 1$  и тогда вблизи уровня  $n = 0$  электронный газ подчиняется бoльцмановской статистике (т. е.  $\frac{1}{e^x + 1} \approx e^{-x}$ ). При этом

$$\gamma \approx \int_0^{\infty} \frac{dx}{V^x} (e^{-x+\alpha_+} + e^{-x+\alpha_-}) = \sqrt{\pi} (e^{\alpha_+} + e^{\alpha_-}), \quad (15)$$

$$\xi = \frac{\mu H}{2} - kT \ln \frac{2\sqrt{\pi}}{\gamma} \operatorname{ch} \frac{\mu_0 H}{2kT}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \Omega &= -AH\gamma = -NkT; \quad F = N\xi = NkT, \\ M &= \frac{1}{2} N\mu \left( 1 - \frac{2kT}{\mu H} - \frac{\mu_0}{\mu} \operatorname{th} \frac{\mu_0 H}{2kT} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

В случае, когда  $\mu \approx \mu_0$ , расчет совершенно аналогичен, только неравенство (10) и, следовательно, зависимость (11) для магнитного момента перестают выполняться.

Так как  $\mu H \gg \xi_0$ ,  $kT$  и  $\mu > \mu_0$ , то фактически во всех исследуемых областях полей наблюдается одна и та же зависимость  $M(H)$  (ниже приведено также известное выражение для  $M$  в слабом поле):

$$M = -\frac{N}{2} (\mu - \mu_0), \quad [\mu H \gg \max(\xi_0, kT)], \quad (17)$$

$$M = -\frac{N\mu^2}{3(\xi_0 + kT)} \left( 1 - 3 \frac{\mu_0^2}{\mu^2} \right) H, \quad [\mu H \ll \max(\xi_0, kT)]. \quad (17a)$$

Итак, магнитный момент зависит от магнитного поля следующим образом. Если при отсутствии магнитного поля электронный газ является невырожденным  $\xi_0 < kT$ , то абсолютная величина магнитного момента сначала, при  $\mu H \ll kT$ , согласно выражению (17a) линейно растет с полем, причем, когда  $m^* < \frac{m_0}{\sqrt{3}}$  наблюдается диамагнетизм, а при  $m^* > \frac{m_0}{\sqrt{3}}$  парамагнетизм. Затем, при  $\mu H \gg kT$  магнитный момент, согласно выражению (17), стремится к насыщению, соответствующему диамагнетизму при  $m^* < m_0$  и парамагнетизму при  $m^* > m_0$ .

В промежуточной области полей  $\mu H \approx kT$  возможно наличие экстремумов. В частности, если  $m_0 > m^* > m_0/\sqrt{3}$  обязательно имеется по

крайней мере один максимум [так как должен произойти переход от растущего парамагнитного момента (17а) к растущему по модулю диамагнитному моменту (16)]. При этом зависимость момента от температуры в основном приближении отсутствует, а в следующем приближении в предельно сильных полях  $\mu_0 H \gg kT$ ,  $\mu H \gg \xi$ ;  $\xi_0 \sqrt{\frac{\xi_0}{kT}}$ ,  $kT$  носит согласно выражению (16) универсальный характер и изотропна.

Если при отсутствии магнитного поля электронный газ является вырожденным и  $\xi_0 > kT$ , то в областях полей  $\mu H > 2\pi^2 kT$  и  $\mu H \gg \xi_0$  все происходит так же, как описано выше, а в области полей  $2\pi^2 kT < \mu H < \xi_0$  имеет место де Хааза-ван Альфеновские осцилляции магнитной восприимчивости [2].

Любопытно, что насыщение магнитного момента в сильных полях происходит так, как если бы каждый электрон обладал собственным магнитным моментом  $\frac{1}{2}(\mu_0 - \mu)$ .

Из формулы (17) очевидно, что случай, описываемый Румером ( $\mu = \mu_0$ ), когда выражение (17) дает  $M = 0$ , является особым. Тогда приходится пользоваться полными формулами (14) и (15), согласно которым:

$$M = \frac{8}{27} \frac{N \xi_0^3}{\mu^2 H^3}; \quad \xi_0 \ll \mu H \ll \xi \sqrt{\frac{\xi_0}{kT}}; \quad \xi \gg kT. \quad (18)$$

$$M = \frac{N k T}{H}; \quad \mu H \gg \xi_0; \quad \sqrt{\frac{\xi_0}{kT}} \xi_0; \quad kT. \quad (18a)$$

Таким образом, очевидно существенное различие зависимостей  $M(TH)$  в случаях  $m^* = m_0$  [формулы (18а), (18б)] и  $m^* \neq m_0$  [формула (17)].

Выясним теперь, насколько выполнимо условие  $\mu H \gg \xi_0$  и тем самым границы применимости полученных формул. В хороших металлах  $\xi_0 \approx (10^4)^3$ , для основных электронных групп  $m \approx m_0 \approx 10^{-27}$  э и требуемое неравенство соответствует  $H \approx 10^9$  э. Для уменьшения  $H$  желательны малые значения  $\xi_0$  (т. е. малые плотности электронов проводимости) и малые электронные массы  $m$ . Следовательно, нужно обратиться к полупроводникам и полуметаллам, для которых  $\mu H \gg \xi_0$  отнюдь не соответствует недостижимым в настоящее время полям. Так, для  $\text{Bi}$   $\xi_0 \approx 100^\circ \text{K}$ , т. е.  $H \approx 10^8$  э. Однако к металлам типа  $\text{Bi}$  с существенно неквадратичным законом дисперсии [6] данный расчет непосредственно не применим; следует пользоваться результатами, приведенными ниже (стр. 77). Кроме того, оценка (1) может, по-видимому, выполняться для хороших металлов в реально достижимых магнитных полях для аномально малых зон.

### Анизотропный квадратичный закон дисперсии

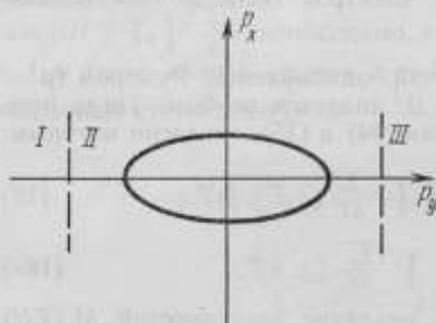
Обратимся к случаю произвольного закона дисперсии. Как уже отмечалось, в сильных магнитных полях ( $\mu H \gg \xi_0$ ) для нахождения магнитной восприимчивости требуется выяснение правил квантования для первых уровней Ландау. Во всех реальных магнитных полях расстояние между уровнями по сравнению с шириной зоны проводимости  $\Delta$  мало, так что даже  $\mu H \gg \xi_0$  соответствует почти пустой или почти полной зоне, и закон дисперсии можно считать квадратичным. При этом квантование имеет вид:

$$S(\epsilon p_z) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{chH}{c}; \quad n = 0, 1, 2. \quad (19)$$

( $S$  — площадь сечения изоэнергетической поверхности с плоскостью  $p_z = \text{const}$ ). Правило квантования (19) может быть строго выведено

с помощью оператора Гамильтона в магнитном поле без учета перехода между зонами [5] [формула (6. 20)]. Эта формула приближенно справедлива при любых значениях  $p$ , однако она отнюдь не является точной; точный квантовый оператор Шредингера нельзя получить на основании классического закона дисперсии. Так, отличающиеся друг от друга операторы  $\cos(\hat{p}_x a_x) \cos(\hat{p}_y a_y) + \cos(\hat{p}_y a_y) \cos(\hat{p}_x a_x)$  и  $\cos(\hat{p}_x a_x + \hat{p}_y a_y) + \cos(\hat{p}_x a_x - \hat{p}_y a_y)$  удовлетворяют всем общим требованиям, учитывавшимся в работе [5].

Для областей, далеких от классической орбиты I и III (см. рисунок), можно найти обычное квазиклассическое решение. В узкой области II ( $\mu H \ll \Delta \epsilon$ ), учитывая малость  $p_y$ , разложим  $\hat{\epsilon}$  по  $p_y$ , перейдем к Фурье-представлению и, учитывая малость  $p_x$  ( $p_x$  и  $p_y$  с точностью до постоянного множителя — канонически сопряженные операторы), произведем затем разложение по  $p_x$ . При этом приходим к той же формуле, которая получилась бы при замене  $p_x$  и  $p_y$  соответствующими операторами в разложении  $\epsilon(p_x p_y)$  при малых значениях  $p_x$  и  $p_y$ , т. е. к квадратичной форме. Решая получающееся уравнение гармонического осциллятора и сшивая найденное решение с решениями в областях I и III, получаем формулу (19).



Сечение изоэнергетической поверхности плоскостью  $p_z = \text{const}$ .

Мы не будем подробнее останавливаться на случае произвольной квадратичной дисперсии. Вид зависимости  $\chi(H)$  в этом случае определяется общей формулой (20) с учетом правил квантования (19). Заметим лишь, что так как с изменением направления поля изменяется значение эффективной массы, то могут меняться знаки используемых неравенств и, тем самым, изменяться характер зависимости  $\chi(H)$ .

Разумеется, разложение в виде квадратичной формы и формула (19) справедливы только при отсутствии вырождения (связанного с высокой симметрией) или при наличии какого-либо дополнительного параметра размерности энергии, сравнимого с  $\xi_0$  или меньшего  $\xi_0$ . Так хотя для Bi  $\xi_0 \approx 100^\circ$ , его Ферми-поверхность не является эллипсоидом и восприимчивость имеет более сложную зависимость от магнитного поля.

#### Случай произвольной дисперсии

Получим теперь формулу для магнитного момента в случае, когда закон дисперсии при  $H = 0$  для малых значений  $\vec{p}$  не сводится к квадратичному [6, 7]. Мы интересуемся настолько сильными полями, что расстояние между уровнями и энергия основного состояния (связанные как с диамагнетизмом, так и с парамагнетизмом электронов) велики по сравнению с  $kT$  и  $\xi_0$  (но, разумеется,  $H \ll \frac{c\hbar}{ea^2}$ , где  $a$  — период решетки).

Такие поля достижимы в настоящее время для полупроводников и металлов типа Bi, As, Sb. Провести квантование в таких полях в общем случае, естественно, не представляется возможным. Однако рассуждения, аналогичные проведенным для  $\mu H \gg \xi_0, \xi_0 \sqrt{\frac{\xi_0}{kT}}, kT$ , показывают, что

восприимчивость определяется только основным состоянием и приводят к следующему результату:

$$M = -N \frac{\partial \epsilon_0}{\partial H} + NkT \frac{\partial}{\partial H} \ln \nu_0, \quad (20)$$

где  $N$  — плотность электронов,  $\epsilon_0(H)$  и  $\nu(H)$  — соответственно энергия и плотность состояний для основного состояния, т. е. абсолютно самого низкого по всем квантовым числам уровня. Можно показать, что, как и ранее (см. стр. 72) основное приближение  $M = -N \frac{\partial \epsilon_0}{\partial H}$  справедливо уже при  $\mu H \gg \xi_0, kT$ . При известном квантовании, проведенном, например, для металлов типа висмута [6] и для полупроводников с петлей экстремумов [7], формула (20) позволяет определить магнитную восприимчивость.

Так, для квадратичной дисперсии из формул (19) и (20)

$$M = -\frac{1}{2} N (\mu - \mu_0) + \frac{NkT}{H}. \quad (21)$$

При неизвестном квантовании (20) дает возможность по экспериментальным данным найти зависимость от магнитного поля для  $\epsilon_0(H)$  в сильных полях по основному члену восприимчивости, и  $\nu_0(H)$  — в предельно сильных магнитных полях по слабой температурной зависимости.

### Выводы

1. В сильных магнитных полях ( $\mu H \gg \xi_0, kT$ ) магнитный момент в основном приближении не зависит от температуры и определяется только зависимостью от магнитного поля энергии основного состояния:

$$M = -N \frac{\partial \epsilon_0}{\partial H}. \quad (22)$$

Подобные поля могут быть, по-видимому, достижимы для плохих металлов (типа Bi), полупроводников и для аномально малых зон в хороших металлах.

2. В предельно сильных магнитных полях (вид оценки зависит от характера квантования при данном законе дисперсии) магнитный момент имеет малую добавку, линейно зависящую от температуры; коэффициент пропорциональности определяется плотностью состояний в основном состоянии  $(Nk \frac{\partial}{\partial H} \ln \nu_0)$ .

3. При квадратичном законе дисперсии  $\frac{\partial \epsilon_0}{\partial H} = \frac{1}{2} (\mu - \mu_0)$ ,  $\frac{\partial}{\partial H} \ln \nu_0 = \frac{1}{H}$  и магнитный момент стремится к насыщению, соответствующему диамагнетизму при  $m^* < m_0$  и парамагнетизму при  $m^* > m_0$ .

4. При изотропном квадратичном законе дисперсии могут быть найдены малые добавки к основной формуле (17), которые имеют разный вид в различных областях интервала полей  $\mu H \gg \xi_0, kT$  [в слабых полях  $\mu H \ll \max(\xi_0, kT)$  справедлива хорошо известная формула (17a)] и описываются следующими формулами:

1)  $\xi_0 \gg kT$  (при  $H = 0$  газ вырожден),  $\mu \gg \mu_0$ .

$$а) kT < \xi_0 \left( \frac{\mu_0}{\mu} \right)^{\frac{2}{3}};$$

при  $H \ll \frac{\xi_0}{\mu} \left( \frac{\xi_0}{kT} \right)^{\frac{1}{2}}$ ,  $\frac{\xi_0}{\mu} \left( \frac{\mu}{\mu_0} \right)^{\frac{1}{3}}$  справедлива формула (11);

при  $\frac{\xi_0}{\mu} \left( \frac{\mu_0}{\mu} \right)^{\frac{1}{3}} < H \ll \frac{\xi_0}{\mu} \left( \frac{\xi_0}{kT} \right)^{\frac{1}{2}}$  — формула (14);

при  $H \gg \frac{\xi_0}{\mu} \left( \frac{\xi_0}{kT} \right)^{\frac{1}{2}}$  — формула (16);

$$6) kT > \xi_0 \left( \frac{\mu_0}{\mu} \right)^{\frac{2}{3}};$$

при  $H \ll \frac{\xi_0}{\mu} \left( \frac{\xi_0}{kT} \right)^{\frac{1}{2}}$  справедлива формула (14);

при  $H \gg \frac{\xi_0}{\mu} \left( \frac{\xi_0}{kT} \right)^{\frac{1}{2}}$  — формула (16).

2)  $\xi_0 \ll kT$  (газ при отсутствии магнитного поля не вырожден) — при  $\mu H \gg \xi_0$  всегда справедливо выражение (16).

5. Особым случаем является изученный Румером [3] случай, когда для свободного электронного газа  $\mu = \mu_0$ . При этом магнитный момент стремится к нулю согласно формулам Румера (18а), (18б).

#### Л и т е р а т у р а

1. Лифшиц И. М., Каганов М. И. УФН, 78, 411, 1962.
2. Лифшиц И. М., Косевич А. М. ЖЭТФ, 29, 730, 1955.
3. Румер Ю. Б. ЖЭТФ, 18, 1081, 1948.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика, ГИТТЛ, 1951.
5. Лифшиц И. М., Каганов М. И. УФН 59, 419, 1959.
6. Абрикосов А. А., Фальковский Л. А. ЖЭТФ, 43, 108, 1962.
7. Рашба Э. И. ФТТ, 6, 11, 1964.

Статья поступила 30 ноября 1964 г.

УДК 548.0 : 530

### РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В КРИСТАЛЛАХ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА

Получено дисперсионное уравнение для плоских монохроматических волн в одноосных кристаллах при наличии магнитоэлектрического эффекта и исследуется характер распространения волн в таких системах.

Известно, что некоторые кристаллы обладают так называемым магнитоэлектрическим эффектом, который заключается в том, что при воздействии на кристалл магнитным полем  $H$  или электрическим  $E$  в нем возникает пропорциональный полю электрический или магнитный момент [1]. Термодинамический потенциал такого кристалла должен содержать член вида  $\alpha_{ik} E_i H_k$ . Этот член должен быть инвариантным относительно как пространственной инверсии (преобразование  $I$ ), так и инверсии времени (преобразование  $R$ ). При этом  $E$  не меняется, а  $H$  меняет знак как при  $I$ , так и при  $R$ . Следовательно, множитель  $\alpha_{ik}$  должен быть псевдотензором, меняющим знак при преобразовании  $R$ . Наличие  $\alpha_{ik}$  и его свойства связаны с магнитной симметрией кристалла. Из этого следует, что магнитоэлектрическим эффектом могут обладать только кристаллы с магнитной структурой, т. е. ферро- и антиферромагнетики.

Очевидно, что ни  $I$ , ни  $R$  не должны сами по себе быть элементами группы магнитной симметрии таких кристаллов; они могут входить в эту группу лишь в сочетании с другими элементами или в виде элемента  $IR$ .

При наличии магнитоэлектрического эффекта термодинамический потенциал  $\Phi$  имеет вид [1]:

$$\Phi = -\frac{1}{8\pi} \epsilon_{ik} E_i E_k - \frac{1}{8\pi} \mu_{ik} H_i H_k - \frac{1}{4\pi} \alpha_{ik} E_i H_k, \quad (1)$$

где  $\epsilon_{ik}$  и  $\mu_{ik}$  — соответственно тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости.

Из определений электрической  $D$  и магнитной  $B$  индукций  $D_i = -4\pi \frac{\partial \Phi}{\partial E_i}$ ;  $B_i = -4\pi \frac{\partial \Phi}{\partial H_i}$  имеем:

$$D_i = \epsilon_{ik} E_k + \alpha_{ik} H_k; \quad B_i = \mu_{ik} H_k + \alpha_{ki} E_k. \quad (2)$$

Уравнения Максвелла для плоской монохроматической волны

$$-[\mathbf{nH}] = \mathbf{D}; \quad [\mathbf{nE}] = \mathbf{B} \quad (3)$$

при наличии магнитоэлектрического эффекта будут:

$$\begin{aligned} e_{ikl} n_k H_l &= -\epsilon_{ik} E_k - \alpha_{ik} H_k, \\ e_{ikl} n_k E_l &= \mu_{ik} H_k + \alpha_{ki} E_k, \end{aligned} \quad (4)$$

где вектор  $\mathbf{n}$  связан с волновым вектором  $\mathbf{k}$  соотношением  $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}$ ,  $e_{ikl}$  — полностью антисимметричный единичный тензор третьего ранга. Вначале рассмотрим случай симметричного тензора  $\alpha_{ik}$  (об антисимметричной части  $\alpha_{ik}$  будет сказано особо).

Если из первого уравнения системы (4) определить  $E_j$

$$E_j = -\varepsilon_{ji}^{-1} e_{ikl} n_k H_l - \varepsilon_{ji}^{-1} \alpha_{ij} H_l$$

( $\varepsilon_{ji}^{-1}$  — компоненты тензора, обратного  $\varepsilon_{ij}$ ), и подставить во второе уравнение, то получим однородную систему уравнений для компонент вектора  $H_j$ :

$$(e_{ikl} n_k \varepsilon_{lm}^{-1} e_{mnp} n_p + e_{ikl} n_k \varepsilon_{lm}^{-1} \alpha_{mj} - \alpha_{il} \varepsilon_{lm}^{-1} e_{mkj} n_k + \mu_{ij} - \alpha_{il} \varepsilon_{lm}^{-1} \alpha_{mj}) H_j = 0. \quad (5)$$

Для существования нетривиального решения этой системы необходимо, чтобы ее определитель был равен нулю:

$$|e_{ikl} n_k \varepsilon_{lm}^{-1} e_{mnp} n_p + e_{ikl} n_k \varepsilon_{lm}^{-1} \alpha_{mj} - \alpha_{il} \varepsilon_{lm}^{-1} e_{mkj} n_k + \mu_{ij} - \alpha_{il} \varepsilon_{lm}^{-1} \alpha_{mj}| = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) является дисперсионным уравнением общего вида для электромагнитных волн в кристаллах с магнитоэлектрическим эффектом.

Полученные опытные значения  $\alpha_{ij}$  весьма малы. Так, для  $\text{Cr}_2\text{O}_3$   $\alpha \approx 10^{-4}$  [3], а для  $\text{Ti}_2\text{O}_3$   $\alpha \approx 10^{-5}$  [4].

Квадратичный по  $\alpha$  член в матрице определителя (6) при отсутствии частотной дисперсии сводится к перенормировке тензора магнитной проницаемости  $\mu$ :  $\mu_{ij} - \alpha_{il} \varepsilon_{lm}^{-1} \alpha_{mj} = \tilde{\mu}_{ij}$ , но ввиду того, что этот эффект мал, его можно не учитывать.

Анализировать уравнение (6) довольно сложно, и мы рассмотрим лишь наиболее простые случаи.

Положим, что диэлектрическая проницаемость таких кристаллов есть скаляр, т. е.  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon \delta_{ij}$ , откуда  $\varepsilon_{ij}^{-1} = \frac{1}{\varepsilon} \delta_{ij}$ . При этом уравнение (6) принимает вид:

$$\Delta = |a_{ij}| = |n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \varepsilon \mu_{ij} + (\alpha_{il} e_{lki} - e_{ikl} \alpha_{il}) n_k| = 0. \quad (7)$$

Представим  $a_{ij}$  в виде двух членов — независящего от  $\alpha$  и линейного по  $\alpha$ :

$$a_{ij} = a_{ij}^{(0)} + a_{ij}^{(1)},$$

где

$$a_{ij}^{(0)} = n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \varepsilon \mu_{ij};$$

$$a_{ij}^{(1)} = (\alpha_{il} e_{lki} - e_{ikl} \alpha_{il}) n_k. \quad (8)$$

Тогда определитель (7) можно представить в виде:

$$\Delta = \frac{1}{3!} e_{abc} e_{def} a_{ad}^{(0)} a_{bf}^{(0)} a_{cg}^{(0)} = \Delta^{(0)} + \Delta^{(1)} + \Delta^{(2)} + \Delta^{(3)}, \quad (9)$$

где

$$\Delta^{(0)} = \frac{1}{3!} e_{abc} e_{def} a_{ad}^{(0)} a_{bf}^{(0)} a_{cg}^{(0)} = |n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \varepsilon \mu_{ij}|$$

$$\Delta^{(1)} = \frac{1}{2} e_{abc} e_{def} a_{ad}^{(0)} a_{bf}^{(0)} a_{cg}^{(1)}$$

$$\Delta^{(2)} = \frac{1}{2} e_{abc} e_{def} a_{ad}^{(0)} a_{bf}^{(1)} a_{cg}^{(1)}$$

$$\Delta^{(3)} = \frac{1}{3!} e_{abc} e_{def} a_{ad}^{(1)} a_{bf}^{(1)} a_{cg}^{(1)} = |(\alpha_{il} e_{lki} - e_{ikl} \alpha_{il}) n_k|. \quad (10)$$

$\Delta^{(0)} = 0$  — обычное дисперсионное уравнение, не учитывающее магнитоэлектрический эффект; члены  $\Delta^{(1)}$ ,  $\Delta^{(2)}$ ,  $\Delta^{(3)}$  являются малыми добавками к нему соответственно первой, второй и третьей степени по  $\alpha$ .

В кристаллах кубической системы  $\alpha_{ij}$  является псевдоскаляром и, так как  $\alpha_{ij}^{(1)}$  становится равным нулю, магнитоэлектрический эффект не влияет на распространение электромагнитных волн.

Рассмотрим одноосные кристаллы. Например, обладающий магнитоэлектрическим эффектом одноосный кристалл  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  имеет точечную группу магнитной симметрии  $\bar{3}m$ , которая допускает существование только симметричного псевдотензора  $\alpha_{ik}$  [1]. Экспериментально магнитоэлектрический эффект в кристалле  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  был обнаружен Астровым [3].

Из теории симметрии и магнитной симметрии кристаллов [2] следует, что в одноосных кристаллах все тензоры второго ранга одновременно диагонализуются и в главных осях имеют вид:

$$\begin{bmatrix} T_{\perp} & & \\ & T_{\perp} & \\ & & T_{\parallel} \end{bmatrix},$$

где ось симметрии кристалла направлена по оси  $Z$ .

Вычисления показывают, что  $\Delta^{(1)} = \Delta^{(3)} = 0$ , и дисперсионное уравнение (7) имеет вид:

$$\varepsilon (n^2 - \varepsilon \mu_{\perp}) [(n_x^2 + n_y^2) \mu_{\perp} + n_z^2 \mu_{\parallel} - \mu_{\perp} \mu_{\parallel} \varepsilon] + (n_x^2 + n_y^2) (n_z^2 - \varepsilon \mu_{\perp}) (\alpha_{\parallel} - \alpha_{\perp})^2 = 0. \quad (11)$$

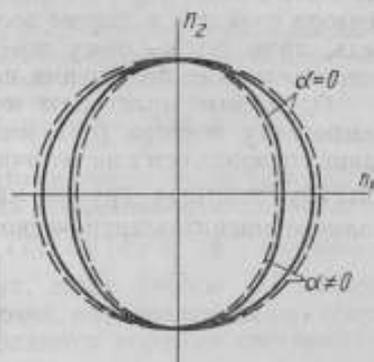
Полученное уравнение является уравнением поверхности волновых векторов, которая как и при отсутствии магнитоэлектрического эффекта есть поверхность вращения с осью вдоль оси кристалла. Положив  $n_y$  (или  $n_x$ ) равным нулю, получаем уравнение кривой в осевом сечении (см. рисунок)

$$\varepsilon (n_x^2 + n_z^2 - \varepsilon \mu_{\perp}) (n_x^2 \mu_{\perp} + n_z^2 \mu_{\parallel} - \mu_{\perp} \mu_{\parallel} \varepsilon) + n_x^2 (n_z^2 - \varepsilon \mu_{\perp}) (\alpha_{\parallel} - \alpha_{\perp})^2 = 0. \quad (12)$$

Если при отсутствии магнитоэлектрического эффекта ( $\alpha = 0$ ) поверхностью волновых векторов являются сфера и эллипсоид вращения, соприкасающиеся в точках на оси  $z$  [2], то при наличии магнитоэлектрического эффекта ( $\alpha \neq 0$ ) сфера и эллипсоид искажаются, причем точки касания остаются на прежнем месте.

Для определения типа поляризации волны необходимо решить уравнение (11) относительно  $n$ , задав предварительно направление вектора  $\mathbf{n}$ , и подставить результат в уравнения Максвелла (4). Так как все коэффициенты в этих уравнениях действительны (при действительных  $\alpha_i$  и при отсутствии внешних полей), то все проекции напряженностей (и индукций) будут изменяться в одинаковой фазе. Это означает, что все волны будут плоскополяризованы.

Из несферичности поверхности волновых векторов следует, что для всех волн направления волновых векторов  $\mathbf{n}$  и лучевых векторов  $\mathbf{s}$  не совпадают (направление  $\mathbf{s}$  является нормалью к поверхности волновых векторов в точке с заданным направлением  $\mathbf{n}$  [2]). Таким образом, все волны



Сечение поверхности волновых векторов плоскостью  $n_y = 0$ .

оказываются необыкновенными. Исключения составляют волны с вектором  $\mathbf{n}$ , направленным по главной оси кристалла или лежащим в плоскости  $z = 0$ .

Рассмотрим случай наличия в магнитоэлектрическом тензоре антисимметричной части, которую обозначим через  $\beta_{ik}$ , (симметричную часть будем по-прежнему обозначать  $\alpha_{ik}$ ). Тогда антисимметричную часть магнитоэлектрического тензора  $\beta_{ik}$  можно представить в виде  $\beta_{ik} = e_{ikl}\beta_l$ , где  $\beta_l$  — компоненты вектора, дуального тензору  $\beta_{ik}$ . Заменяя в уравнениях (4)  $\alpha_{ik}$  на  $\alpha_{ik} + e_{ikl}\beta_l$ , получим уравнения Максвелла для этого случая:

$$\begin{aligned} e_{ikl}(n_k - \beta_k)H_l &= -\epsilon_{ik}E_k - \alpha_{ik}H_k, \\ e_{ikl}(n_k - \beta_k)E_l &= \mu_{ik}H_k + \alpha_{ik}E_k. \end{aligned} \quad (13)$$

Из этого видно, что учет антисимметричной части магнитоэлектрического тензора сводится к замене волнового вектора  $\mathbf{n}$  на  $\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}$ . Это, в свою очередь, приводит к сдвигу поверхности волновых векторов на величину  $\boldsymbol{\beta}$  относительно ее положения при  $\boldsymbol{\beta} = 0$ .

Одноосные кристаллы могут иметь лишь одну, не равную нулю, компоненту вектора  $\boldsymbol{\beta}$ , а именно  $\beta_z$ . В этом случае поверхность будет сдвинута вдоль оси  $z$  на величину  $\beta_z$ . Это относится, например, к кристаллу  $\text{MnTiO}_3$ , точечная группа магнитной симметрии которого  $\bar{3}$  допускает наличие магнитоэлектрического тензора следующего вида [5]:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{\perp} & \beta \\ -\beta & \alpha_{\perp} \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

Таким образом, наличие магнитоэлектрического эффекта в одноосных кристаллах приводит к малым искажениям поверхности волновых векторов. При этом из-за искажения сферической части поверхности обыкновенная волна превращается в необыкновенную. Наличие в магнитоэлектрическом тензоре антисимметричной части приводит к сдвигу поверхности волновых векторов, т. е. к исчезновению ее центра симметрии. При этом волны одинаковой частоты, но распространяющиеся в противоположных направлениях, будут иметь различные значения волновых векторов. Магнитоэлектрический эффект оставляет поляризацию волн плоской.

Автор выражает глубокую благодарность В. И. Пустовойту за постановку задачи и внимание к работе.

#### Литература

1. Дзялошинский И. Е. ЖЭТФ, 37, 881, 1959.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред, М., Физматгиз, 1959.
3. Астров Д. Н. ЖЭТФ, 40, 1035, 1961.
4. Альшин Б. И., Астров Д. Н. ЖЭТФ, 44, 1195, 1963.
5. Brown W. F., Shtrikman Jr. S., Treves D., J. Appl. Phys. 34, 4, 1233, 1963.

Как стало известно автору, Фухс (Fuchs R., Phil. mag., 11, 111, 647, 1965) рассмотрел аналогичную задачу и получила уравнения, согласующиеся с уравнениями настоящей работы для случая симметричного тензора  $\alpha_{ij}$ .

Статья поступила 30 ноября 1964 г.

УДК 536.63

### ТЕПЛОЕМКОСТЬ ВЕЩЕСТВА ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Наличие экстремумов теплоемкости при постоянном объеме  $C_V$  в закритической области объясняется в предположении об особенностях  $C_V$  в критической точке. Обсуждается поведение скачка теплоемкости на кривой сосуществования. Анализируется поведение  $C_P$  в закритической области. Все эти исследования позволяют определить параметры уравнения состояния вещества вблизи критической точки.

1. Экспериментально обнаружено, что в надкритической области жидкости и газа имеются максимумы ряда термодинамических величин:  $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$  как функции от температуры,  $C_P(T)$ ,  $C_V(T)$  и др. Анализируя большое число экспериментальных данных, автор работы [1] построил в  $P$ - $T$ -диаграмме геометрические места точек, определяющих максимумы указанных величин. Координаты точек являются корнями соответствующих уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P} \left[ V - T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \right]_T = 0; \quad \left( \frac{\partial C_P}{\partial P} \right)_T = 0; \quad \left( \frac{\partial C_P}{\partial T} \right)_P = 0; \\ \left( \frac{\partial C_V}{\partial T} \right)_V = 0; \quad \left( \frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Вопрос о природе этих максимумов обсуждался в двух аспектах.

Предпринимались попытки рассматривать кривые, соответствующие соотношениям (1), как линии фазовых переходов. Например, в работе [2] рассматривается ряд третьих производных от термодинамического потенциала, содержащихся в уравнениях (1), и указанные явления отождествляются с фазовыми переходами третьего рода.

Вся концепция фазовых переходов в надкритической области не выдерживает никакой критики. В частности, достаточно указать на то, что кривые, являющиеся геометрическими местами различных величин в уравнениях (1), не совпадают друг с другом, и особенно на то, что обращение в нуль производных от термодинамического потенциала не является особенностью (по общепринятой терминологии [3] фазовые переходы определяются скачками соответствующих производных).

Другая концепция [4, 5] заключается в том, что максимумы рассматриваются как «геометрическая необходимость», вызванная переходом от условий в критической точке к плавному изменению вдали от нее [1]. Эти соображения представляются понятными для величин  $C_P$  и  $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ , обращающихся в критической точке в бесконечность, что должно обусловить возникновение максимумов, определяемых первыми тремя равенствами в системе (1). Соответствующий количественный расчет проведен

в работе [5] на основе существующей феноменологической теории критической точки [6].

Такое рассмотрение, однако, оставляет в стороне наличие максимумов, связанных с последними двумя равенствами в системе (1), так как, согласно теории [6],  $C_V$  остается конечным в критической точке. Естественно, возникает альтернатива — либо следует отказаться от «геометрического объяснения» соотношений (1), либо считать конечность  $C_V$  в критической точке противоречием теории с экспериментом, требующим для единого объяснения уравнений (1) особенности  $C_V$  в критической точке.

2. Последовательное рассмотрение вопроса о «геометрических особенностях» термодинамических величин в надкритической области возможно в связи с проводимыми в последнее время измерениями теплоемкости  $C_V$  аргона в непосредственной близости от критической точки. Такие измерения показали [7], что теплоемкость при постоянном объеме  $C_V$  стремится к бесконечности по логарифмическому закону при объеме, равном критическому, и приближении со стороны гомогенной фазы температуры к критической:  $C_V \approx \ln |T - T_k|$ .

Этот факт имеет принципиальное значение для теории критической точки, так как указывает на наличие особенности термодинамического потенциала (в переменных  $V, T$ ), не учитываемой в обычной теории [6].

В работе [8] выяснено, к каким термодинамическим следствиям приводит эта особенность и как должна быть видоизменена обычная теория. Оказалось, что общее выражение для теплоемкости вблизи критической точки имеет вид:

$$C_V = -a \ln \left[ \left[ \frac{T - T_k}{T_k} + \beta \left( \frac{V - V_k}{V_k} \right)^2 \right]^2 + \gamma^2 \left( \frac{V - V_k}{V_k} \right)^4 \right] + C_{V_0}, \quad (2)$$

где  $C_{V_0}$  — регулярная часть теплоемкости, а уравнение состояния вещества может быть записано следующим образом:

$$P - P_k = C(T - T_k) + C_1(T - T_k)^2 - A(T - T_k)(V - V_k) - \frac{B}{3}(V - V_k)^3 - \frac{2\alpha T_k}{V_k} \left( \frac{T - T_k}{T_k} \right)^2 \frac{\beta \frac{T - T_k}{T_k} \frac{V - V_k}{V_k} + (\beta^2 + \gamma^2) \left( \frac{V - V_k}{V_k} \right)^3}{\left( \frac{T - T_k}{T_k} \right)^2 + 2\beta \frac{T - T_k}{T_k} \left( \frac{V - V_k}{V_k} \right)^2 + (\beta^2 + \gamma^2) \left( \frac{V - V_k}{V_k} \right)^4}. \quad (3)$$

Переходя в уравнениях (2) и (3) к безразмерным координатам  $t = \frac{T - T_k}{T_k}$ ,  $v = \frac{V - V_k}{V_k}$ ,  $p = \frac{P - P_k}{P_k}$ , имеем:

$$C_V = -a \ln(t^2 + 2\beta tv^2 + \delta v^4) + C_{V_0}; \quad (4)$$

$$p = ct + c_1 t^2 - atv - \frac{b}{3} v^3 - t^2 \frac{ktv + gv^3}{t^2 + 2\beta tv^2 + \delta v^4}, \quad (5)$$

где безразмерные константы связаны с критическими параметрами и коэффициентами, приведенными в уравнении (3):

$$a = \frac{AT_k V_k}{P_k}; \quad b = \frac{BV_k^3}{P_k}; \quad c = \frac{CT_k}{P_k}; \quad c_1 = \frac{C_1 T_k^2}{P_k}; \\ k = \frac{2\alpha\beta T_k}{P_k V_k}; \quad \delta = \beta^2 + \gamma^2; \quad g = \frac{\delta k}{\beta}. \quad (6)$$

Заметим, что соотношения (4) и (5) представляют собой разложения в степенные ряды, которые сходятся при  $t, v, p \lesssim 1$ .

Безразмерные константы (6) для веществ одного класса, по-видимому, близки.

Из экспериментов по измерению теплоемкости  $C_V$  аргона вблизи критической точки и скачков теплоемкости при расщеплении фаз следует, что для аргона  $\alpha = 2$  кал/град·моль;  $\beta \approx \gamma \approx 0,1$ .

Уравнение состояния (3) полностью характеризует поведение термодинамических величин вблизи критической точки. Поэтому из этого уравнения как экстремумы соответствующих величин должны получаться и указанные выше максимумы.

3. Исследуем зависимость теплоемкости  $C_V$  от  $T$  и  $V$ .

Экстремумы  $C_V$  в функции от объема при постоянной температуре определяются из условия  $\left(\frac{\partial C_V}{\partial v}\right)_t = -4\alpha \frac{\beta tv + \delta v^2}{t^2 + 2\beta tv^2 + \delta v^4} = 0$ . Исследование знака  $\left(\frac{\partial^2 C_V}{\partial v^2}\right)_t$  показывает, что  $v = 0$ , т. е.  $V = V_k$  (продолжение критической изохоры в надкритическую область) определяет вид уравнения линии максимумов  $C_V(v)$  в надкритической области\*.

В точке максимума

$$C_V(V_k) = -\alpha \ln\left(\frac{T - T_k}{T_k}\right)^2 + C_{V_s}(V_k). \quad (7)$$

В докритической области ( $T < T_{кр}$ )  $C_V(V)$  имеет минимум при  $v = 0$  и два максимума при  $v = \pm \sqrt{-\frac{\beta}{\delta}} t$ .

Перейдем к изучению зависимости  $C_V(t)$  при  $v = \text{const}$ .

Экстремумы определяются из условия  $\left(\frac{\partial C_V}{\partial t}\right)_v = -2\alpha \frac{t + \beta v^2}{t^2 + 2\beta tv^2 + \delta v^4} = 0$ .

Таким образом, в надкритической области нет максимумов  $C_V(t)$ . Уравнение линии максимумов (при  $T < T_k$ ) имеет вид:

$$T - T_k = -\beta \frac{T_k}{V_k^2} (V - V_k)^2. \quad (8)$$

Значение  $C_V$  в точке максимума

$$C_V(T)_{\max} = -\alpha \ln\left(\frac{\delta}{\beta^2} - 1\right) \left(\frac{T - T_k}{T_k}\right)^2 + C_{V_s}. \quad (9)$$

Кривая, построенная по уравнению (8), не совпадает с кривой сосуществования жидкости и газа. Относительное положение этих кривых определяется соотношениями параметров вещества. Таким образом, максимумы теплоемкости не совпадают (по температуре) со скачком теплоемкости, который имеет место при переходе через кривую сосуществования.

4. Для исследования двухфазной системы используем, прежде всего, условия фазового равновесия — равенства химических потенциалов, давлений и температур сосуществующих фаз.

Расчет, аналогичный выполненному в работе [6], приводит к следующему уравнению кривой сосуществования:

$$T - T_k = -\frac{b}{3a} \frac{T_k}{V_k^2} (V - V_k)^2 - \frac{k \frac{T - T_k}{T_k} + g \left(\frac{V - V_k}{V_k}\right)^2}{a T_k \left(\frac{T - T_k}{T_k}\right)^2 + 2\beta \frac{T - T_k}{T_k} \left(\frac{V - V_k}{V_k}\right)^2 + \delta \left(\frac{V - V_k}{V_k}\right)^4}. \quad (10)$$

\* Разумеется, при учете следующих членов разложения в выражении (4), уравнение линии максимумов  $C_V(V)$  перестает совпадать с продолжением критической изохоры.

Энергия  $E$  системы, описываемой уравнением состояния (5), имеет вид:

$$E = P_k V_k \left[ cv + 2c_1 tv + \frac{dv^3}{3} + \frac{d_1}{4} v^4 + d_2 t v^2 - \frac{a}{2} v^2 + f(t) - \frac{aT_k}{P_k V_k} t \ln(t^2 + 2\beta t v^2 + \delta v^4) - \frac{aT_k}{P_k V_k} t^2 \frac{t + \beta v^2}{t^2 + 2\beta t v^2 + \delta v^4} \right], \quad (11)$$

где  $f(t)$  — функция температуры, вид которой для нас несущественен.

При получении равенства (11) учтены, кроме использованных в формуле (5), также следующие члены разложения (5):  $dtv^2$ ,  $d_1 tv^3$  и  $d_2 t^2 v$ , которые определяют скачок теплоемкости.

Теплоемкость двухфазной системы определяется ее энергией, которая, если пренебречь поверхностной энергией, выражается с помощью равенства (11) и концентрации фаз [9].

Приведем результат расчета теплоемкости гетерогенной системы  $C_{V_{\text{гет}}}$  на кривой сосуществования:

$$C_{V_{\text{гет}}} = C_{V_{\text{гом}}} + \Delta C_V; \quad \Delta C_V = \frac{P_k V_k}{T_k} \lambda \left[ a - \frac{2d}{3} v - \left( d_1 - \frac{d_2}{\lambda} \right) v^2 \right] + \varphi(\lambda), \quad (12)$$

где  $\lambda$  — параметр кривой сосуществования:  $\lambda = -v \left( \frac{dv}{dt} \right)_{\text{сосущ}}$ , а  $\varphi(\lambda)$  появляется вследствие наличия в выражении (11) двух последних слагаемых и приводит к появлению относительного максимума на кривой  $\Delta C_V$  от  $v$  при  $v = v_{\text{кр}}$ . Явный вид  $\varphi(\lambda)$  здесь для краткости не приводится.

Эксперименты по измерению скачка теплоемкости (12) при переходе через кривую сосуществования позволяют выделить одну из трех возможностей:

1) кривая сосуществования (10) является параболой второй степени, т. е. уравнение состояния имеет вид уравнения (5). В этом случае  $d = d_1 = d_2 = 0$  и скачок теплоемкости вообще не зависит от объема;

2) кривая сосуществования (в переменных  $T, V$ ) не симметрична относительно критической точки, т. е. в уравнении состояния (5) также существенны слагаемые более высокого порядка малости, самым низким из которых является  $dtv^2$ , при этом скачок теплоемкости линейно зависит от объема;

3) кривая сосуществования симметрична относительно критической точки, а скачок теплоемкости зависит от объема. Это означало бы, что  $\left( \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial v^2} \right)_{\text{кр}} \equiv d$  в критической точке становится равным нулю и в разложении (5) необходимо учесть нечетные по  $v$  слагаемые более высокого порядка малости  $d_1 tv^3$  и  $d_2 t^2 v$ . При этом скачок теплоемкости квадратичен по  $v$ , т. е. при критическом объеме он имеет максимум.

5. Теплоемкость при постоянном давлении  $C_P$  определяем из термодинамического равенства

$$C_P = C_V + T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P. \quad (13)$$

Соответствующие производные могут быть легко найдены из выражения (5):

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial p}{\partial t} \right)_v &= c + 2c_1 t - (a + \psi) v; & \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_t &= -(a + \chi) t - bv^2, \\ \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_P &= \frac{c + 2c_1 t - (a + \psi) v}{(a + \chi) t + bv^2}, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\psi$  и  $\chi$  — функции переменной  $\frac{t}{v^2} = y$

$$\psi = \frac{ky^4 + 4\beta ky^3 + 5\beta gy^2 + 2\delta gy}{(y^2 + 2\beta y + \delta)^2}; \quad \chi = \frac{ky^4 + (3g - 2\beta k)y^3 - \beta gy^2 - g\delta y}{(y^2 + 2\beta y + \delta)^2}. \quad (15)$$

При исследовании экстремумов  $C_p$  главную роль играет второе слагаемое в формуле (13), при приближении к критической точке идущее в бесконечность вдоль кривых  $v = 0$  или  $v \approx \sqrt{t}$ , как  $\frac{1}{t}$ , в то время как  $C_v \approx \ln t$ .

Уравнение линии максимумов  $C_p$  в функции от  $P$  при  $t = \text{пост.}$  имеет вид:

$$P - P_k = c \frac{P_k}{T_k} (T - T_k) + \left[ c_1 + (a + k) \frac{2(a + \chi)(a + \psi)}{\left(2b + \frac{t}{v} \frac{\partial \chi}{\partial v}\right) c} \right] \frac{P_k}{T_k^2} (T - T_k)^2. \quad (16)$$

Значение  $C_p(P)$  в точке максимума

$$C_p = \frac{c^3}{a + \chi} \frac{P_k^2 V_k}{T_k} \frac{1}{P - P_k} - \alpha \ln \frac{1}{c^2} \left( \frac{P - P_k}{P_k} \right)^2. \quad (17)$$

Рассмотрим теперь  $C_p(t)$  при  $P = \text{пост.}$  Уравнение линии максимумов  $C_p$  в функции от  $t$  при  $P = \text{пост.}$  имеет следующий вид:

$$P - P_k = c \frac{P_k}{T_k} (T - T_k) + \left[ c_1 + (a + k) \frac{2(a + \chi)(a + \psi) + (a + \chi)^2}{\left(2b + \frac{t}{v} \frac{\partial \chi}{\partial v}\right) c} \right] \frac{P_k}{T_k^2} (T - T_k)^2. \quad (18)$$

Значение  $C_p(T)$  в точке максимума совпадает с  $C_p(P)$ , определяемой формулой (17) с точностью до выписанных в нее членов.

Заметим, что при сравнении выражений (16)–(18) с экспериментальными данными можно считать  $\psi = \chi \approx k$ , если при стремлении к критической точке  $\frac{t}{v^2} \rightarrow \infty$  и  $\psi \approx \chi \approx 0$ , если при этом  $\frac{t}{v^2} \rightarrow 0$ . Так что в первом случае

$$C_p(T)_{\text{max}} \approx C_p(P)_{\text{max}} = \frac{P_k^2 V_k}{T_k} \frac{c^3}{a + k} \frac{1}{P - P_k} - \alpha \ln \frac{1}{c^2} \left( \frac{P - P_k}{P_k} \right)^2. \quad (19)$$

Во втором случае в выражении (19) следует положить  $k = 0$ .

Сравнение выражений (3), (16) и (18) показывает, что в первом по  $\frac{T - T_k}{T_k}$  приближении геометрические места максимумов  $C_p(P)$  и  $C_p(T)$  совпадают и лежат на продолжении критической изохоры в надкритическую область. Небольшое различие появляется лишь в следующем приближении.

6. Наличие максимумов теплоемкостей вблизи критической точки и скачков  $\Delta C_v$  при расслоении фаз делает калориметрические измерения удобным средством изучения поведения веществ в этой области.

Для этой цели в первую очередь необходимо проверить вид уравнения состояния (3) и найти входящие в него константы. Измерения  $C_v$  (положение и значение максимумов  $C_v$  в функции от  $V$  и  $T$ ), а также скачка  $\Delta C_v$  удобны для определения констант  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ ,  $d$ , а аналогичные измерения  $C_p$  — для определения  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $c_1$ .

Уравнение состояния (5) определяет свойства вещества вблизи критической точки, поэтому указанные константы будут существенны при измерении и других физических величин, т. е. имеется много путей для проверки настоящей теории.

Существующие экспериментальные данные по измерению теплоемкостей частично подтверждают полученные выше результаты, однако для полного сравнения нужны специальные эксперименты, проведенные в достаточной близости от критической точки, причем необходимо измерять  $C_V$  и  $C_P$  на одном и том же веществе. Напомним, что проведенное рассмотрение справедливо для  $\frac{T-T_k}{T_k}, \frac{V-V_k}{V_k}, \frac{P-P_k}{P_k}$  меньших или порядка единицы.

В заключение благодарю А. В. Воронеля за полезные обсуждения затронутых выше вопросов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Каганер М. Г. ЖФХ, **32**, 332, 1958.
2. Meijer P. Proc. Phys. Soc. **76**, 303, 1960.
3. Erenfest P. Proc. Kon. Acad. Amsterdam, **36**, 153, 1933.
4. Столетов А. Г. Собр. соч. 1, М.—Л., изд-во АН СССР, 1939.
5. Розен А. М. ДАН, **49**, 133, 1954.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Гостехиздат, 1951.
7. Багацкий М. И., Воронель А. В., Гусак В. Г. ЖЭТФ, **43**, 728, 1962.
8. Лзбель М. Я., Воронель А. В., Гитерман М. Ш. ЖЭТФ, **46**, 673, 1964.
9. Кричевский И. Р., Хазанова Н. Е. ЖФХ, **29**, 1087, 1955.

*Статья поступила 30 ноября 1964 г.*

УДК 538.56 + 621.371

**ЛУЧЕВАЯ АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ РЕШЕНИЙ  
ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В КООРДИНАТАХ  
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА**

Исследованы коротковолновые лучевые асимптотики собственных функций волнового уравнения в координатах параболического цилиндра.

Показано, что каустиками лучей этих решений являются параболы, параметр которых определяется переменной разделения.

Сконструированы собственные решения, являющиеся аналогом собственных функций

$$H_n^{(1)} e^{in\psi}, H_n^{(2)} e^{in\psi} \text{ и } J_n e^{in\psi}$$

в системе координат кругового цилиндра.

Как было показано в ряде работ [1], геометрическое описание поля является достаточно удовлетворительным при условии, если введены уточнения для поля в каустической и закаутической областях. В большинстве случаев для этого используют представления поля в этой области через функции Эйри.

В настоящей работе рекомендуется другой метод геометрического описания. Этот метод заключается в замене искомого лучевого поля другим, достаточно близким к нему в окрестности произвольно выбранного луча, для которого, однако, известна функция, являющаяся строгим решением волнового уравнения.

Естественно, что чем менее будут отличаться системы лучей, тем менее будут различны соответствующие им поля.

В работе исследованы лучевые асимптотики собственных решений в координатах параболического цилиндра. Каустиками этих полей являются параболы, что дает возможность добиваться не только совпадения кривизны каустик (в точке касания рассматриваемого луча), но и их производных по длине дуги.

Описание поля через функции параболического цилиндра не вызывает в настоящее время значительных трудностей, поскольку эти функции достаточно хорошо исследованы: для них имеется ряд представлений в виде ряда Тэйлора, представления интегрального вида, асимптотики и они табулированы с достаточной степенью точности [2, 3].

**Геометрические соотношения**

Параболические координаты  $\eta, \xi$  (рис. 1), связаны с декартовыми координатами  $x, y$  следующими формулами:

$$\begin{aligned} x &= \eta \xi, \quad -\infty < \xi < +\infty, \\ y &= \frac{\eta^2 - \xi^2}{2}, \quad 0 \leq \eta < +\infty. \end{aligned} \tag{1}$$

В дальнейшем нам понадобится ряд геометрических величин и соотношений, которые удобно выписать заранее. Такими величинами (рис. 2) являются:

1) расстояние  $r$  от точки с координатами  $\xi, \eta$  до начала координат

$$r = \frac{\xi^2 + \eta^2}{2}, \quad (2)$$

2) радиус кривизны  $\rho(\xi)$  параболы  $\eta = \eta_0 = \text{const}$  в точке  $\xi$

$$\rho(\xi) = \frac{(\eta_0^2 + \xi^2)^{3/2}}{\eta_0}, \quad (3)$$

3) координаты  $\xi_0^\pm$  точек касания к параболы прямых, проходящих через точку  $\xi, \eta$

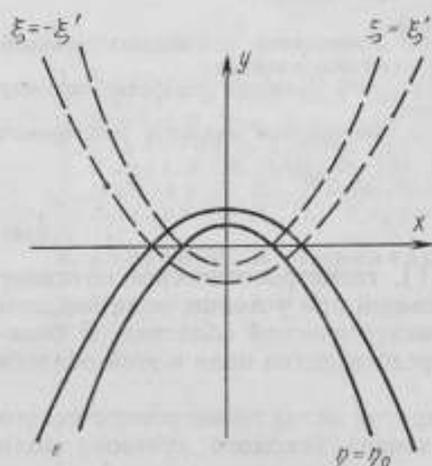


Рис. 1. К определению параболы системы координат.

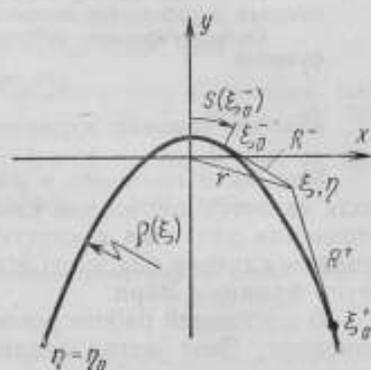


Рис. 2. Некоторые геометрические соотношения в параболы системе координат.

$$\xi_0^\pm = \frac{1}{\eta_0} \left\{ \xi \eta \pm \tilde{\sigma} \tilde{\eta} \right\}, \quad (4)$$

где

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\xi^2 + \eta_0^2},$$

$$\tilde{\eta} = \sqrt{\eta^2 - \eta_0^2}. \quad (5)$$

Обозначения точек касания выбраны здесь таким образом, что  $\xi_0^- < \xi < \xi_0^+$ ;

4) длина дуги параболы от ее вершины ( $\xi = 0$ ) до точки  $\xi_0$

$$S(\xi_0) = \int_0^{\xi_0} \sqrt{\eta_0^2 + \xi^2} d\xi = \frac{\xi_0 \tau_0}{2} + \frac{1}{2} \eta_0 \ln \frac{\xi_0 + \tau_0}{\eta_0}, \quad (6)$$

где

$$\tau_0 = \sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}. \quad (7)$$

5) длина  $R^\pm$  упомянутых выше касательных

$$R^\pm = \frac{|\tilde{\sigma} \tilde{\eta}|}{\eta_0} \left( \eta_0^\pm \mp \xi \tilde{\eta} \right). \quad (8)$$

## Решение уравнения Гельмгольца

Уравнение Гельмгольца

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0 \quad (9)$$

путем подстановки в него  $\Psi = M(\xi) L(\eta)$  приводится к системе

$$\begin{aligned} \frac{d^2 M}{d\xi^2} + (a + k^2 \xi^2) M &= 0, \\ \frac{d^2 L}{d\eta^2} + (-a + k^2 \eta^2) L &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $a$  — константа разделения.

Еще одна подстановка

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{z}{\sqrt{2ki}}, \\ \eta &= \frac{z}{\sqrt{-2ki}} \end{aligned} \quad (11)$$

переводит уравнения для  $M$  и  $L$  в уравнение Вебера

$$\frac{d^2 D}{dz^2} + \left( p + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4} \right) D = 0 \quad (12)$$

с одинаковым индексом  $p$

$$p = -\frac{1}{2} - \frac{ai}{2k}. \quad (13)$$

Известно [2], что функции Вебера  $D_p(z)$ ,  $D_p(-z)$ ,  $D_{-p-1}(iz)$ ,  $D_{-p-1}(-iz)$  являются решениями этого уравнения. Частное решение (9) будет выражаться через парные произведения таких функций.

Ради краткости в обозначении этих функций будем писать в скобках вместо всего аргумента только координатный множитель  $\xi$  или  $\eta$ , а фазу множителя при нем в единицах  $\pi/4$  отмечать индексами, поставленными вверх; фазу при этом выбираем в пределах от  $-\pi$  до  $+\pi$ . От нижнего индекса оставим лишь знак перед его мнимой частью. Так

$$\begin{aligned} D_{-\frac{1}{2} + \frac{ia}{2k}}(\xi \sqrt{2ki}) &= D_{+}^{-1}(\xi), \\ D_{-\frac{1}{2} - \frac{ia}{2k}}(-\xi \sqrt{-2ki}) &= D_{+}^{+3}(\xi). \end{aligned}$$

В этих обозначениях при вещественных  $\xi$  и  $\eta$  комплексное сопряжение соответствует перемене знака одновременно в верхнем и нижнем индексах.

Из упомянутых частных решений (9) (их всего 16) только следующие восемь асимптотически имеют вид расходящихся или сходящихся волн (попарно сгруппированы комплексно-сопряженные решения):

$$\begin{aligned} D_{+}^{-1}(\xi) D_{-}^{-1}(\eta); & \quad D_{+}^{+1}(\xi) D_{+}^{+1}(\eta) \\ D_{+}^{+3}(\xi) D_{-}^{-1}(\eta); & \quad D_{-}^{-3}(\xi) D_{+}^{+1}(\eta) \\ D_{+}^{-1}(\xi) D_{+}^{+3}(\eta); & \quad D_{-}^{-1}(\xi) D_{+}^{-1}(\eta) \\ D_{+}^{+3}(\xi) D_{-}^{+3}(\eta); & \quad D_{-}^{-3}(\xi) D_{+}^{-3}(\eta). \end{aligned} \quad (14)$$

В этом можно легко убедиться, рассматривая асимптотику Ганкеля этих функций [2]

$$D_p(z) \sim z^p e^{-\frac{z^2}{4}}. \quad (15)$$

Отсюда, например, сразу видно, что первое решение  $D_+^{-1}(\xi) D_-^{-1}(\eta)$  пропорционально:

$$e^{+\frac{ik\xi^2}{2}} \cdot e^{+\frac{ik\eta^2}{2}} = e^{ikr}, \quad (16)$$

т. е. представляет собой расходящуюся волну (при временном факторе  $e^{-i\omega t}$ ). Комплексно-сопряженным функциям, очевидно, соответствуют волны, распространяющиеся в противоположном направлении.

В левой полуплоскости  $\xi$  становится отрицательным. Перечисленные в выражениях (14) комбинации функций в введенных выше обозначениях запишутся как:

$$\begin{aligned} D_+^{-3}(-\xi) D_-^{-1}(\eta); & D_-^{-3}(-\xi) D_+^{-1}(\eta) \\ D_+^{-1}(-\xi) D_-^{-1}(\eta); & D_+^{-1}(-\xi) D_+^{-1}(\eta) \\ D_+^{-3}(-\xi) D_+^{-3}(\eta); & D_-^{-3}(-\xi) D_+^{-3}(\eta) \\ D_-^{-1}(-\xi) D_+^{-3}(\eta); & D_-^{-1}(-\xi) D_-^{-3}(\eta), \end{aligned} \quad (17)$$

так как, например,

$$D_+^{-1}(\xi)|_{\xi < 0} = D_+^{-3}(|\xi|) = D_+^{-3}(-\xi).$$

#### Асимптотики Дебая функций Вебера

Для определения лучевой структуры выписанных решений рассмотрим асимптотики Дебая входящих в них функций Вебера. При  $x > 0$

$$\begin{aligned} D_+^{-1}(x) \approx \sqrt[4]{\frac{i}{2k(x^2 + \eta_0^2)}} \exp\left(\frac{ikx}{2} \sqrt{x^2 + \eta_0^2} + \frac{ik\eta_0^2}{2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + \eta_0^2}}{\eta_0} + \right. \\ \left. + i \frac{k\eta_0^2}{4} \ln \frac{k\eta_0^2}{2} - \frac{ik\eta_0^2}{4} + \frac{\pi k\eta_0^2}{8}\right); \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} D_-^{-1}(x) \approx \sqrt[4]{\frac{i}{2k(x^2 - \eta_0^2)}} \exp\left(\frac{ikx}{2} \sqrt{x^2 - \eta_0^2} - \frac{ik\eta_0^2}{2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - \eta_0^2}}{\eta_0} - \right. \\ \left. - \frac{ik\eta_0^2}{4} \ln \frac{k\eta_0^2}{2} + \frac{ik\eta_0^2}{4} - \frac{\pi k\eta_0^2}{8}\right); \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} D_+^{-3}(x) \approx \sqrt[4]{\frac{i}{2k(x^2 + \eta_0^2)}} \exp\left(\frac{ikx}{2} \sqrt{x^2 + \eta_0^2} + \frac{ik\eta_0^2}{2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + \eta_0^2}}{\eta_0} + \right. \\ \left. + \frac{ik\eta_0^2}{4} \ln \frac{k\eta_0^2}{2} - \frac{\pi}{2} i - \frac{ik\eta_0^2}{4} - \frac{3\pi k\eta_0^2}{8}\right) + \\ + \sqrt[4]{\frac{-i}{2k(x^2 + \eta_0^2)}} \exp\left(-\frac{ikx}{2} \sqrt{x^2 + \eta_0^2} - \frac{ik\eta_0^2}{2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + \eta_0^2}}{\eta_0} + \right. \\ \left. + \frac{ik\eta_0^2}{4} \ln \frac{k\eta_0^2}{2} + \frac{\pi}{4} i - \frac{ik\eta_0^2}{4} + \frac{\pi k\eta_0^2}{8}\right). \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
 D_{\pm}^{\pm 3}(x) \approx & \sqrt[4]{\frac{-i}{2k(x^2 - \eta_0^2)}} \exp\left(-\frac{ikx}{2} \sqrt{x^2 - \eta_0^2} + \frac{ik\eta_0^2}{2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - \eta_0^2}}{\eta_0} - \right. \\
 & \left. - \frac{ik\eta_0^2}{4} \ln \frac{k\eta_0^2}{2} + \frac{ik\eta_0^2}{4} + \frac{\pi}{4}i + \frac{3\pi k\eta_0^2}{8}\right) + \\
 & + \sqrt[4]{\frac{i}{2k(x^2 - \eta_0^2)}} \exp\left(\frac{ikx}{2} \sqrt{x^2 - \eta_0^2} - \frac{ik\eta_0^2}{2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - \eta_0^2}}{\eta_0} - \right. \\
 & \left. - \frac{ik\eta_0^2}{4} \ln \frac{k\eta_0^2}{4} + \frac{ik\eta_0^2}{4} - i\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi k\eta_0^2}{8}\right), \quad (21)
 \end{aligned}$$

где

$$\eta_0 = \frac{\sqrt{a}}{k}. \quad (22)$$

Асимптотики функций  $D_{\pm}^{\pm 3}(x)$ ,  $D_{\pm}^{\pm 1}(x)$ ,  $D_{\pm}^{\pm 3}(x)$ ,  $D_{\pm}^{\pm 1}(x)$  получаются соответственно из написанных выше асимптотик функций  $D_{\pm}^{\pm 1}(x)$ ,  $D_{\pm}^{\pm 1}(x)$ ,  $D_{\pm}^{\pm 3}(x)$ ,  $D_{\pm}^{\pm 3}(x)$  путем комплексного сопряжения. Выписанные асимптотики получены следующим образом. Формулы (18) и (19) заимствованы из работы [4], а (20) и (21) получены с помощью соотношений обхода, связывающих каждые три зависимые решения уравнения Вебера [2]. При этом входящая в эти соотношения гамма-функция представлялась одночленной формулой Стирлинга, хотя возможно более точное представление.

Первые две из выписанных асимптотик одночленны. Две последние двучленны. При образовании асимптотик разбираемых решений (14) или (17), т. е. при перемножении правых частей (18)–(22) получаются многочленные выражения. Каждый из входящих в них членов будет иметь вид экспоненты с некоторым множителем. Впоследствии для каждого члена этот множитель можно будет интерпретировать как амплитуду луча, а экспоненту — как фазовый множитель, соответствующий этому лучу. Таким образом, каждому члену будет соответствовать свой луч (по амплитуде и направлению распространения). Причина же наличия нескольких конгруенций лучей, представляющих решения, заключается в двучленности выписанных выше асимптотик.

#### Асимптотика $D_{\pm}^{\pm 1}(\xi) D_{\pm}^{\pm 1}(\eta)$ при $\xi > 0$

Асимптотику решения (9) рассмотрим наиболее подробно на примере собственной функции  $D_{\pm}^{\pm 1}(\xi) D_{\pm}^{\pm 1}(\eta)$ . Как следует из выражения (18), его асимптотика Дебая при положительных  $\xi$  имеет вид

$$D_{\pm}^{\pm 1}(\xi) D_{\pm}^{\pm 1}(\eta) \approx \left(\frac{-i}{4k^2 \xi^2 \eta^2}\right)^{1/4} \exp\left(\frac{ik\xi\tilde{\xi}}{2} + \frac{ik\eta\tilde{\eta}}{2} + \frac{ik\eta_0^2}{2} \ln \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - \eta_0^2}}{\eta + \sqrt{\eta^2 - \eta_0^2}}\right). \quad (23)$$

Градиент фазы этого выражения определяет волновой вектор волны (и тем самым направление луча). Его проекции таковы:

$$k_{\xi} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = k \frac{\tilde{\xi}}{\tau}, \quad (24)$$

$$k_{\eta} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = k \frac{\tilde{\eta}}{\tau}, \quad (25)$$

$$k_x = \frac{k}{r^2} (\eta \tilde{\xi} + \tilde{\xi} \eta), \quad (26)$$

$$k_y = \frac{k}{r^2} (\eta \tilde{\eta} - \tilde{\xi} \tilde{\xi}). \quad (27)$$

Положительный знак проекций  $k_{\tilde{\xi}}$  и  $k_{\tilde{\eta}}$  указывает направление луча (рис. 3).

Наклон касательной в точке  $\tilde{\xi}_0^-$ , соответствующей точкам наблюдения  $\tilde{\xi}$ ,  $\eta$ , равен

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\tilde{\xi}_0^-}{\eta_0} = -\frac{\tilde{\xi} \eta + \tilde{\xi} \tilde{\eta}}{\eta_0^2} = \frac{\eta \tilde{\eta} - \tilde{\xi} \tilde{\xi}}{\eta \tilde{\xi} + \tilde{\xi} \eta} = \frac{k_y}{k_x}. \quad (28)$$

Последнее равенство означает, что луч совпадает с касательной к параболе  $\eta = \eta_0$ , т. е. последняя является каустикой рассматриваемой волны.

Алгебраические преобразования позволяют выделить обычный в геометрической оптике множитель

$\frac{1}{V^2 k R}$  в амплитуде волны:

$$\begin{aligned} \left( \frac{-1}{4k^2 \tilde{\xi}^2 \eta^2} \right)^{\frac{1}{4}} &= \left[ \frac{-(\tilde{\xi} \eta - \tilde{\xi} \tilde{\eta})^2}{4k^2 (R^-)^2 \eta_0^4} \right]^{\frac{1}{4}} = \\ &= \left[ \frac{-[(\tilde{\xi}_0^-)^2 \eta_0^2 + \eta_0^4]}{4k^2 (R^-)^2 \eta_0^4} \right]^{\frac{1}{4}} = \\ &= \left[ \frac{-[(\tilde{\xi}_0^-)^2 + \eta_0^2]}{4k^2 (R^-)^2 \eta_0^2} \right]^{\frac{1}{4}} = \end{aligned}$$

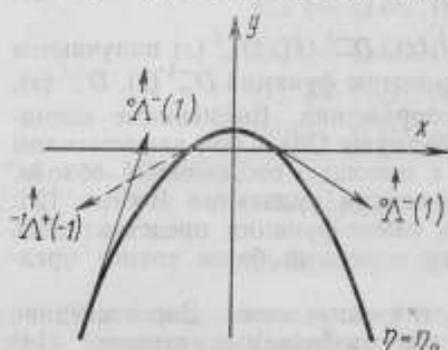


Рис. 3. Компоненты волнового вектора лучей для собственной функции  $D_+^{-1}(\xi) D_-^{-1}(\eta)$ .

$$= \left[ \frac{-[-\eta_0 e(\tilde{\xi}_0^-)]^{\frac{2}{3}}}{4k^2 (R^-)^2 [-\eta_0 e(0)]^{\frac{2}{3}}} \right]^{\frac{1}{4}} = \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{V^2 k R^-} \left[ \frac{e(\tilde{\xi}_0^-)}{e(0)} \right]^{\frac{1}{6}}. \quad (29)$$

Здесь последовательно использовались формулы (8), (5) и (3).

Фазу также можно преобразовать к очевидному, с точки зрения геометрической оптики, виду

$$\Phi = k [R^- + S(\tilde{\xi}_0^-)]. \quad (30)$$

Для этого следует выполнять следующие тождественные преобразования с  $R^-$  и  $S(\tilde{\xi}_0^-)$ :

$$R^- = \frac{\tilde{\xi} \tilde{\eta}}{\eta_0^2} (\eta \tilde{\xi} - \tilde{\xi} \eta) = \eta \tilde{\eta} \left( \frac{\tilde{\xi}^2}{\eta_0^2} + 1 \right) + \tilde{\xi} \tilde{\xi} \left( -\frac{\eta^2}{\eta_0^2} + 1 \right), \quad (31)$$

$$\begin{aligned} S(\tilde{\xi}_0^-) &= \frac{\tilde{\xi}_0^- \sqrt{(\tilde{\xi}_0^-)^2 + \eta_0^2}}{2} + \frac{1}{2} \eta_0^2 \ln \frac{\tilde{\xi}_0^- + \sqrt{(\tilde{\xi}_0^-)^2 + \eta_0^2}}{\eta_0} = \\ &= \frac{(\tilde{\xi} \eta - \tilde{\xi} \tilde{\eta})(\eta \tilde{\xi} - \tilde{\xi} \eta)}{2\eta_0^2} + \frac{1}{2} \eta_0^2 \ln \frac{\tilde{\xi} \eta - \tilde{\xi} \tilde{\eta} + (\eta \tilde{\xi} - \tilde{\xi} \eta)}{\eta_0^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \tilde{\eta} \tilde{\eta} \left( -\frac{\xi^2}{\eta_0^2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\tilde{\xi} \tilde{\eta}}{\eta_0^2} \left( \frac{\eta^2}{\eta_0^2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \eta_0^2 \ln \frac{(\tilde{\xi} + \tilde{\eta}) (\eta - \tilde{\eta})}{\eta_0^2} = \\
&= \tilde{\eta} \tilde{\eta} \left( -\frac{\xi^2}{\eta_0^2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\tilde{\xi} \tilde{\eta}}{\eta_0^2} \left( \frac{\eta^2}{\eta_0^2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \eta_0^2 \ln \frac{\tilde{\xi} + \tilde{\eta}}{\eta + \tilde{\eta}}. \quad (32)
\end{aligned}$$

В преобразовании  $R^-$  использовалась формула (5). Выражение для  $S(\xi_0^-)$  получено путем дополнительного умножения (домножения) на  $\eta_0$  каждого сомножителя в первом члене с последующим использованием формул (4) и (5). Преобразование выражения, стоящего под знаком логарифма, заключалось в домножении его числителя и знаменателя на  $\eta_0$ , в применении формулы (4) для  $\eta_0 \xi_0^-$  и (5) — для преобразования выражения под корнем, а также в перегруппировке членов в числителе и домножении числителя и знаменателя на  $(\eta + \tilde{\eta})$ .

Суммируя правые и левые части уравнений (31) и (32) убеждаемся, что формулы (23) и (30) тождественны. Таким образом, при  $\xi > 0$  искомого асимптотику функции  $D_+^{-1}(\xi) D_-^{-1}(\eta)$  можно представить в физически простом виде

$$D_+^{-1}(\xi) D_-^{-1}(\eta) \sim \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2kR^-}} \left[ \frac{q(\xi_0^-)}{q(0)} \right]^{\frac{1}{6}} e^{ik(S+R^-)}. \quad (33)$$

Множитель  $\left[ \frac{q(\xi_0^-)}{q(0)} \right]^{\frac{1}{6}}$  указывает на то, что амплитуда больше у лучей, оторвавшихся от участков каустики с малой кривизной. Это соответствует росту плотности лучей вблизи таких участков.

#### Асимптотика $D_+^{-1}(\xi) D_-^{-1}(\eta)$ при $\xi < 0$

Если точка наблюдения находится в левой полуплоскости ( $\xi < 0$ ), то сомножитель  $D_+^{-1}(\xi)$ , как указывалось выше, переходит в  $D_+^{-1}(-\xi)$ , и асимптотика рассматриваемого решения получается двучленной

$$\begin{aligned}
D_+^{-1}(\xi) D_-^{-1}(\eta) |_{\xi < 0} &= D_+^{-1}(-\xi) D_-^{-1}(\eta) \sim \left( \frac{1}{4k^2 \tilde{\xi}^2 \tilde{\eta}^2} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \times \\
&\times \left( -\frac{ik \tilde{\xi} \tilde{\eta}}{2} + \frac{ik \eta \tilde{\eta}}{2} + \frac{ik \eta_0^2}{2} \ln \frac{-\tilde{\xi} + \tilde{\eta}}{\eta + \tilde{\eta}} - i \frac{\pi}{2} - \frac{\pi k \eta_0^2}{2} \right) + \\
&+ \left( \frac{1}{4k^2 \tilde{\xi}^2 \tilde{\eta}^2} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[ \frac{ik \tilde{\xi} \tilde{\eta}}{2} + \frac{ik \eta \tilde{\eta}}{2} - \frac{ik \eta_0^2}{2} \ln \frac{(-\tilde{\xi} + \tilde{\eta}) (\eta + \tilde{\eta})}{\eta_0^2} + i \frac{\pi}{4} \right]. \quad (34)
\end{aligned}$$

Аналогично предыдущему можно определить направление соответствующих лучей (см. рис. 3) и выразить асимптотики через геометро-оптические величины. Предыдущая функция тогда приводится к виду:

$$\begin{aligned}
D_+^{-1}(\xi) D_-^{-1}(\eta) |_{\xi < 0} &\sim \frac{e^{-\frac{\pi k \eta_0^2}{2} - i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2kR^+}} \left[ \frac{q(\xi_0)}{q(0)} \right]^{\frac{1}{6}} e^{ik(R^+ - S)} + \\
&+ \frac{e^{+i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2kR^-}} \left[ \frac{q(\xi_0)}{q(0)} \right]^{\frac{1}{6}} e^{ik(R^- + S)}. \quad (35)
\end{aligned}$$

Второй член здесь полностью совпадает с асимптотикой при положительных значениях  $\xi$  (полное совпадение — следствие использования формулы Стирлинга, упомянутое выше). Первый член содержит экспоненциально малый множитель  $e^{-\frac{\pi k \eta_0^2}{2}}$ , т. е. является экспоненциально малым по отношению к второму члену. В других случаях нам встретятся члены, содержащие  $e^{\frac{\pi k \eta_0^2}{2}}$  в различных степенях. Для краткости будем называть лучи, амплитуда которых содержит множитель  $e^{\pm \frac{\pi k \eta_0^2}{2}}$ :

- усиленными, если  $\kappa = 1$ ;
- нормальными, если  $\kappa = 0$ ;
- ослабленными, если  $\kappa = -1$ ;
- двукратно ослабленными, если  $\kappa = -2$  и т. д.

(На рисунках ослабленные лучи будем показывать пунктирной стрелкой, нормальные — сплошной, усиленные — двойной сплошной.)

Таким образом, исследование коротковолновой асимптотики решения в левой полуплоскости показывает, что поле состоит из двух конгруенций лучей, каждая из которых удовлетворяет законам геометрической оптики и для каждой из которых парабола  $\eta = \eta_0$  является односторонней каустикой.

Ослабленные лучи, у которых  $\xi_0 < 0$ , полностью расположены в левой полуплоскости и, очевидно, что они касаются каустики. Ослабленные лучи, у которых  $\xi_0 > 0$ , частично расположены в левой полуплоскости, а частично в правой, где и касаются каустики. Поскольку формально двучленная асимптотика имеется только в левой полуплоскости, возникает вопрос, можно ли продолжить вторую асимптотику в правую полуплоскость. Ответ получается положительным, так как можно воспользоваться для конгруенций ослабленных лучей лучевыми асимптотическими разложениями [5].

#### Сводка лучевых асимптотик решений

Соотношение

$$D_{-}^{\pm 1}(\xi) D_{+}^{\pm 1}(\eta) = [D_{+}^{\mp 1}(\xi) D_{-}^{\mp 1}(\eta)]^* \quad (14)$$

(\* означает комплексное выражение) дает возможность выписать асимптотику решения  $D_{-}^{\pm 1}(\xi) D_{+}^{\pm 1}(\eta)$ . Лучи, соответствующие этому решению, совпадают с лучами, соответствующими решению  $D_{+}^{\mp 1}(\xi) D_{-}^{\mp 1}(\eta)$ , но имеют противоположное направление.

Аналогичные связи имеются и для других пар решений, поэтому ниже дается сводка результатов для четырех основных функций, включая уже рассмотренную.

Если ввести обозначения

$${}^* \Lambda_{+}^{\kappa}(m) = \frac{e^{\kappa \frac{\pi k \eta_0^2}{2} + i \frac{\pi}{4} m}}{\sqrt{2kR^*}} \left[ \frac{q(\xi_0^+)}{q(0)} \right]^{\frac{1}{6}} e^{i(kR^* - s)},$$

$${}^* \Lambda_{-}^{\kappa}(m) = \frac{e^{\kappa \frac{\pi k \eta_0^2}{2} + i \frac{\pi}{4} m}}{\sqrt{2kR^*}} \left[ \frac{q(\xi_0^+)}{q(0)} \right]^{\frac{1}{6}} e^{i\kappa(-R^* + s)},$$

$${}^x\hat{\Lambda}^-(m) \equiv \frac{e^{x \frac{\pi k \eta_0^2}{2} + i \frac{\pi}{4} m} \left[ \frac{q(\xi_0^-)}{q(0)} \right]^{\frac{1}{6}}}{\sqrt{2kR^-}} e^{ik(R^-+S)},$$

$${}^x\hat{\Lambda}^-(m) \equiv \frac{e^{x \frac{\pi k \eta_0^2}{2} + i \frac{\pi}{4} m} \left[ \frac{q(\xi_0^-)}{q(0)} \right]^{\frac{1}{6}}}{\sqrt{2kR^-}} e^{ik(-R^-+S)},$$

то асимптотики решений (14) можно записать так:

$$D_{+}^{-1}(\xi) D_{-}^{-1}(\eta) = {}^0\hat{\Lambda}^-(1) + {}^{-1}\hat{\Lambda}^+(-1)$$

$$D_{+}^{+3}(\xi) D_{-}^{-1}(\eta) = {}^0\hat{\Lambda}^+(1) + {}^{-1}\hat{\Lambda}^-(-1)$$

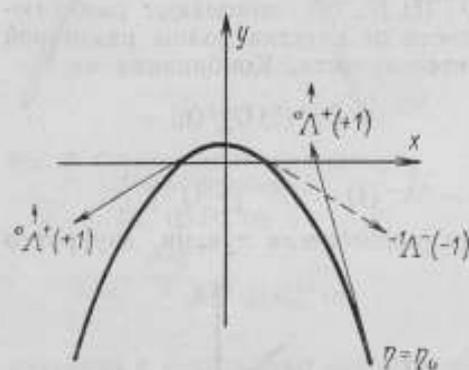


Рис. 4. Системы лучей, соответствующих функции

$$D_{+}^{+3}(\xi) D_{-}^{-1}(\eta).$$

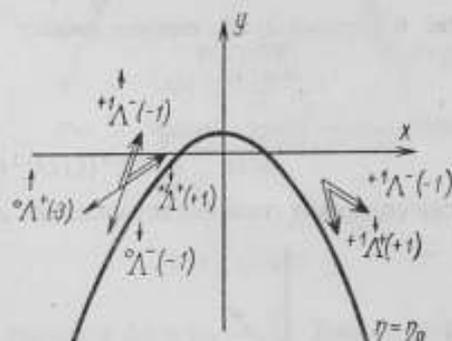


Рис. 5. Системы лучей, соответствующих функции

$$D_{+}^{-1}(\xi) D_{-}^{+3}(\eta).$$

$$D_{+}^{-1}(\xi) D_{-}^{+3}(\eta) = {}^{+1}\hat{\Lambda}^+(1) + {}^{+1}\hat{\Lambda}^-(-1) + {}^0\hat{\Lambda}^+(-3) + {}^0\hat{\Lambda}^-(-1)$$

$$D_{+}^{+3}(\xi) D_{-}^{-1}(\eta) = {}^{+1}\hat{\Lambda}^+(-1) + {}^{+1}\hat{\Lambda}^-(-1) + {}^0\hat{\Lambda}^+(-1) + {}^0\hat{\Lambda}^-(-3).$$

Индекс  $x$  соответствует множителю  $e^{x \frac{\pi k \eta_0^2}{2}}$  и указывает относительную силу луча. Переход к комплексно-сопряженной функции, как видно из обозначений, соответствует перемене направления стрелки и замене знака аргумента. Лучи, соответствующие этим функциям, представлены на рис. 3—6.

Заканчивая рассмотрение асимптотик решения уравнения (9), следует еще раз отметить их характерные черты.

1. Асимптотическое представление каждого решения имеет геометрико-оптический вид с несколькими системами лучей, соответствующими одному решению (14).

2. Амплитуды при экспоненте содержат характерный для геометрической оптики сомножитель расходимости  $(2kR)^{-\frac{1}{2}}$  и характерный для данной задачи множитель  $\left\{ \frac{q(\xi_0)}{q(0)} \right\}^{\frac{1}{6}}$ , соответствующий амплитуде отрывающихся от каустики лучей.

3. Для каждого решения отношение амплитуд ослабленных лучей к нормальным и нормальных к амплитудам усиленных лучей одинаково, если они возникли в одной и той же точке каустики (при одинаковом расстоянии вдоль луча от точки отрыва).

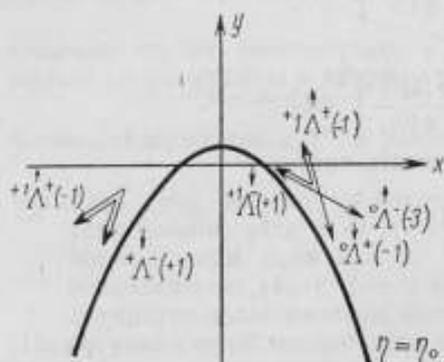


Рис. 6. Системы лучей, соответствующих функции

$$D_{\pm}^{+3}(\xi) D_{\pm}^{+3}(\eta).$$

4. Фаза в точке наблюдения с точностью до аддитивной постоянной определяется набегом фазы (от нуля фазы, соответствующего вершине параболы — каустики, до точки отрыва и по лучу до точки наблюдения).

5. Функции  $D_{\pm}^{-1}(\xi) D_{\pm}^{-1}(\eta)$  и  $D_{\pm}^{+3}(\xi) D_{\pm}^{-1}(\eta)$  описывают разбегающиеся от каустик волны различной интенсивности. Комбинация их

$$D_{\pm}^{-1}(\xi) D_{\pm}^{-1}(\eta) +$$

$$+ ie^{-\frac{\pi k \eta_0^2}{2}} D_{\pm}^{+3}(\xi) D_{\pm}^{-1}(\eta) = {}^0\hat{\Lambda}^{-}(1) + {}^{-2}\hat{\Lambda}^{-}(-1)$$

уже содержит только нормальные лучи (пренебрегая лучами, двукратно

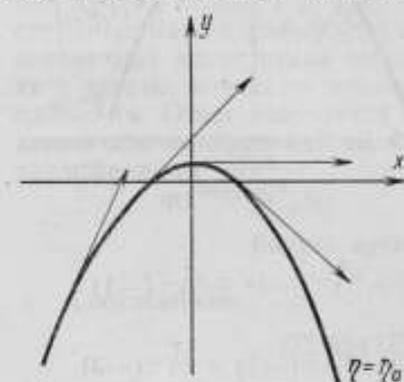


Рис. 7. Системы лучей, соответствующих функции

$$D_{\pm}^{-1}(\xi) D_{\pm}^{-1}(\eta) + ie^{-\frac{\pi k \eta_0^2}{2}} D_{\pm}^{+3}(\xi) D_{\pm}^{-1}(\eta).$$

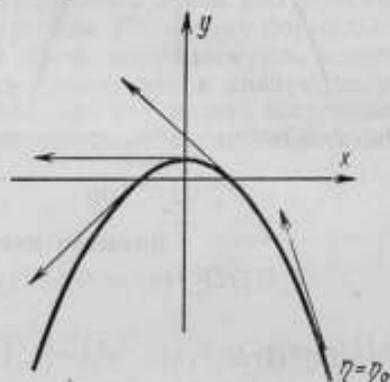


Рис. 8. Системы лучей, соответствующих функции

$$ie^{-\frac{\pi k \eta_0^2}{2}} D_{\pm}^{-1}(\xi) D_{\pm}^{-1}(\eta) + D_{\pm}^{+3}(\xi) D_{\pm}^{-1}(\eta).$$

и большее число раз ослабленными). Их эквивалентами в цилиндрических координатах являются комбинации  $H_m^{(1)}(gr) e^{-im\varphi}$  (рис. 7).

Другая комбинация этих функций

$$ie^{-\frac{\pi k \eta_0^2}{2}} D_{\pm}^{-1}(\xi) D_{\pm}^{-1}(\eta) + D_{\pm}^{+3}(\xi) D_{\pm}^{-1}(\eta) \sim {}^0\hat{\Lambda}^{+}(1)$$

с той же точностью и в том же смысле эквивалентна  $H_m^{(1)}(gr) e^{+im\varphi}$ . Ее лучевая структура показана на рис. 8. Сходящиеся лучи, как уже упоминалось, соответствуют комплексно-сопряженным функциям.

6. Решения  $D_+^{-1}(\xi) D_-^{+3}(\eta)$  и  $D_+^{+3}(\xi) D_-^{-1}(\eta)$  по асимптотическому поведению напоминают решения цилиндрических задач с функциями Бесселя. Для этих решений нормальные и усиленные лучи проходят мимо

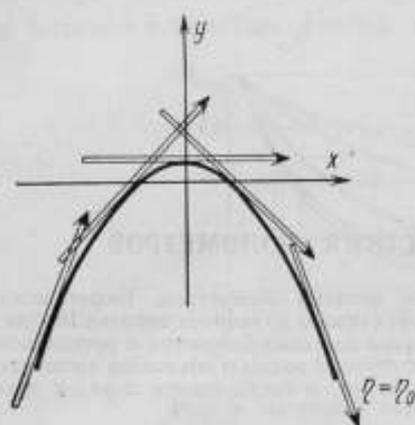


Рис. 9. Системы лучей, соответствующих функции

$$D_+^{-1}(\xi) D_-^{+3}(\eta) + ie^{-\frac{\pi k \eta_0^2}{2}} D_+^{+3}(\xi) D_-^{-1}(\eta).$$

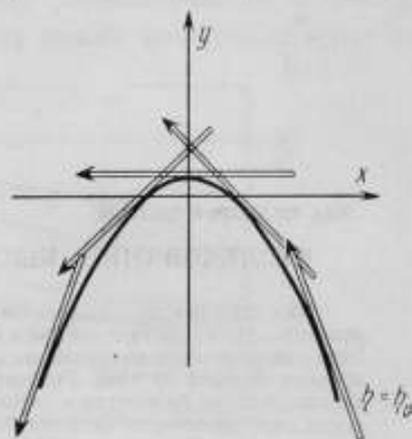


Рис. 10. Системы лучей, соответствующих функции

$$ie^{-\frac{\pi k \eta_0^2}{2}} D_+^{-1}(\xi) D_-^{+3}(\eta) + D_+^{+3}(\xi) D_-^{-1}(\eta).$$

каустики и испытывают характерный скачок в фазе на  $-\frac{\pi}{2}$ . Взяв линейные комбинации их с теми же коэффициентами, что и выше

$$D_+^{-1}(\xi) D_-^{+3}(\eta) + ie^{-\frac{\pi k \eta_0^2}{2}} D_+^{+3}(\xi) D_-^{-1}(\eta)$$

и

$$ie^{-\frac{\pi k \eta_0^2}{2}} D_+^{-1}(\xi) D_-^{+3}(\eta) + D_+^{+3}(\xi) D_-^{-1}(\eta),$$

получим решения уравнения (9), описывающие исключительно усиленные лучи (пренебрегая лучами однократно и более ослабленными). Лучевая структура таких комбинаций показана на рис. 9 и 10. Цилиндрическим аналогом этих решений, как и ранее, являются

$$J_m(gr) e^{-im\varphi} \text{ и } J_m(gr) e^{+im\varphi}$$

соответственно этим рисункам. Заметим, что в таком приближении, указанные аналоги решений с двусторонней каустикой (типа Бесселя) не являются единственными.

#### Литература

1. Хенль Х., Мауэ А., Вестфаль К. Теория дифракции. М., изд-во «Мир», 1964.
2. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа, т. II, М., 1963.
3. Киреева М. Е. и Карпов К. А. Таблицы функций Вебера. Вычислительный центр АН СССР, 1959.
4. Иванов В. И. Дифракция коротких плоских волн на параболическом цилиндре. Журнал вычислительной математики и математической физики, 2, 2, 241—254, 1962.

Статья поступила 3 декабря 1964 г.

УДК 621.317.791 + 535.231.62

## ИССЛЕДОВАНИЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ БОЛОМЕТРОВ

Исследовано предельное быстродействие нитяных болометров. Теоретически показано, что их постоянная времени может быть снижена до величин порядка  $10^{-7}$  сек. Этот вывод экспериментально подтвержден путем создания болометра с постоянной времени порядка  $10^{-6}$  сек. Рассмотрены температурные волны и объяснена частотная характеристика болометра в области низких частот, а также оценен порядок толщины ленточного слоя на болометре.

## Экспериментальное исследование быстродействия болометров в различных средах

Быстродействие болометра характеризуется его тепловой постоянной времени  $\tau$ , зависящей от параметров болометра следующим образом:

$$\tau = \frac{c}{G_d}, \quad (1)$$

где  $c$  — теплоемкость болометра,

$G_d$  — динамический коэффициент болометра, определенный для малых температурных изменений.

Зависимость выходного сигнала болометра  $u_\Omega$  от частоты прерывания  $\Omega$  падающего на него излучения обычно описывается выражением [1]:

$$\frac{u_\Omega}{u_0} = \frac{1}{1 + \Omega^2 \tau^2}, \quad (2)$$

где  $u_0$  — напряжение сигнала частоты  $\Omega = 0$  (или  $\Omega \ll \frac{1}{\tau}$ ). Значение  $\tau$  в соответствии с выражением (2) легко определить исходя из частотной характеристики выходных сигналов болометра.

Полученные нами экспериментальные результаты измерения частотных характеристик болометров в различных средах представлены на рис. 1. Нормировка частотной характеристики приведена к значению выходного сигнала на частоте 50 гц (в широко известных работах [2—3] нормировка приводится к значению сигнала на частоте 100 гц).

Значение сигнала при  $\Omega = 0$  во всех средах оказывалось на 25—35% больше, чем значение сигнала на частоте 50 гц. Из частотных характеристик болометров (рис. 2) видно, что при  $0 < \Omega < 50$  гц наблюдается ярко выраженная зависимость выходного сигнала от частоты, что не следует из равенства (2). Таким образом, быстродействие болометров трудно характеризовать одним параметром  $\tau$ . Можно показать, исходя из данных рис. 1, что это выражение действительно для ограниченной области частотной характеристики при

$$\frac{1}{3\tau} < \Omega < \frac{1}{\tau}. \quad (3)$$

Однако многие экспериментаторы, основываясь на малом значении  $\tau$  (например,  $\tau = 10^{-3} - 10^{-4}$  сек), необоснованно считают, что, если  $\Omega \ll \frac{1}{\tau}$ , то можно измерять амплитуду пульсирующего излучения с высокой точностью, причем калибровку такого измерителя ведут на

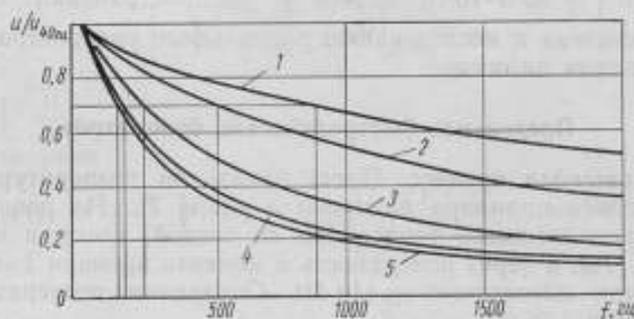


Рис. 1. Частотные характеристики болометров с различными диаметрами нити:  
1 — 1 $\mu$ ; 2 — 1,5 $\mu$ ; 3 — 2 $\mu$ ; 4 — 3 $\mu$ ; 5 — 5 $\mu$ .

постоянном токе ( $\Omega = 0$ ). Выше было указано, что ошибка при таких измерениях может достигать 35%.

Индикацию достаточно больших значений кратковременных импульсных сигналов возможно осуществить, если коэффициент теплоотдачи

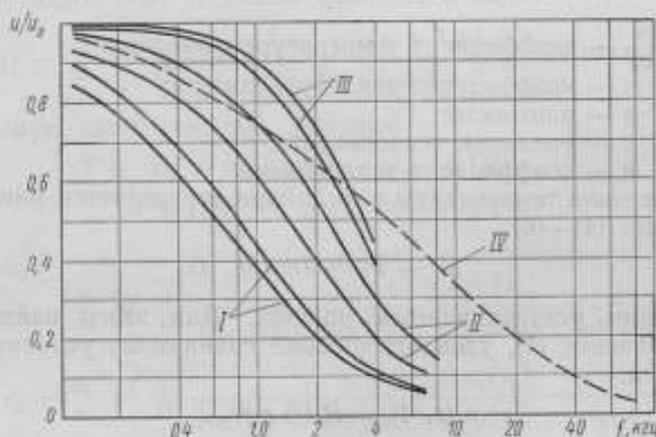


Рис. 2. Частотные характеристики болометров в кварцевой среде ( $t = \frac{r}{T_0}$ ); цифры I—IV — номера болометров.

болометра велик. В качестве среды, которая обеспечивает такое малое быстродействие болометра, нами использовался кварц. Эксперимент проводили следующим образом. Нить платинового болометра зажимали между двумя шлифованными поверхностями кристаллического кварца, «шероховатость» которых не превышала 0,15 $\mu$  (пластины кварца вырезаны перпендикулярно оси  $x$ ). Результаты измерения постоянной времени в кварцевой среде в значительной степени зависят от плоскопараллельности пластин. Полученное минимальное значение было  $\sim 5 \cdot 10^{-6}$  сек.

Причина ограничения быстрого действия болометра при этом эксперименте может заключаться в волновом характере распространения температурного поля внутри нити болометра.

Ввиду того, что отношение длины болометра к его диаметру достаточно велико ( $\frac{l}{d} \approx 3 \cdot 10^3$ ), задача о распространении тепла в нем может быть сведена к исследованию радиального распространения тепла в неограниченном цилиндре.

### Предельное быстрое действие болометров

**Установившийся процесс.** Пусть начальная температура неограниченного круглого цилиндра радиусом  $a$  равна  $T_0$ . На поверхности его происходит конвективный теплообмен со средой, которая имеет ту же температуру ( $T_0$ ), а через поверхность с момента времени  $t = 0$  подается тепловой поток плотностью  $q_0 \sin \Omega t$ . Определим температуру цилиндра  $T(r, t)$  при  $t > 0$ .

Положим  $T - T_0 = u$  и напишем уравнения в комплексной форме. Тогда в полярных координатах получим краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{\chi} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

$$u(r, 0) = 0, \quad (5)$$

$$\left[ \chi \frac{\partial u}{\partial r} + hu \right]_{r=a} = q_0 e^{i\Omega t}. \quad (6)$$

Здесь  $\chi = \frac{\kappa}{c\rho}$  — коэффициент температуропроводности;  
 $\kappa$  — коэффициент теплопроводности;  
 $\rho$  — плотность;  
 $c$  — удельная теплоемкость;  
 $h$  — коэффициент теплообмена.

Распределение температуры в цилиндре определяется мнимой частью решения задач (4)–(6):

$$T - T_0 = \text{Im} u(r, t). \quad (7)$$

Рассмотрим установившийся процесс. Для этого найдем частное решение уравнения (4), удовлетворяющее граничному условию (5), которое имеет вид:

$$u(r, t) = R(r) e^{i\Omega t}. \quad (8)$$

Подставляя выражение (8) в выражение (4) и вводя безразмерную длину

$$z = \sqrt{\frac{\Omega}{\chi}} r, \quad (9)$$

получим уравнение Бесселя

$$\frac{d^2 R}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dR}{dz} + R = 0; \quad \xi = z\sqrt{-i}. \quad (10)$$

Решение этого уравнения, не имеющее особенностей на оси цилиндра, имеет вид

$$R = A I_0(z\sqrt{-i}), \quad (11)$$

где  $I_0$  — функция Бесселя нулевого порядка. Для нахождения постоянной  $A$  подставим

$$u = AI_0(z\sqrt{-i})e^{i\Omega t}$$

в уравнение (6), которое напомним в виде

$$\left[ \kappa \sqrt{\frac{\Omega}{\chi}} \frac{dR}{dz} + hR \right]_{z=z_0} = q_0, \quad (12)$$

где  $z_0 = a \sqrt{\frac{\Omega}{\chi}}$ .

Тогда получим

$$u(r, t) = \frac{q_0}{\kappa} \sqrt{\frac{\chi}{\Omega}} \frac{I_0(z\sqrt{-i})}{I_0(z_0\sqrt{-i}) + \delta_0 I_0(z_0\sqrt{-i})} e^{i\Omega t}, \quad (13)$$

где

$$\delta_0 = \frac{h}{\kappa} \sqrt{\frac{\chi}{\Omega}}. \quad (14)$$

Функция Бесселя от комплексного аргумента выражается через функции Томсона

$$I_0(z\sqrt{-i}) = u_0(z) - iv_0(z), \quad (15)$$

где

$$u_0(z) = \operatorname{ber} z, \quad v_0(z) = -\operatorname{bei} z. \quad (16)$$

Поэтому функцию  $v(r, t)$  можно написать в виде

$$u(r, t) = \frac{q_0}{\kappa} \sqrt{\frac{\chi}{\Omega}} \frac{(u_0' + \delta_0 u_0) + i(v_0' + \delta_0 v_0)}{(u_0' + \delta_0 u_0)^2 + (v_0' + \delta_0 v_0)^2} [u_0(z) - iv_0(z)] e^{i\Omega t}, \quad (17)$$

Найдя мнимую часть решения, получим

$$T - T_0 = (c_1 \cos \Omega t - c_2 \sin \Omega t) u_0(z) + (c_2 \cos \Omega t + c_1 \sin \Omega t) v_0(z), \quad (18)$$

где

$$c_1 = \frac{q_0}{\kappa} \sqrt{\frac{\chi}{\Omega}} \frac{v_0'(z_0) + \delta_0 v_0(z_0)}{[u_0'(z_0) + \delta_0 u_0(z_0)]^2 + [v_0'(z_0) + \delta_0 v_0(z_0)]^2}, \quad (19)$$

$$c_2 = \frac{q_0}{\kappa} \sqrt{\frac{\chi}{\Omega}} \frac{u_0'(z_0) + \delta_0 u_0(z_0)}{[u_0'(z_0) + \delta_0 u_0(z_0)]^2 + [v_0'(z_0) + \delta_0 v_0(z_0)]^2}. \quad (20)$$

Положим

$$c_1 = \frac{q_0}{\kappa D} \sqrt{\frac{\chi}{\Omega}} \cos \gamma; \quad c_2 = \frac{q_0}{\kappa D} \sqrt{\frac{\chi}{\Omega}} \sin \gamma, \quad (21)$$

$$D = \sqrt{[u_0'(z_0) + \delta_0 u_0(z_0)]^2 + [v_0'(z_0) + \delta_0 v_0(z_0)]^2}. \quad (22)$$

Тогда решение можно написать в виде

$$T - T_0 = \frac{q_0}{\kappa D} \sqrt{\frac{\chi}{\Omega}} \left\{ \cos(\Omega t + \gamma) \operatorname{ber} \left( r \sqrt{\frac{\Omega}{\chi}} \right) - \sin(\Omega t + \gamma) \operatorname{bei} \left( r \sqrt{\frac{\Omega}{\chi}} \right) \right\}, \quad (23)$$

**Нагревание цилиндра как целого.** Рассмотрим сначала асимптотическое поведение общего решения (23) при малых значениях  $r \sqrt{\frac{\Omega}{\chi}}$ , т. е. когда

$$r \sqrt{\frac{\Omega}{\chi}} \ll 1. \quad (24)$$

Это решение будет применимо ко всему цилиндру, если радиус его достаточно мал, т. е.

$$a \sqrt{\frac{\Omega}{\chi}} \ll 1. \quad (25)$$

В этом случае, очевидно, цилиндр будет нагреваться как целое.

При  $z \ll 1$  асимптотические выражения функций  $\text{ber } z$  и  $\text{bei } z$  имеют вид [3]

$$u_0 = \text{ber } z = 1 - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \dots, \quad (26)$$

$$-v_0 = \text{bei } z = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{1!} - \dots, \quad (27)$$

Поэтому в первом приближении

$$u_0 = \text{ber } r \sqrt{\frac{\Omega}{\chi}} = 1; \quad -v_0 = \text{bei } r \sqrt{\frac{\Omega}{\chi}} = 0.$$

Полагая в выражении (22)  $u_0(z) = 1$ ,  $u_0'(z) = 0$ ;  $v_0(z_0) = -\frac{1}{4}z_0^2$ ,  $v_0'(z_0) = -\frac{1}{2}z_0 = -\frac{1}{2}a \sqrt{\frac{\Omega}{\chi}}$ , находим

$$T - T_0 = \frac{q_0}{h} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} \frac{a^2 (cQ)^2}{h^2 \Omega^2}}} \cos(\Omega t + \gamma). \quad (28)$$

**Температурные волны.** В случае больших значений  $z$ , когда

$$r \sqrt{\frac{\Omega}{\chi}} \gg 1 \quad (29)$$

асимптотические выражения для  $\text{ber } z$  и  $\text{bei } z$  имеют вид [3]:

$$u_0 = \text{ber } z = \frac{e^{\alpha(z)}}{\sqrt{2\pi z}} \cos \beta(z), \quad (30)$$

$$-v_0 = \text{bei } z = \frac{e^{\alpha(z)}}{\sqrt{2\pi z}} \sin \beta(z), \quad (31)$$

где

$$\alpha(z) = \frac{z}{\sqrt{2}} + \dots, \quad \beta(z) = \frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} + \dots \quad (32)$$

Вычисление коэффициента  $D$  дает

$$D = \sqrt{1 + \delta_0 \sqrt{2} + \delta_0^2} \frac{e^{\alpha a}}{\sqrt{2\pi a \sqrt{\frac{\Omega}{\chi}}}}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{\Omega}{2\chi}}. \quad (33)$$

Фаза  $\gamma$  может быть определена из соотношения

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{c_2}{c_1} = - \frac{u_0'(z_0) + \delta_0 u_0(z_0)}{v_0'(z_0) + \delta_0 v_0(z_0)}.$$

Если  $\delta_0 \ll 1$ , то  $\gamma = \frac{3\pi}{8} - \frac{z_0}{\sqrt{2}}$ . Если, наоборот  $\delta_0 \gg 1$ , то  $\gamma = \frac{5\pi}{8} - \frac{z_0}{\sqrt{2}}$ .

Таким образом, температурная волна может быть написана в виде

$$T - T_0 = \frac{q_0}{\kappa} \sqrt{\frac{\chi a}{\Omega r}} e^{-\alpha(a-r)} \cos[\Omega t - \alpha(a-r) + \beta], \quad (34)$$

где при изменении  $\delta_0$  от 0 до  $\infty$  фаза  $\beta$  изменяется от  $\frac{\pi}{4}$  до  $\frac{\pi}{2}$ .

Фазовая скорость волн

$$v_{\text{ф}} = \frac{\Omega}{\alpha} = \sqrt{2\Omega\chi}. \quad (35)$$

Коэффициент затухания

$$\alpha = \sqrt{\frac{\Omega}{2\chi}}.$$

Найдем условие существования температурных волн. Для этого должно быть  $r \sqrt{\frac{\Omega}{\chi}} \gg 1$ , в частности

$$\alpha \sqrt{\frac{\Omega}{\chi}} \gg 1. \quad (36)$$

Длина температурной волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\Omega}{2\chi}}}. \quad (37)$$

Поэтому условие (35) может быть написано в виде

$$\lambda \ll 2\pi \sqrt{2} a. \quad (38)$$

Физически это означает, что длина температурной волны должна быть гораздо меньше радиуса цилиндра. Это условие очевидное.

Рассмотрим температуру на поверхности цилиндра. Согласно выражению (34) при  $r = a$

$$T - T_0 = \frac{q_0}{\kappa} \sqrt{\frac{\chi}{\Omega}} \frac{1}{\sqrt{1 + \delta_0 \sqrt{2} + \delta_0^2}} \cos(\Omega t + \beta).$$

При этом следует различать два случая:

1. Если  $\delta_0 \gg 1$ , то так как  $\delta_0 = \frac{h}{\kappa} \sqrt{\frac{\chi}{\Omega}}$ , кроме условия существования температурных волн получим еще условие  $\lambda \gg 2\pi \frac{\kappa}{h}$ , откуда

$$2\pi \sqrt{2} \frac{\kappa}{h} \ll \lambda \ll 2\pi \sqrt{2} a. \quad (39)$$

Тогда  $\kappa \delta_0 \sqrt{\frac{\Omega}{\chi}} = h$  и

$$T - T_0 = \frac{q_0}{h} \cos(\Omega t + \beta). \quad (40)$$

В этом случае температура на поверхности цилиндра зависит от коэффициента теплообмена, и амплитудное ее значение  $\frac{q_0}{h}$  равно температуре поверхности при постоянном подводе тепла  $q_0$ .

2. Если  $\delta_0 \ll 1$ , т. е.

$$\lambda \ll 2\pi\sqrt{2}a \quad \text{и} \quad \lambda \ll 2\pi\sqrt{2}\frac{\kappa}{h}, \quad (41)$$

то

$$T - T_0 = \frac{q_0}{\kappa} \sqrt{\frac{\Omega}{\chi}} \cos(\Omega t + \beta). \quad (42)$$

В этом случае температура поверхности не зависит от коэффициента теплоотдачи.

### Обсуждение результатов

1. Выполним численную оценку условия существования температурных волн в платиновом болометре с диаметром  $d = 1,5\mu$ .

Имеем

$$\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\Omega}{2\chi}}} \quad \text{или} \quad F = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{4\pi\chi}{\lambda^2}.$$

Из условия существования температурных волн (37) следует, что частота пульсаций сигнала должна при этом удовлетворять следующему неравенству:

$$F > \frac{2\chi}{\pi d^2} \approx 10^7 \text{ гц} \quad (\chi_{pt} = 0,29 \text{ см}^2/\text{сек}).$$

Таким образом, полученное нами экспериментальное значение быстродействия болометра  $\tau \approx 5 \cdot 10^{-6}$  сек не является предельно возможным. Волновые же процессы действительно ограничивают быстродействие болометра, причем это ограничение в значительной степени зависит от диаметра нити болометра и практически мало зависит от его материала, так как большинство металлов имеют коэффициент температуропроводности одного и того же порядка.

2. Рассмотрим влияние ленгмюровского слоя [4] на частотные характеристики болометра.

Длина температурной волны в воздухе  $\lambda_w$  и ее затухание соответственно равны:

$$\lambda_w = 1,56 \frac{1}{\sqrt{F(\text{гц})}} \text{ см}, \quad \alpha = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\sqrt{F(\text{гц})}}{0,258} \text{ 1/см}.$$

(На расстоянии  $\frac{1}{\alpha}$  волна затухает в  $e$  раз).

При достаточно высоких частотах, длина волны которых примерно равна ленгмюровскому слою или меньше его теплообмен болометра с окружающей средой осуществляется за счет теплопроводности этого слоя. При этом конвективный обмен ленгмюровского слоя с окружающей средой определяет стационарную температуру болометра.

Далее, с понижением частоты пульсаций температуры все больший объем (близлежащие к поверхности болометра слои) будет пульсировать синфазно с температурой нити болометра. А при весьма низких частотах температура всего ленгмюровского слоя будет пульсировать синфазно с температурой болометра. Тепловая постоянная тела пропорциональна его массе, а при заданной плотности — его объему, и обратно пропорцио-

нальна поверхности. В рассматриваемом случае можно считать, что отношение массы синфазно пульсирующей части ленгмюровского слоя к его поверхности с увеличением радиуса этого слоя линейно возрастает. Это означает, что тепловая постоянная такого слоя с увеличением толщины части слоя возрастает, т. е. с понижением частоты пульсаций к массе болометра добавляется все большая масса синфазно с ним колеблющегося слоя среды. Этим фактом, по-видимому, можно объяснить частотную характеристику болометров в области частот  $\Omega < \frac{1}{3\tau}$ . Это подтверждает и тот факт, что при нормировке частотной характеристики болометра к значению сигнала на частоте 100 гц значение ее близко к получающемуся из выражения (2).

Поэтому можно считать, что затухание температурной волны при 100 гц характеризует толщину ленгмюровского слоя:

$$r_{\lambda} = \frac{1}{\alpha_{100 \text{ гц}}} \approx 0,25 \text{ мм.}$$

3. Рассмотрение волнового процесса распространения температурных волн вне болометра позволяет дать некоторые рекомендации для правильного его конструирования. В частности, желательно, чтобы диаметр баллона питающего болометра был несколько меньшим диаметра ленгмюровского слоя, а теплопроводность материала баллона — близка к теплопроводности воздуха. Разработки в этом направлении удобно вести, руководствуясь следующими значениями длины температурных волн и расстояний  $S$ , на которых происходит ослабление волн в  $e$  раз:

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\kappa}{c\rho F}} = a \frac{1}{\sqrt{F \text{ гц}}} \text{ см, } S = \frac{a}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{F}} \text{ см.}$$

Среда	$a$	$S$
Воздух	1,56	0,25
Гелий	3,40	0,53
Медь	2,68	0,43
Платина	1,24	0,20
Кварц:		
кристаллический	0,47	0,075
плавленный	0,27	0,043
Стекло	0,17	0,027

#### Литература

1. Техника измерений на сантиметровых волнах, ч. 2. Советское Радио, М., 1949.
2. Гинзтон Э. Л. Измерения на сантиметровых волнах, М., И. Л., 1960.
3. Градштейн И. С. и Рыжик И. М. Таблицы интервалов, сумм, рядов и произведений, ГИФМЛ, М., 1962, стр. 998.
4. Corlin H. I., Sucher M. Proc. IRE 40, Sept. 1952.

Статья поступила 28 января 1965 г.

УДК 621.317.6

### ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ТОНКОПЛЕНОЧНЫХ ВОЛНОВОДНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассмотрены вопросы согласования болометрических головок в прямоугольном волноводе с различными пленочными элементами: простым пленочным болометром, сложным болометром и болометром-термистором, а также распределения температуры вдоль пленки в волноводе при нагревании ее током с. в. ч. и постоянным током.

Показано, что тонкая металлическая пленка может быть использована для подавления поля волны  $E_{01}$  в предельном аттенуаторе.

В технике с. в. ч. широко используются различные устройства с пленочными элементами.

В настоящей работе исследуются некоторые свойства пленок в волноводе: коэффициент отражения пленкой основной волны  $H_{01}$  в прямоугольном волноводе, его зависимость от параметров пленки, волновода, волны; коэффициент отражения сложной трехслойной пленки, используемой в болометрических головках; распределение температуры вдоль пленки в волноводе при нагревании ее постоянным током и током с. в. ч. Рассмотрена также возможность использования пленки в качестве фильтра в круглом волноводе.

#### Согласование пленочного болометра с прямоугольным волноводом

Рассмотрим следующую конструкцию болометрической головки (рис. 1).

Прямоугольный волновод в плоскости  $z = l$  закорачивается идеально проводящим поршнем. В плоскости  $z = 0$  в середине волновода помещается металлическая пленка, ширина которой  $s$ , а толщина  $d$  в десятки раз меньше толщины скин-слоя  $\delta$ . Металлическая пленка нанесена на подложку — тонкую диэлектрическую пластинку.

Рассчитаем коэффициент отражения болометрической головки в зависимости от параметров пленки (проводимости, ширины и толщины), от длины волны и расстояния пленки от поршня. При этом предположим, что:

- 1) индуктивной составляющей сопротивления пленки по сравнению с активной составляющей можно пренебречь;
- 2) сопротивление болометра, когда толщина пленки намного меньше толщины скин-слоя, в рассматриваемом диапазоне практически не зависит от частоты;
- 3) влиянием диэлектрической подложки вследствие малой ее толщины и малой комплексной диэлектрической проницаемости можно пренебречь, как было показано в работах [3, 4];

4) расстояние  $l$  от пленки до поршня остается постоянным, равным четверти длины некоторой средней волны в волноводе.

Чтобы определить коэффициент отражения болометрической головки, т. е. короткозамкнутого отрезка волновода с пленкой, рассчитаем коэффициент отражения пленки в волноводе бесконечной длины.

Пусть на пленку падает волна  $H_{01}$ . Тогда

$$E_x = e^{-i\gamma z} \cdot \sin \frac{\pi y}{a}, \quad (1)$$

где

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (2)$$

Тогда в пленке индуцируется ток  $I$

$$I = \int_{\frac{a-s}{2}}^{\frac{a+s}{2}} \int_0^d \sigma E_{\text{пл. } x}(y, z) dy dz, \quad (3)$$

где  $\sigma$  — проводимость тонкой пленки.

$E_{\text{пл. } x}$  — поле, прошедшее в пленку.

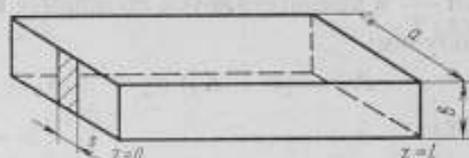


Рис. 1. Схема болометрической головки.

Так как  $d \ll \delta$ , то можно считать, что по толщине пленки, т. е. в зависимости от  $z$ , ток  $I$  постоянен. Условие непрерывности на поверхности пленки тангенциальной компоненты электрического поля может быть записано в виде:

$$E_{\text{пл. } x}(z) = E_{\text{пл. } x}(0) = E_{\text{взл. } x}(0) + E_{\text{отл. } x}(0), \quad (4)$$

где  $E_{\text{взл. } x}(0)$  — поле, излученное пленкой под действием падающей волны, в плоскости  $z = 0$ . Очевидно, что  $E_{\text{взл. } x}$  можно представить в виде ряда  $H$ -волн:

$$E_{\text{взл. } x} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n y}{a} e^{-\Gamma_n |z|}. \quad (5)$$

Вследствие того, что толщина металлической пленки намного меньше толщины скин-слоя, а проводимость ее очень велика, поле излучения пленки может быть определено приближенно как поле излучения плоского тока [1]:

$$E_{\text{взл. } x} = -\frac{120\pi k}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n y}{a} \cdot \frac{e^{-\Gamma_n |z|}}{\Gamma_n} \int_{\frac{a-s}{2}}^{\frac{a+s}{2}} I(y) \sin \frac{\pi n y}{a} dy, \quad (6)$$

$$\Gamma_n = \sqrt{k^2 - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}}. \quad (7)$$

Ток определяется по формулам (3) и (4), где  $E_{\text{взл. } x}$  представляется в виде ряда (5).

$$\begin{aligned} I(\eta) &= \sigma d [E_{\text{пл. } x}(0, y_1) + E_{\text{взл. } x}(0, y_1)] = \\ &= \sigma d \left[ \sin \frac{\pi y_1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n y_1}{a} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Следовательно поле, излученное пленкой, определяется выражением

$$E_{\text{изл. } x} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n y}{a} e^{-i\Gamma_n |z|} =$$

$$= -\frac{120\pi k}{a} \sum \sin \frac{\pi n y}{a} \cdot \frac{e^{-i\Gamma_n |z|}}{\Gamma_n} \int_{\frac{a-s}{2}}^{\frac{a+s}{2}} \left[ \sin \frac{\pi y_1}{a} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{\pi m y_1}{a} \right] \sin \frac{\pi n y_1}{a} dy_1. \quad (9)$$

Определим  $A_1$ . Для этого умножим обе части соотношения (9) на  $\sin \frac{\pi y}{a}$  и проинтегрируем по ширине волновода от нуля до  $a$ . В результате получим:

$$A_1 = (1 + A_1) \alpha_1 + A_3 \alpha_2 + \dots + A_{2m+1} \alpha_{m+1} + \dots, \quad (10)$$

где

$$\alpha_1 = -\frac{120\pi \sigma ds}{a \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4a^2}}} \left( 1 + \frac{a}{\pi s} \sin \frac{\pi s}{a} \right) = -\frac{60\pi b \left( 1 + \frac{a}{\pi s} \sin \frac{\pi s}{a} \right)}{ra \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4a^2}}}; \quad (11)$$

$$\left( r - \text{сопротивление пленки: } r = \frac{b}{\sigma ds} \right), \quad (12)$$

$$\alpha_2 = \frac{60b}{sr} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4a^2}}} \left( \sin \frac{\pi s}{a} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi s}{a} \right);$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\alpha_{m+1} = \frac{60b}{sr} \cdot \frac{(-1)^m}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4a^2}}} \left[ \frac{1}{m} \sin \frac{\pi m s}{a} + \frac{1}{m+1} \sin \frac{(m+1)\pi s}{a} \right]. \quad (13)$$

В первом приближении можем считать, что

$$A_1 = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1}, \quad (14)$$

где  $A_1 = \rho$  — коэффициент отражения пленки в бесконечном волноводе.

Определим поле прошедшей за пленку волны  $E_{\text{пр. } x}$ . В первом приближении оно может рассматриваться как сумма поля падающей волны и основной гармоники поля, излученного пленкой:

$$E_{\text{пр. } x} = T \sin \frac{\pi y}{a} e^{-i\gamma z} = E_{\text{пад. } x} + E_{\text{изл. } x} = (1 + \rho) \sin \frac{\pi y}{a} e^{-i\gamma z}. \quad (15)$$

Следовательно, коэффициент ослабления:

$$T = 1 + \rho. \quad (16)$$

Волна  $E_{\text{пр. } x}$ , отразившись от поршня, возвращается к пленке, вызывая в ней дополнительный ток, который также излучает поле. Таким образом, от пленки в волновод распространяется вторично отраженная волна:

$$E_{\text{отр. } x}^{(2)} = -T^2 e^{-i\gamma 2l} \sin \frac{\pi y}{a}. \quad (17)$$

По направлению к поршню распространяется волна  $E_{пр. x}^{(2)}$ :

$$E_{пр. x}^{(2)} = -\rho T e^{-i\gamma z} \sin \frac{\pi y}{a}. \quad (18)$$

Эта волна снова отразится от поршня и т. д.

Предполагалось, что  $l = \frac{\lambda_{ог}}{4}$ , где  $\lambda_{ог}$  — длина определенной средней волны в волноводе.

$$\lambda_{ог} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \frac{\lambda_0^2}{4a^2}}}. \quad (19)$$

Пусть в волноводе распространяется волна, длина которой  $\lambda_g$ . Введем обозначение  $\Delta$ :

$$\Delta = \lambda_{ог} - \lambda_g. \quad (20)$$

Тогда

$$e^{-i\gamma z} = -e^{-i\gamma \frac{\Delta}{2}}. \quad (21)$$

В результате получим ряд отраженных головкой волн

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_{отр. x}^{(n)} = \left\{ \rho + T^2 e^{-i\gamma \frac{\Delta}{2}} \left( 1 + \rho e^{-i\gamma \frac{\Delta}{2}} + \rho^2 e^{-i\gamma \Delta} + \dots \right) \right\} \sin \frac{\pi y}{a} e^{-i\gamma z}. \quad (22)$$

Отсюда получаем следующее выражение для коэффициента отражения болометрической головки:

$$\Gamma = \rho + \frac{T^2 e^{-i\gamma \frac{\Delta}{2}}}{1 - \rho e^{-i\gamma \frac{\Delta}{2}}}. \quad (23)$$

Разделив действительную и мнимую части равенства, получим выражение для  $|\Gamma|$  в удобном для расчетов виде:

$$|\Gamma| = \sqrt{|\rho|^2 - \frac{(1 - |\rho|^2) \left[ 2\rho \left( 1 + \cos \gamma \frac{\Delta}{2} \right) - 1 + |\rho|^2 \right]}{1 + |\rho|^2 + 2|\rho| \cos \gamma \frac{\Delta}{2}}}, \quad (24)$$

где  $\rho = A_1$  определяется формулами (14) и (11);

$$\gamma \frac{\Delta}{2} = \pi \left( 1 - \frac{\lambda_{ог}}{\lambda_g} \right). \quad (25)$$

Отсюда

$$\text{к. с. в. н.} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}. \quad (26)$$

Пользуясь полученной формулой, кроме определения к. с. в. н. ( $\lambda$ ) для болометрической головки с заданными параметрами, можно также рассчитать сопротивление  $r_m$ , при котором при заданной длине волны  $\lambda_0$  отражения практически нет. Кроме того, легко могут быть определены наилучшие значения  $l$  — расстояния от пленки до поршня. Определим, прежде всего, сопротивление болометра, у которого при  $\Delta = 0$   $|\Gamma| = 0$ .

Из формулы (23) получим условие  $1 - 3|q| = 0$ , откуда следует  $\alpha_1 = 0,5$ . Следовательно, сопротивление  $r_m$  определится соотношением:

$$r_m \approx \frac{120\pi b}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4a^2}}} \cdot \left(1 + \frac{a}{\pi s} \sin \frac{\pi s}{a}\right). \quad (27)$$

Обычно для того, чтобы болометрический элемент был достаточно чувствительным, пленки выбирают узкими, так что

$$s \ll a.$$

Отсюда

$$r_m \approx \frac{240\pi b}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4a^2}}}. \quad (28)$$

Строго говоря, при этом значении сопротивления  $|\Gamma| \neq 0$ , так как всегда помимо активного сопротивления имеется, хотя и малая, индуктивная составляющая сопротивления (однако ею мы пренебрегали при решении

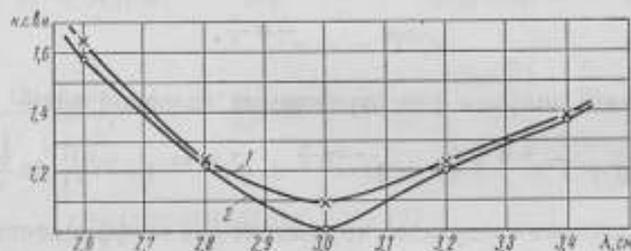


Рис. 2. Зависимости к. с. в. н. =  $f(\lambda)$ :

1 — экспериментальная кривая; 2 — теоретическая кривая.

задачи). Полученный в формуле (28) результат численно совпадает с результатом, приводимым О. Н. Бадаевой [3, 4].

При  $\Delta = 0$  к. с. в. н. минимально, при  $|\Delta| > 0$  к. с. в. н. растет с ростом  $|\Delta|$ . Поэтому приближенно  $\lambda_0$  выбирается как средняя точка рассматриваемого диапазона. Следовательно,

$$l = \frac{1}{4} \cdot \frac{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}{4a}\right)^2}}, \quad (29)$$

где  $\lambda_{\max}$  и  $\lambda_{\min}$  — соответственно наибольшая и наименьшая длины волн рассматриваемого диапазона.

Результаты расчета сравнивали с экспериментальными данными. Как видно из рис. 2, теоретическая и экспериментальная кривые практически совпадают во всем диапазоне, за исключением области значения  $\lambda = \lambda_0$ . В этом случае, очевидно, необходим учет коэффициентов  $A_3$ ,  $A_5$  и т. д., а также учет индуктивной составляющей сопротивления.

Расчет подтверждает, что ненастраиваемые головки по высокочастотным параметрам не уступают головкам с подстройкой поршнем, известным ранее, выгодно отличаясь от них простотой изготовления, удобством и устойчивостью в работе. Были получены значения сопротивления, ширины пленки и длин резонаторных камер, при которых к. с. в. н. не превышал 1,5. Результаты эксперимента хорошо совпали с расчетными данными.

### Согласование трехслойного болометра с волноводом

Рассмотрим болометрическую головку, в которой вместо одной металлической пленки используется система, состоящая из трех слоев (рис. 3): металлической пленки проводимостью  $\sigma_1$ , толщиной  $d_1$  и с коэффициентом отражения  $\rho_1$ ; диэлектрического слоя (слода, стекло) проницаемостью  $\epsilon_2$ , толщиной  $d_2$  и с коэффициентом отражения  $\rho_2$ ; полупроводящей пленки толщиной  $d_3$ , которую будем рассматривать как обладающую проводимостью  $\sigma_3$  и коэффициентом отражения  $\rho_3$ .

В этом случае пленка наносится на подложку с двух сторон: металлическая с одной стороны, полупроводниковая — с другой. Оценим изменение к. с. в. н., вызванное добавлением слоев II и III, причем

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} \approx 5-8; \quad d_1 \approx 0,05\mu;$$

$$d_2 \approx 10-20\mu; \quad d_3 \approx 1\mu.$$

Так как толщина пленки  $d_1$  очень мала, то

$$\begin{aligned} E_{\text{пл. } x}(z) &= E_{\text{пл. } x}(0) = \\ &= E_{\text{пад. } x}(0) + E_{\text{отр. } x}(0) = \\ &= E_{\text{пл. } x}(d_1). \end{aligned} \quad (30)$$

Следовательно, на слой II «падает» основная волна с напряженностью поля  $(1 + \rho_1) \sin \frac{\pi x}{a} \cdot e^{-ik_1 d_1}$  и сумма волн высших типов составляет  $\sum E_{1n}$ . Под действием этого поля слой II излучает сумму волн, поле которых

$$E_2 = (1 + \rho_1) \rho_2 \sin \frac{\pi x}{a} e^{-ik_1(z+d_1)} + \sum E_{1n}. \quad (31)$$

Аналогично рассматривается поле на поверхности слоев II—III.

В дальнейшем будет показано, что отбрасывание волн высших типов не вносит значительной ошибки в определение полей волн, излучаемых слоями. Предположим, что волны высших типов можно не учитывать. Тогда поля волн, излучаемых слоями, пропорциональны полям падающих волн. При этих предположениях определим поле, отраженное трехслойной пленкой.

Слой I излучает волну с полем  $\rho_1 E_0$ ; слой II — с полем  $(1 + \rho_1) \rho_1 E_0$ .

На границе слоев II—III поле складывается из поля волны, «падающей» на слой II, и волны, излученной слоем II, т. е.

$$(1 + \rho_1) E_0 + (1 + \rho_1) \rho_2 E_0. \quad (32)$$

Следовательно, слой III излучает поле  $E_3$ :

$$E_3 = \rho_3 [(1 + \rho_1) + \rho_2 (1 + \rho_1)] E_0. \quad (33)$$

Продолжая подобное рассмотрение, получим следующее выражение для коэффициента отражения трехслойной пленки:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_1 + (1 + \rho_1) \rho_2 + (1 + \rho_1) \rho_2 \rho_1 + [(1 + \rho_1) + \\ &+ \rho_2 (1 + \rho_1)] \rho_3 + (1 + \rho_1) (1 + \rho_2) \rho_2 \rho_3 + \\ &+ (1 + \rho_1) (1 + \rho_2) \rho_1 \rho_3 + \dots \end{aligned} \quad (34)$$

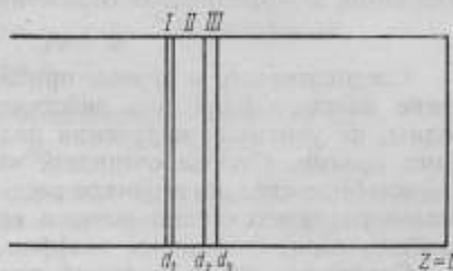


Рис. 3. Схема расположения сложного болометра в волноводов  
 $(E_0 = \sin \frac{\pi x}{a} \cdot e^{-ikz})$ .

Очевидно, что следует учитывать лишь разности фаз, входящие в определение  $Q_i$ , связанные с «отражением» от слоя с другими параметрами. Разности фаз, обусловленные зависимостью поля от координаты  $z$ , пренебрежимо малы, так как

$$\frac{d_1 + d_2 + d_3}{\lambda} \approx 10^{-3}.$$

Величины  $Q_i$  малы, наибольшее значение имеет  $Q_1$  — отражение от хорошего проводника ( $Q_1 \approx 0,3$ ). Коэффициент отражения от диэлектрического и полупроводникового слоев значительно меньше. Поэтому, решая задачу приближенно, мы можем отбросить все слагаемые, в которые входят произведения коэффициентов отражения. Тогда

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3. \quad (35)$$

Следовательно, в первом приближении достаточно рассмотреть излучение каждого слоя под действием распространяющейся в волноводе волны, не учитывая излучения под действием полей, излучаемых соседними слоями. Отсюда очевидно, что отбрасывание волн высших типов, как это было сделано в начале рассмотрения, законно. Итак, коэффициент отражения трехслойной пленки есть сумма коэффициентов отражения каждого слоя. Определим коэффициенты отражения каждого слоя.

Отражение от проводящей пленки нами уже рассматривалось, оно определяется коэффициентом отражения  $Q_1$ :

$$Q_1 = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1},$$

где

$$\alpha_1 = \frac{-120\pi\sigma_1 d_1 s}{a \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4a^2}}} = \frac{-120\pi b}{r_1 a \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4a^2}}};$$

$\sigma_1$  — проводимость пленки;

$r_1$  — сопротивление пленки;

$\lambda$  — длина распространяющейся волны.

Определим  $Q_2$ . Под действием падающей волны в слое возникает ток смещения:

$$j = i\omega (\epsilon_2 - \epsilon_0) E_0.$$

Пользуясь формулой Левина [1] для поля излучения плоского тока, расчет коэффициента отражения проведем аналогично расчету коэффициента отражения металлической пленки. В результате получим значение  $Q_2$

$$Q_2 = \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2}, \quad \alpha_2 = -\frac{120\pi i \omega (\epsilon_2 - \epsilon_0) d_2}{a \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4a^2}}}. \quad (36)$$

Сравним  $\alpha_2$  и  $\alpha_1$

$$\left| \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right| = \frac{\omega (\epsilon_2 - \epsilon_0) d_2 s r_1}{b} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{r_1}{b} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} d_2 \left( \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} - 1 \right). \quad (37)$$

Подставим практически используемые значения величин, входящих в формулы:

$$\lambda = 3 \text{ см}, \quad \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = 2,65 \cdot 10^{-3} \text{ МО}, \quad \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} \approx 5-8,$$

$$r_1 = 400 \text{ ом}, \quad d_2 \approx 10^{-3} \text{ см}, \quad s = 0,3 \text{ см}.$$

Тогда  $\left| \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right| \approx 0,003$ . Отсюда

$$|\alpha_2| \approx 0,0015; |\varrho_2| \approx 0,0015 \approx 0,5\% \varrho_1.$$

Очевидно, что значением  $\varrho_2$  можно пренебречь.

Определим  $\varrho_3$ . Рассмотрим слой III как проводящий с проводимостью  $\sigma_3$  (или сопротивлением  $r_3$ ). Проводя расчет аналогично расчету  $\varrho_1$ , получим:

$$\varrho_3 = \frac{\alpha_3}{1 - \alpha_3}; \quad \alpha_3 = -\frac{120\pi b}{r_3 a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4a^2}}}. \quad (38)$$

Так как  $\sigma_3 \ll \sigma_1$ , то сопротивление  $r_3 \gg r_1$ . Следовательно,

$$\varrho = \varrho_1 + \varrho_3, \text{ где } \varrho_3 \ll \varrho_1.$$

Рассматривая  $\varrho_3$  как изменение коэффициента отражения  $\varrho_1$

$$\varrho = \varrho_1 + d\varrho,$$

и оценивая максимально допустимые значения  $d\varrho$ , при которых изменение к. с. в. н. болометрической головки не превышает определенного значения  $\delta$ , определим  $r_3$ .

Как известно, к. с. в. н. болометрической головки определяется выражением

$$\text{к. с. в. н.} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|},$$

где  $|\Gamma|$  — модуль коэффициента отражения болометрической головки.

Для болометрической головки с металлическим болометром предположив, что  $\varrho$  действительно, можно записать:

$$|\Gamma| = \sqrt{|\varrho|^2 - \frac{(1 - |\varrho|)^2 \left[ 2|\varrho| \left( 1 + \cos \gamma \frac{\Delta}{2} \right) - 1 + |\varrho|^2 \right]}{1 + 2|\varrho| \cos \gamma \frac{\Delta}{2} + |\varrho|^2}}. \quad (39)$$

Продифференцировав это выражение, получим:

$$d(\text{к. с. в. н.}) = \frac{2d|\Gamma|}{(1 - |\Gamma|)^2} = \delta_0; \quad (40)$$

$$d|\Gamma| = \frac{d|\varrho|}{|\Gamma|} 2 \left( 1 + \cos \gamma \frac{\Delta}{2} \right) \frac{1 - 2|\varrho| - |\varrho|^2 \left( 1 + 2 \cos \gamma \frac{\Delta}{2} \right)}{\left( 1 + 2|\varrho| \cos \gamma \frac{\Delta}{2} + |\varrho|^2 \right)^2}. \quad (41)$$

Отсюда

$$d|\varrho| < \delta_0 |\Gamma| (1 - |\Gamma|)^2 \frac{\left( 1 + 2|\varrho| \cos \gamma \frac{\Delta}{2} + |\varrho|^2 \right)^2}{4 \left( 1 + \cos \gamma \frac{\Delta}{2} \right) \left[ 1 - 2|\varrho| - |\varrho|^2 \left( 1 + 2 \cos \gamma \frac{\Delta}{2} \right) \right]}. \quad (42)$$

Предположим, что волны, отражаемые слоями I и III, практически одинаково меняют фазу:

$$\varrho_1 \approx |\varrho_1| e^{i\varphi}; \quad \varrho_3 \approx |\varrho_3| e^{i\varphi}. \quad (43)$$

Тогда

$$|\varrho| = |\varrho_1| + |\varrho_3| = |\varrho_1| + d|\varrho_1|. \quad (44)$$

Очевидно, что  $r_a$ , определенное формулами (38), (42) и (44), будет функцией длины волны. Вычисления показали, что для того, чтобы в диапазоне 2,6—3,6 см, перекрываемом болометрической головкой с двумя сменными резонаторными камерами, к. с. в. н. при добавлении полупроводниковой пленки не ухудшилось более чем на 0,15, сопротивление  $r_a$  должно быть не менее 6000 ом. При этом в большей части диапазона (2,6—3,2 см)  $d$  (к. с. в. н.) будет менее 0,1.

Пользуясь полученными формулами, можно, несколько изменив сопротивление  $r_1$ , добиться того, что к. с. в. н. практически не ухудшится при добавлении полупроводникового слоя с сопротивлением менее 6000 ом.

### Согласование болометра-термистора с прямоугольным волноводом

Для измерения мощности с. в. ч. применяются болометры-термисторы, схема расположения которых в волноводе приведена на рис. 4. Определим отражение этой системы.

Система состоит из металлической пленки шириной  $s$  и металлической проволоки радиусом  $r$ . Пленка и проволока практически находятся в одной плоскости.

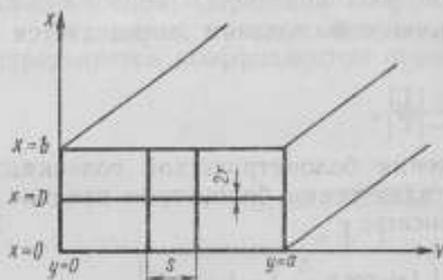


Рис. 4. Схема расположения «болометра-термистора» в болометрической головке.

Полное отражение является суммой отражений пленки и проволоки. Отражение пленки рассмотрено. Определим отражение проволоки.

В работе [1] рассматривается задача об идеально проводящем стержне радиусом  $r$ . В настоящей задаче проводимость  $\sigma$ , строго говоря, не является бесконечной величиной. Но так как проволока металлическая и, следовательно,  $\sigma$  велика, можем для оценки величины отражения использовать результат, полученный Левиным.

Пусть стержень расположен посередине волновода, т. е.

$$D = \frac{b}{2}.$$

Тогда выражение для коэффициента отражения  $\rho$  от стержня в волноводе имеет следующий вид (1):

$$\rho = -\frac{1}{2} ik' M - \frac{1}{2} L k'^2 + \frac{1}{2} N k'^2, \quad (45)$$

где

$$M \approx \frac{2\pi r^2}{b} \left( 1 - \frac{7k'^2 r^2}{8} - \frac{1}{2} k'^2 r^2 \ln \frac{2\pi r}{b} + \frac{\pi^2 r^2}{b^2} - \frac{i\pi k' r^2}{b} \right), \quad (46)$$

$$L \approx -\frac{ik' \pi r^4}{2b}, \quad (47)$$

$$N \approx -\frac{i\pi r^2}{k'b} \left( 1 + \frac{k'^2 r^2}{8} + \frac{1}{2} k'^2 r^2 \ln \frac{2\pi r}{b} + ik' \frac{\pi r^2}{2b} \right). \quad (48)$$

В рассматриваемой задаче  $r = 10 \mu$  ( $10^{-3}$  см),  $\lambda = 3$  см,  $b = 1$  см. Так как все слагаемые в формуле (45) пропорциональны второй и более высоким степеням радиуса, а радиус очень мал, то отражение от проволоки практически равно нулю ( $\rho \approx 10^{-9}$ ). Для практики интересен случай, когда проволока несколько сместится от симметричного положения. На сколько изменится в этом случае величина отражения? Чтобы воспользоваться имеющимся решением, оценим максимальный радиус проволоки, от которой практически не происходит отражения.

Расчет по формуле (45) показывает, что даже при  $r = 0,1$  мм  $\rho \approx 10^{-3}$ , т. е. к. с. в. н.  $\approx 1,002$ , так что можно утверждать, что при смещении проволоки на  $\Delta D < 0,1$  мм заметного отражения не будет. Таким образом, степень отражения от системы, изображенной на рис. 3, зависит только от пленки.

**Расчет распределения температуры вдоль пленки  
в волноводе при нагревании ее постоянным током  
и током с. в. ч.**

При измерении мощности волны, распространяющейся в волноводе, с помощью пленочного болометра используется метод замещения. Математически этот метод может быть сформулирован следующим образом:

$$\int_0^v \Delta r_{\text{н}}(v) dv = \int_0^v \Delta r_{\text{с. в. ч.}}(v) dv, \quad (49)$$

где  $\Delta r_{\text{н}}(v)$  — функция изменения сопротивления единицы объема постоянному току при поглощении постоянного тока;

$\Delta r_{\text{с. в. ч.}}(v)$  — функция изменения сопротивления единицы объема постоянному току при поглощении с. в. ч.-мощности.

Но равенство изменений сопротивлений не означает, что равны сравниваемые мощности. Они будут равны, если распределение мощности постоянного тока и с. в. ч.-мощности одинаково вдоль пленки. Было показано [2], однако, что метод замещения может быть использован, если выполняются следующие условия:

$$T_{\text{пл}}(x, y) = M\rho(x, y), \quad (50)$$

где  $M(x, y) = \text{const}$ ;

$\rho(x, y)$  — мощность с. в. ч. или постоянного тока, поглощаемая единицей поверхности;

$T_{\text{пл}}(x, y)$  — температура поверхности пленки.

В случае измерения мощности с. в. ч. с помощью терморезистора также используется метод замещения. Однако в этом случае метод замещения будет верен, если температура в месте спая будет одинакова при поглощении с. в. ч.-мощности и мощности постоянного тока. Следовательно, необходимо знать закон распределения температуры вдоль пленки при нагревании ее постоянным и высокочастотным токами.

В работе [5] рассчитывается температурное поле пленки, полностью перекрывающей сечение волновода. Распределение с. в. ч.-поля соответствует случаю распределения волны  $H_{01}$ , но для упрощения задачи предполагается, что теплообмена с поверхности пленки не происходит. Однако в работе [4] было показано, что основным механизмом отвода тепла от пленки в воздухе является теплопроводность неподвижного слоя воздуха, окружающего пленку.

Рассмотрим следующую задачу: пусть пленка частично перекрывает сечение волновода (ширина пленки  $s$ ) (см. рис. 5). Предположим, что пленка охлаждается за счет теплопроводности металла и теплопроводности непо-

движного слоя воздуха, окружающего ее. Рассчитаем температурное поле пленки при нагревании ее постоянным током и током с. в. ч. волны  $H_{01}$ . Уравнение теплового баланса запишется в этом случае в виде:

$$-kd \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] + \alpha T = f(x, y), \quad (51)$$

где  $k$  — теплопроводность металла пленки;  
 $d$  — толщина пленки;  
 $kd$  — теплопроводность единицы поверхности пленки;  
 $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи с поверхности пленки;  
 $f(x, y)$  — мощность, выделяемая на единице поверхности пленки;  
 $T(x, y)$  — превышение температуры  $t$  в точке  $(x, y)$  нагретой пленки над температурой  $t_0$  ненагретой пленки.

От пленки отводится тепло через электроды, служащие для измерения ее сопротивления. Положив температуру этих электродов  $t_0 = \text{const}$ , запишем граничные условия, которым должно удовлетворять  $T(x, y)$ :

$$y = 0; \quad T(x, y) = 0; \quad (52)$$

$$y = b; \quad T(x, y) = 0; \quad (53)$$

$$x = x_1; \quad \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} + \kappa T(x, y) = 0; \quad (54)$$

$$x = x_2; \quad \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} + \kappa T(x, y) = 0; \quad (55)$$

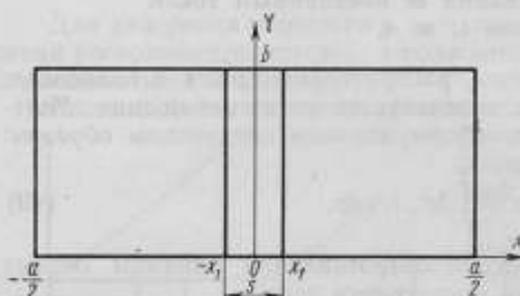


Рис. 5. Схема расположения пленки в волноводе.

$\kappa$  — коэффициент теплоотдачи с краев пленки;  
 $x_1, x_2$  — координаты краев пленки. Мы предполагаем, что пленка симметрична относительно середины волновода и, следовательно,  $x_2 = -x_1$ ;  $2x_1 = s$ .

Найдем решение уравнения:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - c^2 T = -p(x, y), \quad (56)$$

где

$$c^2 = \frac{\alpha}{kd}; \quad p(x, y) = \frac{f(x, y)}{kd} = A_0 + A_1 \cos^2 \frac{\pi x}{a}. \quad (57)$$

В случае нагрева постоянным током

$$A_0 = p_0; \quad A_1 = 0. \quad (58)$$

В случае нагрева током с. в. ч.

$$A_0 = A_1 = \frac{p_0}{\varphi}; \quad \varphi = 1 + \frac{\alpha}{\pi s} \sin \frac{\pi s}{a}. \quad (59)$$

Общее решение уравнения (59) имеет вид:

$$\begin{aligned} T(x, y) = & \sum_{\beta^2 + \gamma^2 = c^2} (A_1 \operatorname{ch} \beta y + A_2 \operatorname{sh} \beta y) (B_1 \operatorname{ch} \gamma x + B_2 \operatorname{sh} \gamma x) + \\ & + (A_{01} \operatorname{ch} cy + A_{02} \operatorname{sh} cy) + (A_{11} \operatorname{ch} \beta y + A_{12} \operatorname{sh} \beta y) (B_{11} \cos \gamma x + B_{12} \sin \gamma x) + \\ & + (B_{01} \operatorname{ch} cx + B_{02} \operatorname{sh} cx) + (A_{21} \cos \beta y + A_{22} \sin \beta y) (B_{21} \operatorname{ch} \gamma x + \\ & + B_{22} \operatorname{sh} \gamma x) + \alpha_0 + \alpha_1 \cos \frac{2\pi x}{a}, \quad (60) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{A_0}{c^2}, \\ \alpha_1 &= \frac{A_1}{c^2 + \frac{4\pi^2}{a^2}}. \end{aligned} \quad (61)$$

Отметим, что в общем решении, выписанное здесь, строго говоря, входит интеграл, так как  $\beta$ ,  $\gamma$  имеют непрерывный спектр значений. Но граничные условия выбирают из него лишь крайне ограниченное число дискретных значений.

Удовлетворив граничным условиям по  $y$ , получим:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \alpha_0 \left( 1 - \operatorname{ch} cy + \operatorname{th} \frac{cb}{2} \operatorname{sh} cy \right) + \\ &+ \alpha_1 \cos \frac{2\pi x}{a} \left[ 1 - \operatorname{ch} \beta y + \operatorname{th} \frac{\beta b}{2} \operatorname{sh} \beta y \right] + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n y}{b} (c_{1n} \operatorname{ch} \gamma_n x + c_{2n} \operatorname{sh} \gamma_n x); \\ \beta^2 &= \frac{4\pi^2}{a^2} + c^2; \quad \gamma_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + c^2. \end{aligned} \quad (62)$$

Разложим все функции  $y$  (включая  $f(y) = \operatorname{const}$ ) в ряд по  $\sin \frac{\pi n}{b} y$ . Тогда  $T(x, y)$  может быть представлено в виде ряда по  $\sin \frac{\pi n}{b} y$ :

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{\pi n y}{b} (c_{1n} \operatorname{ch} \gamma_n x + c_{2n} \operatorname{sh} \gamma_n x) + \frac{4}{\pi} \left( \alpha_0 + \right. \\ &+ \alpha_1 \cos \frac{2\pi x}{a} \left. \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{2n+1}{b} \pi y}{2n+1} - 4\pi \alpha_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) \sin \frac{2n+1}{b} \pi y}{b^2 c^2 + \pi^2 (2n+1)^2} - \\ &- \alpha_1 4\pi \cos \frac{2\pi x}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) \sin \frac{2n+1}{b} \pi y}{b^2 \beta^2 + \pi^2 (2n+1)^2}. \end{aligned} \quad (63)$$

Удовлетворим условиям по  $x$ :

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_1} + \kappa T(x, y) \Big|_{x=x_2} = 0. \quad (64)$$

Для четных  $n$ :

$$c_{1n} = c_{2n} = 0$$

Для нечетных  $n$ :

$$\begin{aligned} c_{1n} &= \frac{4b^2}{\pi n (\gamma_n^2 - \kappa^2)} \left[ \frac{A_0 \kappa^2}{(n^2 \pi^2 + b^2 c^2) \operatorname{ch} \gamma_n x_1} + \right. \\ &+ \left. \frac{A_1}{\pi^2 n^2 + b^2 \beta^2} \left( \frac{2\pi \gamma_n}{a} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi x_1}{a}}{\operatorname{sh} \gamma_n x_1} + \kappa^2 \frac{\cos \frac{2\pi x_1}{a}}{\operatorname{ch} \gamma_n x_1} \right) \right]; \end{aligned} \quad (65)$$

$$c_{2n} = \frac{-4b^2\kappa}{\pi n(\gamma_n^2 - \kappa^2)} \left[ \frac{A_n \gamma_n}{(n^2\pi^2 + b^2c^2) \operatorname{ch} \gamma_n x_1} + \frac{A_1}{n^2\pi^2 + b^2\beta^2} \left( \gamma_n \frac{\cos \frac{2\pi x_1}{a}}{\operatorname{ch} \gamma_n x_1} + \frac{2\pi}{a} \frac{\sin \frac{2\pi x_1}{a}}{\operatorname{sh} \gamma_n x_1} \right) \right]. \quad (66)$$

Эти выражения сравним с приведенными в работе [5]. Для этого положим прежде всего  $x_1 = x_2 = \frac{a}{2}$ ;  $\kappa = 0$  и перейдем к пределу при  $c \rightarrow 0$ . В результате получим:

$$\lim_{c \rightarrow 0} T(x, y) = A \left[ \frac{y(y-b)}{2} + \frac{a^2}{4\pi^2} \cos \frac{2\pi x}{a} \left( 1 - \operatorname{ch} \frac{2\pi y}{a} + \operatorname{th} \frac{\pi}{a} b \operatorname{sh} \frac{2\pi}{a} y \right) \right]; \quad (67)$$

что полностью совпадает с результатом из работы [5].

Итак, получены следующие выражения для распределения температуры вдоль пленки:

в случае нагрева постоянным током

$$T(x, y) = \frac{\rho_0}{c^2} \left( 1 - \operatorname{ch} cy + \operatorname{th} \frac{cb}{2} \operatorname{sh} cy \right) + \frac{4b^2\rho_0}{\pi} \sum \sin \frac{\pi ny}{b} \frac{\kappa^2 \operatorname{ch} \gamma_n x - \kappa \gamma_n \operatorname{sh} \gamma_n x}{n(\gamma_n^2 - \kappa^2)(n^2\pi^2 + b^2c^2) \operatorname{ch} \gamma_n x_1}. \quad (68)$$

В случае нагрева полем с. в. ч., мощность которого  $\rho_-$  равна мощности постоянного тока  $\rho_+$ , получим:

$$T_-(x, y) = \frac{\rho_0}{\varphi} \left\{ \frac{1}{c^2} \left( 1 - \operatorname{ch} cy + \operatorname{th} \frac{cb}{2} \operatorname{sh} cy \right) + \frac{\cos \frac{2\pi x}{a}}{\beta^2} \left( 1 - \operatorname{ch} \beta y + \operatorname{th} \frac{\beta b}{2} \operatorname{sh} \beta y \right) + \frac{4b^2}{\pi} \sum_{n-\text{нечетн.}} \sin \frac{\pi ny}{b} \left[ \frac{\operatorname{ch} \gamma_n x}{n(\gamma_n^2 - \kappa^2)} \left( \frac{\kappa^2}{n^2\pi^2 + b^2c^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} \gamma_n x_1} + \frac{2\pi \gamma_n}{a} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi x_1}{a}}{\operatorname{sh} \gamma_n x_1} \cdot \frac{1}{\pi^2 n^2 + b^2\beta^2} + \frac{\kappa^2}{n^2\pi^2 + b^2\beta^2} \cdot \frac{\cos \frac{2\pi x_1}{a}}{\operatorname{ch} \gamma_n x_1} \right) - \frac{\operatorname{sh} \gamma_n x}{n(\gamma_n^2 - \kappa^2)} \left( \frac{\kappa \gamma_n}{n^2\pi^2 + b^2c^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} \gamma_n x_1} + \frac{\kappa \gamma_n}{n^2\pi^2 + b^2\beta^2} \cdot \frac{\cos \frac{2\pi x_1}{a}}{\operatorname{ch} \gamma_n x_1} + \frac{2\pi}{a} \cdot \frac{\kappa}{n^2\pi^2 + b^2\beta^2} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi x_1}{a}}{\operatorname{sh} \gamma_n x_1} \right) \right] \right\}. \quad (69)$$

Следует отметить, что ряды, входящие в выражения для  $T(x, y)$ , сходятся очень быстро, так как члены ряда имеют вид

$$c_n \approx \frac{A}{cn^4 + dn^3 + fn^2 + gn} e^{-\sqrt{\frac{\pi^2}{b^2} n^2 + c^2} (x_1 - x)},$$

где  $A, c, d, f, g$  — постоянные;  $x_1 \geq x$ .

В полученные выражения для распределения температуры по пленке помимо геометрических параметров волновода и пленки входят теплофизические характеристики: коэффициенты  $c^2$  и  $\kappa$  определяются теплоотдачей поверхности пленки и боковых ее сторон. Можно показать, что

$$\kappa = c^2 d; \quad c^2 = \frac{\alpha}{k d}.$$

Мы рассматривали однородную пленку толщиной  $d$  и теплопроводностью  $k$ . В действительности пленочная терморара состоит из трех слоев, один из которых образован двумя различными пленками (см. рис. 4). Поэтому следует рассматривать «приведенную» пленку, т. е. однородную пленку, толщина которой равна сумме толщин слоев; теплопроводность ее определяется из выражения

$$k d = k_1 d_1 + k_2 d_2 + \frac{2d_{\text{термоизоляционный слой}}}{\frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4}}, \quad (70)$$

Рассмотрим зависимость  $T(c^2)$ . Для этого вычислим значение  $T(x, y)$  для случая постоянного тока и нахождения поля с. в. ч. в центре пленки: Тогда из выражений (68) и (69) получаем:

$$T_+(0, \frac{b}{2}) = \frac{p_0}{c^2} \left( 1 - \operatorname{ch} \frac{cb}{2} + \operatorname{th} \frac{cb}{2} \operatorname{sh} \frac{cb}{2} \right) + \frac{4b^2 p_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \kappa^2}{\operatorname{ch} \gamma_n x_1 (\gamma_n^2 - \kappa^2) n (n^2 \pi^2 + b^2 c^2)}; \quad (71)$$

$$T_-(0, \frac{b}{2}) = \frac{p_0}{\psi} \left[ \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{cb}{2} - 1}{\operatorname{ch} \frac{cb}{2}} + \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\beta b}{2} - 1}{\operatorname{ch} \frac{\beta b}{2}} + \frac{4b^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n (\gamma_n^2 - \kappa^2)} \left( \frac{\kappa^2}{n^2 \pi^2 + b^2 c^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} \gamma_n x_1} + \frac{2\pi \gamma_n}{a} \cdot \frac{\sin^2 \frac{2\pi x_1}{a}}{\operatorname{sh} \gamma_n x_1} \cdot \frac{1}{n^2 \pi^2 + b^2 \beta^2} + \frac{\kappa^2}{n^2 \pi^2 + b^2 \beta^2} \cdot \frac{\cos \frac{2\pi x_1}{a}}{\operatorname{ch} \gamma_n x_1} \right) \right]. \quad (72)$$

Эти выражения могут быть упрощены. Так как  $\kappa$  при  $c^2 < 500$  меньше 1, а при  $c^2 > 500$ , члены, в которые входит множитель  $\kappa^2$ , вследствие большого значения знаменателя малы, то члены пропорциональные  $\kappa^2$  можно отбросить. Кроме того, очевидно, что члены ряда в выражении для  $T_-$  по сравнению с первыми двумя слагаемыми малы и очень быстро убывают с возрастанием  $n$ ; поэтому достаточно оставить лишь один член ряда. В результате получим следующие приближенные выражения:

$$T_+(0, \frac{b}{2}) \approx \frac{p_0}{c^2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{cb}{2} - 1}{\operatorname{ch} \frac{cb}{2}}; \quad (73)$$

$$T_-(0, \frac{b}{2}) \approx \frac{p_0}{\psi} \left[ \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{cb}{2} - 1}{\operatorname{ch} \frac{cb}{2}} + \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\beta b}{2} - 1}{\operatorname{ch} \frac{\beta b}{2}} + \frac{8b^2}{a} \cdot \frac{\sin \frac{\pi s}{a}}{\sin \gamma_1 x_1} \cdot \frac{1}{\gamma_1 (\pi^2 + \beta^2 b^2)} \right]. \quad (74)$$

Таким образом,  $T_-(0, \frac{b}{2})$  практически не зависит от ширины пленки,  $T_-(0, \frac{b}{2})$  — функция  $s$ . Результаты вычислений приведены на рис. 5, на котором рассмотрена зависимость  $\frac{T(0, \frac{b}{2})}{\rho_0}$  от  $c^2$ . С увеличением  $c^2$  температура в точке  $0, \frac{b}{2}$  уменьшается. Наибольшая разность  $T_-(0, \frac{b}{2})$  и  $T_+(0, \frac{b}{2})$  характерна для пленки наибольшей ширины ( $s = a$ ). Чем уже пленка, тем ближе кривая  $T_-(0, \frac{b}{2})$  к кривой  $T_+(0, \frac{b}{2})$ . Так как мощность с. в. ч. определяется по методу замещения ее постоянным током, то в основном представляет интерес не абсолютная температура пленки в результате нагрева, а сравнение температур в месте

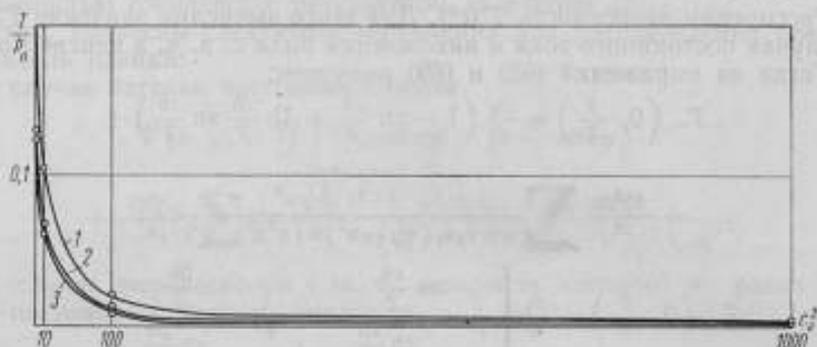


Рис. 6. Зависимость  $\frac{T}{\rho_0}$  от  $c^2$ :

1 —  $T_-$  при  $s = a = 23$  мм; 2 —  $T_-$  при  $s = 10$  мм; 3 —  $T_+$ .

спая при нагревании пленки последовательно в поле с. в. ч. и равным по мощности постоянным током. При использовании метода замещения предполагается, что одинаковые мощности в месте термоспая дают ту же температуру. Однако из рис. 6 видно, что  $T_-(0, \frac{b}{2})$  и  $T_+(0, \frac{b}{2})$  при равных  $\rho_+$  и  $\rho_-$  не равны.

Определим ошибку  $\frac{\Delta T}{T_-} \% = \frac{T_+ - T_-}{T_-} \cdot 100$  в зависимости от  $c^2$ , предполагая, что термоспай помещен в центре пленки. На рис. 8 и 9 приведены графики  $\frac{\Delta T}{T_-} \% (c^2)$  и  $\frac{\Delta T}{T_-} \% (s)$ . На рис. 8 представлены четыре кривые для пленок различной ширины. Как видно, наибольшая ошибка характерна для пленки, ширина которой перекрывает все сечение волновода. С уменьшением ширины пленки ошибка довольно быстро уменьшается. Несмотря на то, что с увеличением  $c^2$  значение температур  $T_+$  и  $T_-$  в центре пленки быстро уменьшается (см. рис. 6), относительная ошибка при изменении  $c^2$  от нуля до 1000 возрастает, приближаясь к некоторому предельному значению, определенному для каждой ширины. При  $c^2 > 200$   $\frac{\Delta T}{T_-} \%$  практически постоянно. Таким образом, нет необходимости определять коэффициент теплоотдачи, так как оценки дают для

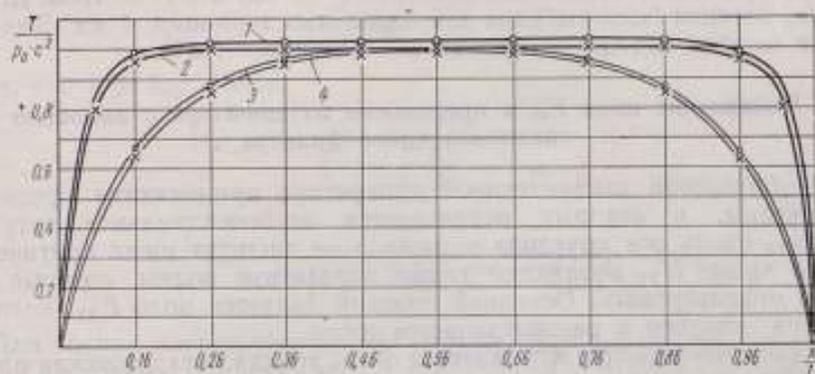


Рис. 7. Распределение температуры вдоль пленки при нагревании током СВЧ и постоянным током:

1, 2 — нагревание током СВЧ; 3, 4 — нагревание постоянным током; 1, 2 — кривые при  $c^2 = 1000$ ; 3, 4 — кривые при  $c^2 = 100$ .

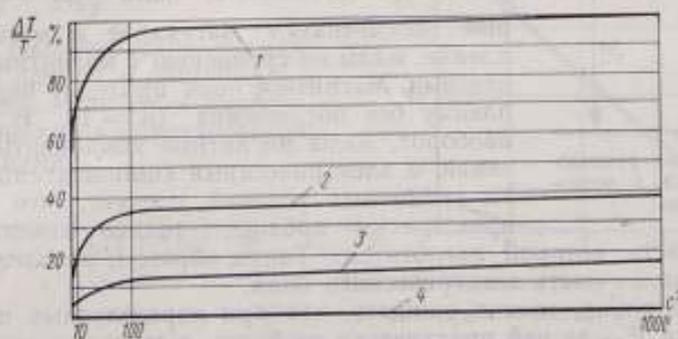


Рис. 8. Зависимость  $\frac{\Delta T}{T} \%$  от  $c^2$ :

1 —  $s = d = 23$  мм; 2 —  $s = 15$  мм; 3 —  $s = 10$  мм; 4 —  $s = 3$  мм.

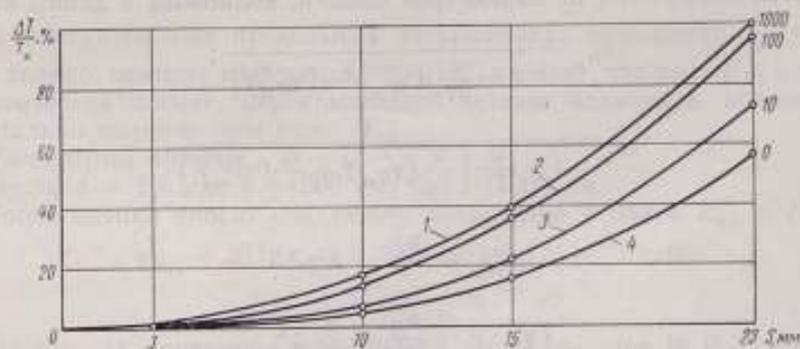


Рис. 9. Зависимость  $\frac{T_m - T_{\infty}}{T_{\infty}} \%$  от ширины пленки и коэффициента теплоотдачи в волноводе  $2,3 \times 10$  мм:

1 —  $c^2 = 1000$ ; 2 —  $c^2 = 100$ ; 3 —  $c^2 = 10$ ; 4 —  $c^2 = 0$ .

$\alpha$  значения, при которых  $c^2 \geq 200$ . На рис. 7 приведено распределение температуры вдоль пленки для значений  $c^2 = 100$  и  $c^2 = 1000$ . Ширина пленки, которая была выбрана для пленочных терморпар, 4 м. Для этого случая ошибка метода замещения не превышает 2,5%.

### Подавление поля $E_{01}$ в предельном аттенуаторе с помощью тонкопленочного фильтра

В образцовой измерительной аппаратуре применяются предельные аттенуаторы, в которых используется экспоненциальное затухание поля  $H_{11}$  вдоль оси круглого волновода на частотах ниже критической. Обычно кроме  $H_{11}$  возникают также паразитные волны, которые необходимо отфильтровать. Основной помехой является поле  $E_{01}$ , метод подавления которого и рассматривается ниже.

В качестве фильтра используется очень тонкая металлическая пленка, перекрывающая все сечение волновода, причем толщина пленки значительно меньше толщины скин-слоя. Физическое обоснование идеи заключается в следующем.

В поле  $H_{11}$  на очень низких частотах электрические компоненты поля ( $E_r \sim \frac{1}{k}$ ), которые обеспечивают затухание в металлической пленке, малы по сравнению с магнитными компонентами. Магнитное поле проходит через тонкую пленку без поглощения ( $\mu = 1$ ). В поле  $E_{01}$ , наоборот, малы магнитные компоненты по сравнению с электрическими компонентами  $E_z$  и  $E_r$ . Из граничных условий следует, что в пленку практически проходит только компонента  $E_r$ , большая часть которой поглотится. Таким образом, за пленку проходит лишь малая часть электрического поля.

Следовательно, можно ожидать, что при определенных параметрах пленки поля  $E_{01}$  за ней практически не будет, в то время как поле  $H_{11}$  лишь незначительно ослабнет.

Решив граничную задачу для обоих случаев, предположив, что толщина пленки  $d$  мала (рис. 10), получим следующую зависимость коэффициентов ослабления от параметров пленки, волновода и длины волны:

$$c_{H_{11}} = \frac{1}{1 + \frac{d}{2\gamma} [(Y'_{H_{11}})^2 - (Y_{H_{11}})^2]}; \quad (75)$$

$$c_{E_{01}} = \frac{1}{1 + \frac{d}{2\gamma} \left[ \frac{\epsilon}{\epsilon_0} (Y'_{E_{01}})^2 + \frac{\epsilon_0}{\epsilon} (Y_{E_{01}})^2 \right]}; \quad (76)$$

где

$$Y_{H_{11}}^2 = \frac{\mu_{11}^2}{a^2} - k^2; \quad (77)$$

$$(Y'_{H_{11}})^2 = \frac{\mu_{11}^2}{a^2} - \frac{\epsilon}{\epsilon_0} k^2; \quad (78)$$

$$Y_{E_{01}}^2 = \frac{\nu_{01}^2}{a^2} - k^2; \quad (79)$$

$$(Y'_{E_{01}})^2 = \frac{\nu_{01}^2}{a^2} - \frac{\epsilon}{\epsilon_0} k^2; \quad (80)$$

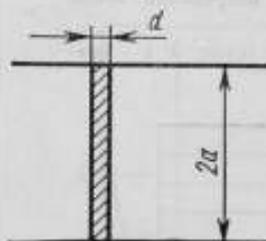


Рис. 10. Схема расположения пленки в волноводе.

$$k^2 = \epsilon_0 \mu_0 \omega^2; \quad (81)$$

$$\epsilon = \epsilon_0 - i \frac{\sigma}{\omega}. \quad (82)$$

Учтем, что  $\lambda \gg \lambda_{\text{впр}}$ . Тогда

$$|c_{H_{11}}| \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma d}{2} \cdot \frac{a}{\mu_{11}} \mu_0 \omega\right)^2}}; \quad (83)$$

$$|c_{E_{01}}| \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma d}{2} \cdot \frac{v_{01}}{a} \cdot \frac{1}{\epsilon_0 \omega}\right)^2}}. \quad (84)$$

Для тонких пленок уже нельзя пользоваться таблицами значений  $\sigma$ , так как проводимость пленки может значительно отличаться от проводимости исходного материала. Поэтому произведение  $\sigma d$  определяется по сопротивлению пленки  $R_{\square}$ :

$$R_{\square} = \frac{1}{\sigma d}, \quad (85)$$

где  $R_{\square}$  — сопротивление пленки с равными длиной и шириной.

Запишем выражение коэффициента ослабления в практической системе единиц:

$$|c_{H_{11}}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4,12 \cdot 10^3 \text{ ом}^2 \cdot a^2}{R_{\square}^2 \cdot \lambda^2}}}; \quad (86)$$

$$|c_{E_{01}}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{5,2 \cdot 10^3 \text{ ом}^2 \cdot \lambda^2}{R_{\square}^2 \cdot a^2}}}. \quad (87)$$

В измерительных предельных аттенуаторах отношение  $\frac{\lambda}{a}$  обычно очень велико, поэтому из формул (86) и (87) следует, что поле  $E_{01}$  в тонкой металлической пленке, перекрывающей сечение волновода, поглощается значительно сильнее, чем поле  $H_{11}$ .

Рассмотрим пример:

Пусть  $a = 1,6 \text{ см}$ ;  $\lambda = 500 \text{ см}$ ;  $R_{\square} = 1000 \text{ ом}$ .

Тогда пленка вносит следующее ослабление  $\alpha$  полей  $E_{01}$  и  $H_{11}$ :

$$\alpha_{H_{11}} = 20 \lg c_{H_{11}} = 10 \lg(1 + 4,12 \cdot 10^{-6}) \approx 0;$$

$$\alpha_{E_{01}} = 20 \lg c_{E_{01}} \approx 27 \text{ дБ}.$$

На рис. 11 приведены зависимости  $\alpha_{E_{01}}$  и  $\alpha_{H_{11}}$  (от  $\lg R_{\square}$ ) при данном  $\frac{\lambda}{a}$ . Из графика видно, что если сопротивление пленки удовлетворяет условию

$$20 \text{ ом} < R_{\square} < 10^4 \text{ ом}, \quad (88)$$

то пленка является фильтром для поля  $E_{01}$ .

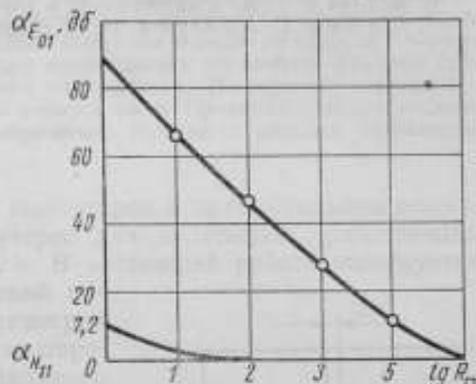


Рис. 11. Зависимость  $\alpha_{E_{01}}$  и  $\alpha_{H_{11}}$  (от  $\lg R_{\square}$ ) при  $\lambda = 500 \text{ см}$  и  $a = 1,6$ .

В общем случае условие (88) запишется в виде:

$$\frac{\lambda}{15,6a} < R_{\square} < \frac{\lambda}{0,0312a}. \quad (89)$$

Итак, в качестве фильтра для подавления поля  $E_{01}$  в предельном измерительном аттенуаторе может быть использована тонкая металлическая пленка.

#### Литература

1. Левин Л. Современная теория волноводов. М. И. Л., 1954.
2. Кипдзел Н., *L'Onde Electrique*, 33, 217, 1953.
3. Бадаева О. Н. Труды НИИ МРТП, № 7 (43), 1957.
4. Бадаева О. Н. Труды НИИ МРТП, № 11 (47), 1957.
5. Аверков С. И., Карамина И. Н. Труды ГГУ, т. XXX (серия физическая).
6. Югова Г. А. «Радиотехника и электроника», 7, 2, 1962.
7. Югова Г. А., Югов В. А. «Радиотехника и электроника», 7, 11, 1962.



УДК 621.317.6

### О СОГЛАСОВАНИИ НИТЯНОГО БОЛОМЕТРА С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ВОЛНОВОДОМ

Рассматривается отражение основной электромагнитной волны от металлической нити, помещенной в центре прямоугольного волновода. Приводятся случаи, когда радиус нити намного меньше толщины скин-слоя и когда он сравним с толщиной скин-слоя. Получены выражения для коэффициента отражения. Указаны границы применимости классической теории скин-эффекта. Исследована зависимость к. с. в. н. болометрической головки от радиуса нити. Проанализированы возможности улучшения согласования болометрической головки с нитяным болометром в волноводе.

Вопрос о согласовании нитяных болометров в прямоугольном волноводе представляет значительный интерес для инженеров, работающих в области измерения мощности с. в. ч. В настоящей работе исследуется зависимость к. с. в. н. болометрической головки с нитяным болометром от параметров последнего. С этой целью прежде всего определяется коэффициент отражения нитяного болометра. Рассматривается бесконечный прямоугольный волновод (рис. 1), в сечении  $z = 0$  которого в плоскости симметрии, параллельной узким стенкам, помещен круглый металлический стержень радиусом  $r$ , причем

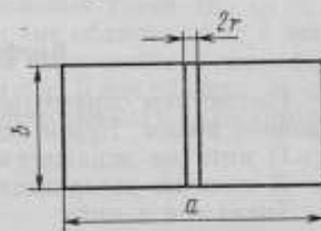


Рис. 1. Схема расположения нити в волноводе.

$$r \ll \lambda$$

( $\lambda$  — длина волны в свободном пространстве). Сопротивление стержня постоянному току  $R$  известно. В волноводе распространяется волна  $H_{10}$ :

$$E_x = e^{-\gamma z} \sin \frac{\pi x}{a} E_0, \quad (1)$$

где

$$\gamma = k \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4a^2}}; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (2)$$

Требуется определить коэффициент отражения стержня.

#### О скин-эффекте

Очевидно, что возможны два случая:

- 1)  $r \ll \delta$ , где  $\delta$  — классическая глубина скин-слоя;
- 2)  $r \geq \delta$ .

Прежде всего следует рассмотреть вопрос о характере скин-эффекта. Как известно, при высоких частотах и для достаточно тонких проволок

характерен аномальный скин-эффект [1]. Оценим для рассматриваемой задачи границы применимости теории нормального скин-эффекта.

Классическая теория скин-эффекта справедлива, когда длина свободного пробега электронов  $l$  в металле будет значительно меньше как классической глубины скин-слоя  $\delta$ , так и поперечных размеров образца. Таким образом, должны быть действительны соотношения:

$$l \ll r, \quad l \ll \delta = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda c}{\mu \sigma}} \quad (3)$$

(значения  $\sigma$ ,  $\delta$  относятся к массивному образцу).

При комнатных температурах для хороших проводников  $l \approx 10^{-6}$  см. При понижении температуры  $l$  возрастает, достигая иногда при гелиевых температурах  $l \approx 10^{-3}$  см.

Рассмотрим случай «хорошего проводника» при комнатной температуре. Очевидно, что соотношение  $l \ll r$  практически всегда выполняется.

Так как обычно диаметр нитяного болометра равен примерно 1–5  $\mu$ , то  $l$  составляет сотые доли радиуса болометра. Определим глубину классического скин-слоя. Рассмотрим медь, проводимость которой  $\sigma = 5 \times 10^{17}$  ед. CDSE. Тогда при  $\lambda = 0,1$  см

$$\delta = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{0,1 \cdot 3 \cdot 10^{10}}{5 \cdot 10^{17}}} = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ см.}$$

Следовательно, для меди и других «хороших проводников» классическая теория скин-эффекта справедлива лишь при длинах волн более 1 мк (при частотах менее  $10^{12}$ ).

#### Коэффициент отражения нити

Рассмотрим отражение от нити, радиус которой  $r$  мал по сравнению с длиной волны. Будем считать, что:

- 1) нить не искажает поля;
- 2) поле на поверхности нити одинаково.

Тогда ток в нити

$$I = \frac{2b}{R} \cdot \frac{I_1(k'r)}{k'r I_0(k'r)} E'_{0y}, \quad (4)$$

где  $E'_{0y}$  — поле на поверхности нити;  
 $k'$  — волновое число внутри нити;  
 $R$  — сопротивление нити постоянному току;  
 $I_0$  и  $I_1$  — функции Бесселя.

Запишем условие непрерывности потенциальной компоненты электрического поля в точке  $(0, \frac{a}{2} + r)$

$$E'_{0y} \left(0, \frac{a}{2} + r\right) = E_y \left(0, \frac{a}{2} + r\right) + E_{изл. y} \left(0, \frac{a}{2} + r\right), \quad (5)$$

где  $E_{изл. y}$  — поле волны, излученное нитью.

$E_{изл. y}$  может быть представлено как поле излучения линейного тока [2]

$$E_{изл. y} = -\frac{120\pi k}{a} I \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \frac{e^{-\Gamma_n |z|}}{\Gamma_n}, \quad (6)$$

$$\Gamma_n = \sqrt{k^2 - \frac{n^2\pi^2}{a^2}}. \quad (7)$$

Тогда получим следующие выражения для определения тока  $I$ :

$$E_0 \sin \pi \left( \frac{1}{2} + \frac{r}{a} \right) - \frac{120\pi k}{a} IS = \frac{RI}{2b} f(r); \quad (8)$$

$$f(r) = \frac{k' r I_0(k' r)}{I_1(k' r)}; \quad (9)$$

$$S = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma_m} \sin \frac{m\pi}{2} \sin m\pi \left( \frac{1}{2} + \frac{r}{a} \right). \quad (10)$$

Так как  $\frac{2r}{a} \ll 1$ , то  $\sin \pi \left( \frac{1}{2} + \frac{r}{a} \right) \approx 1$ . Таким образом, выражение для тока будет иметь вид:

$$I = \frac{E_0}{\frac{R}{2b} f(r) + \frac{120\pi k}{a} S}. \quad (11)$$

Следовательно, поле излучения нити

$$E_{\text{изл. } y} = -\frac{120\pi k}{a} \cdot \frac{1}{\frac{R}{2b} f(r) + \frac{120\pi k}{a} S} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{a} \cdot \frac{e^{-i\Gamma_n |z|}}{\Gamma_n}. \quad (12)$$

Предположим, как это обычно бывает, что  $\frac{\lambda}{2} < a < \lambda$ . Тогда выражение (12) представляет сумму волны  $H_{10}$  (прошедшей при  $z > 0$ , отраженной при  $z < 0$ ) и быстрозатухающих волн высших типов  $H_{2n+1,0}$  ( $n > 0$ ). Оценка [3] показывает, что практически вне области  $|z| < \lambda$  затухающих волн не будет, хотя теоретически волны высших типов полностью затухают лишь при  $z \rightarrow \infty$ . Следовательно, при  $z < 0$  вне области  $|z| < \lambda$  остается отраженная волна, напряженность электрического поля которой

$$E_{\text{отр. } y} = \varrho E_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\gamma z}, \quad (13)$$

где  $\varrho$  — коэффициент отражения,

$$\varrho = -\frac{120\pi k}{a\gamma} \cdot \frac{1}{\frac{R}{2b} f(r) + \frac{120\pi k}{a} S}. \quad (14)$$

Зная  $\varrho$ , можно записать коэффициент прохождения волны.

Так как  $E_{\text{изл. } y}$  симметрично относительно  $z = 0$ , то электрическое поле прошедшей волны является суммой полей падающей волны и волны излученной. На достаточно большом расстоянии от нити, где волны высших типов можно считать уже затухшими, получим таким образом

$$E_{\text{прот. } y} = (1 + \varrho) E_0.$$

Остановимся на величинах  $S$  и  $f(r)$ .

Ряд  $S$  рассмотрен в работах [2] и [3]. Приближенное выражение для  $S$  имеет вид:

$$S \approx \frac{\lambda_g}{2\pi} + \frac{a}{2\pi} i \left( \ln \frac{2a}{\pi r} - 2 + 2F_0 \right); \quad (15)$$

$$F_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{(2n+1)^2 - \frac{4a^2}{\lambda^2}}} - \frac{1}{2n+1} \right]. \quad (16)$$

Зависимость  $F_0$  от  $2a$  [3] приведена на рис. 2.

Рассмотрим  $f(r)$ . Пусть  $X_0$  и  $Y_0$  соответственно действительная и мнимая части  $f(r)$ :

$$f(r) = X_0 + iY_0. \quad (17)$$

Так как материалом нити является металл, то  $k'$  — комплексное волновое число — может быть представлено в виде:

$$k' = \frac{1+i}{\delta}. \quad (18)$$

Обозначим  $x_0$  и  $x_1$  — действительные, а  $y_0$  и  $y_1$  — мнимые части — соответственно  $I_0(k'r)$  и  $I_1(k'r)$ :

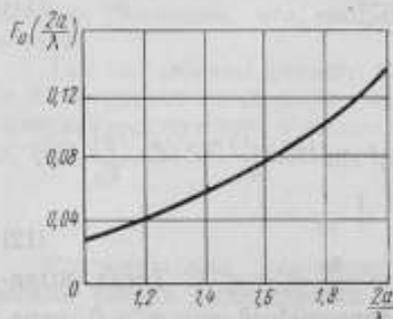


Рис. 2. График зависимости  $F_0$  от  $\frac{2a}{\lambda}$ .

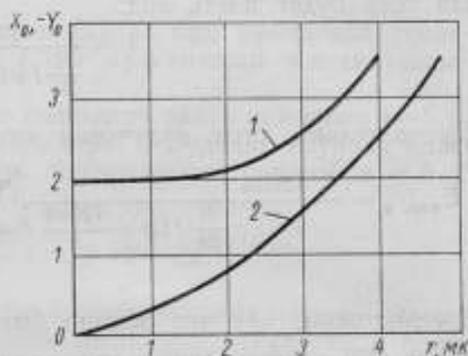


Рис. 3. Зависимость  $X_0$  и  $-Y_0$  от радиуса нити ( $r$ ):  
1 —  $X_0$ ; 2 —  $Y_0$ .

$$\begin{aligned} x_0 &= \text{Re} I_0(k'r); & x_1 &= \text{Re} I_1(k'r); \\ y_0 &= \text{Im} I_0(k'r); & y_1 &= \text{Im} I_1(k'r). \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{x_0(x_1 + y_1) + y_0(y_1 - x_1)}{x_1^2 + y_1^2} \cdot \frac{r}{\delta}, \\ Y_0 &= \frac{x_0(x_1 - y_1) + y_0(x_1 + y_1)}{x_1^2 + y_1^2} \cdot \frac{r}{\delta}. \end{aligned} \quad (20)$$

Перепишем выражение для коэффициента отражения, раскрыв при этом значения  $f(r)$  и  $S$ :

$$q = \frac{-1}{1 + qRX_0 + iqRY_0 + i \frac{a}{\lambda_g} \left( \ln \frac{2a}{\pi r} - 2 + 2F_0 \right)}; \quad (21)$$

$$q = \frac{a}{2b} \frac{1}{120\pi} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4a^2}}. \quad (22)$$

На рис. 3 приведены зависимости  $X_0$  и  $Y_0$  от радиуса нити. Рассмотрим случай, когда  $r \ll \delta$ . Тогда  $X_0 \approx 2$ ;  $Y_0 = 0$ . Следовательно,

$$q = \frac{-1}{1 + 2qR + i \frac{a}{\lambda_g} \left( \ln \frac{2a}{\pi r} - 2 + 2F_0 \right)}. \quad (23)$$

Это выражение совпадает с полученным в работе [3].

### Коэффициент отражения болометрической головки

Рассмотрим случай, когда на расстоянии  $l$  от нити (вдоль оси  $z$ ) волновод закорочен идеально проводящим поршнем. Коэффициент отражения полученной таким образом болометрической головки может быть определен путем вычисления суммы ряда последовательных отражений в системе болометр—поршень [4]:

$$\Gamma = \rho - (1 + \rho)^2 e^{-i2\gamma l} + \rho(1 + \rho)^2 e^{-i4\gamma l} - \dots = \rho - \frac{(1 + \rho)^2 e^{-i2\gamma l}}{1 + \rho e^{-i2\gamma l}}. \quad (24)$$

Очевидно, что если  $l = \frac{\lambda_g}{4} (2n + 1)$ , то

$$\Gamma_0 = \frac{1 + 3\rho}{1 - \rho}. \quad (25)$$

Если мнимая часть  $\rho$  по сравнению с действительной ее частью мала, то  $\Gamma_0$  может быть легко сделано малым для волны определенной длины путем выбора активного сопротивления болометра и расстояния до поршня. Так согласовываются пленочные болометры [4]. Однако для нитяных болометров мнимая составляющая, определяемая, в основном, выражением  $\ln \frac{2a}{\pi r}$ , довольно значительна, так как радиус нити обычно равен 1 мк. При анализе случая  $r > \delta$  из выражения для  $\rho$  на первый взгляд следует, что имеется возможность, увеличивая  $r$  и  $R$ , уменьшить мнимую часть  $\rho$ . Однако, увеличивая радиус нити, мы тем самым уменьшаем ее сопротивление:

$$R = \frac{b}{\sigma \pi r^2}.$$

Чтобы использовать соотношение (21) для улучшения согласования в закороченном волноводе, можно попробовать применять в качестве нити болометра материалы с отличным от единицы значением магнитной проницаемости, так как глубина проникновения поля в металл с увеличением магнитной проницаемости уменьшается. Следует заметить, что этот эффект обычно перекрывается плохой проводимостью большинства материалов с большой магнитной проницаемостью. Однако возможно, что при некотором сочетании  $\mu$  и  $\sigma$  удастся получить хороший результат.

По выражениям (21) и (24) были построены графики при  $l = \frac{\lambda_g}{4}$ :

а) зависимости к. с. в. н. от сопротивления нити  $R$  при условии сохранения значений  $r$  и  $\delta$  (рис. 4);

б) зависимости к. с. в. н. от радиуса нити при постоянном сопротивлении  $R$  (рис. 5);

в) зависимости к. с. в. н. от радиуса нити, когда активное сопротивление также зависит от радиуса (рис. 6).

Практически последний график наиболее интересен, так как он показывает, как будет изменяться к. с. в. н. при использовании нитей из одного и того же материала, но разных диаметров. В этом случае к. с. в. н. вначале резко уменьшается от бесконечно большого значения при  $r = 0$  до некоторого минимального значения при  $r = r_0$ , а затем снова возрастает с увеличением радиуса.

Однако минимальное значение к. с. в. н. ( $r$ ) велико (рис. 6). Попытаемся уменьшить  $|\Gamma|$  путем настройки. Подставим в выражение для  $\Gamma$  значение  $\rho$ :

$$\rho = -\frac{1}{x + iy}, \quad (26)$$

где

$$x = 1 + qRX_0;$$

$$y = \frac{\alpha}{\lambda_g} \left( \ln \frac{2a}{\pi r} - 2 + 2F_0 \right) + qRY_0. \quad (27)$$

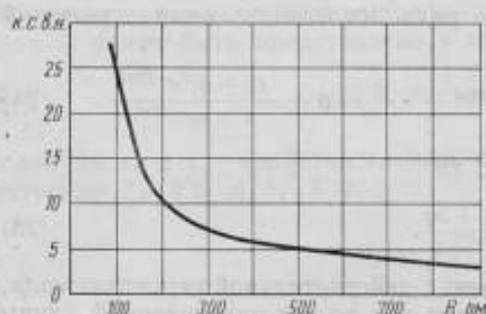


Рис. 4. Зависимость к. с. в. н. от сопротивления нити постоянному току при неизменном  $r$  и  $\delta$ .

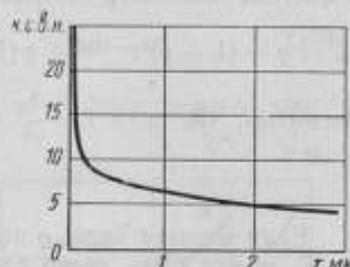


Рис. 5. Зависимость к. с. в. н. от радиуса нити при неизменном  $R$ .

Тогда получаем

$$|\Gamma|^2 = \frac{x^2 + y^2 + 5 - 4x + 2(x-2) \cos 2\gamma l + 2y \sin 2\gamma l}{x^2 + y^2 + 1 - 2x \cos 2\gamma l + 2y \sin 2\gamma l}. \quad (28)$$

Чтобы определить  $l$ , при котором  $|\Gamma|$  минимально, анализируем условие  $\frac{d|\Gamma|}{dl} = 0$ .

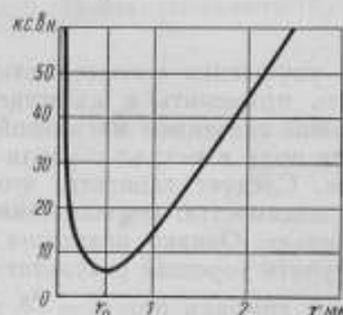


Рис. 6. Зависимость к. с. в. н. от радиуса нити при  $R = \frac{l}{\sigma \pi r^2}$ .

Условие минимума будет иметь вид

$$y^2 + (x-1)^2 + 2y \operatorname{tg} \frac{\chi_0}{2} = 0, \quad (29)$$

где  $\chi = 2\gamma l$ .

Таким образом, точке  $\chi = \chi_0$  соответствует минимум функции  $|\Gamma|$ . Определим  $l_0$ :

$$l_0 = \frac{\chi_0}{2\gamma} = \frac{1}{\gamma} \left\{ \operatorname{arctg} \left[ -\frac{y^2 + (x-1)^2}{2y} + \pi \right] \right\}. \quad (30)$$

Если  $y \rightarrow 0$ , то  $l_0 \rightarrow \frac{\lambda_g}{4}$ . При  $y \neq 0$   $l_0 > \frac{\lambda_g}{4}$ .

Однако настройка на  $l_0$  незначительно улучшает согласование по сравнению с настройкой на  $\frac{\lambda_g}{4}$ .

Рассмотрим пример. Возьмем нитяной болометр, диаметр которого  $d = 1$  мк, сопротивление постоянному току  $R = 433$  ом. При  $\lambda = 3$  см

$$q = -\frac{1}{3 + i4,86}.$$

При  $l = \frac{\lambda_g}{4}$

$$|\Gamma| = 0,772, \quad \text{к. с. в. н.} = 7,78.$$

Определим  $\chi_0$  и  $|\Gamma|_{\min}$ :

$$\operatorname{tg} \frac{\chi_0}{2} = -\frac{y^2 + (x-1)^2}{2y} = -2,85;$$

$$|\Gamma|_{\min} = 0,747, \quad \text{к. с. в. н.} = 6,9.$$

На рис. 7 приведена зависимость к. с. в. н. от  $l$  для рассматриваемых параметров. Как видно, вся кривая лежит выше к. с. в. н. = 6,9.

(Отметим, что для пленочного болометра, ширина которого 3 мм, для данных параметров к. с. в. н.  $\approx 1,05$ . [4]).

Чтобы выяснить, когда  $|\Gamma| = 0$ , решим это уравнение. Для этого приравняем к нулю числитель выражения (38).

$$x^2 + y^2 + 5 - 4x - 2(x-2) \cos 2\gamma l + 2y \sin 2\gamma l = 0.$$

Из полученного соотношения определим  $x$  как функцию  $y$  и  $l$ .

$$x_{1,2} = 2 - \cos 2\gamma l \pm i(y + \sin 2\gamma l). \quad (31)$$

Подставив  $x_1, x_2$  в выражение (38), убедимся, что первый корень следует отбросить.

Таким образом, для получения хорошего согласования необходимо, чтобы  $x$  было комплексным. Это означает, что сопротивление  $R$  должно быть не чисто активным, а содержать на с. в. ч. реактивную составляющую  $X', R'$ .

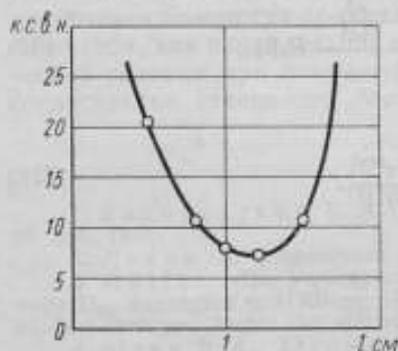


Рис. 7. Зависимость к. с. в. н. от  $l$  — расстояния между нитью и поршнем.

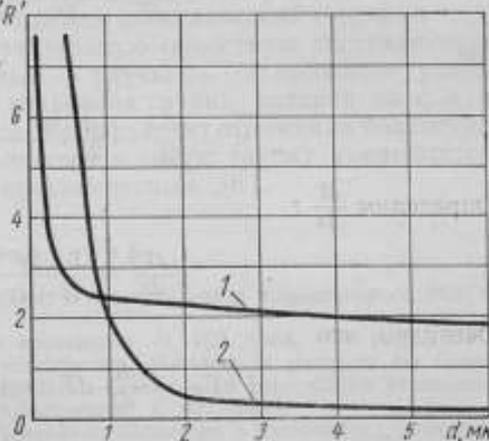


Рис. 8. Зависимость активного  $R'$  и реактивного  $X'$  относительного сопротивлений от диаметра нити: 1 —  $X'$ ; 2 —  $R'$ .

На практике важно знать относительное сопротивление, которое представляет нитяной болометр в волноводе. Для простоты рассмотрим случай  $l = \frac{\lambda_g}{4}$ . Тогда [5]

$$\Gamma = \frac{x + iy - 3}{x + iy + 1}.$$

Выражение для активной составляющей относительного сопротивления  $R'$ :

$$R' = \frac{x-1}{2} = \frac{a}{4b} \cdot \frac{R \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4a^2}}}{120\pi} X_0. \quad (32)$$

Выражение для реактивной составляющей относительного сопротивления  $X'$  будет иметь следующий вид:

$$X' = \frac{y}{2} = \frac{a}{\lambda_g} \left( \ln \frac{2a}{\pi r} - 2 + 2F_0 \right) - \frac{a}{4b} \cdot \frac{R \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4a^2}}}{120\pi} Y_1. \quad (33)$$

На основании этих выражений был получен график зависимости  $R'$  и  $X'$  от радиуса болометра (рис. 8).

### Зависимость коэффициента отражения болометрической головки от температуры

При помещении металлической нити в волновод и использовании ее в качестве болометра нить нагревается. Поэтому интересно выяснить влияние нагревания нити на согласование.

Для этого следует определить  $\Delta(|\Gamma|^2)$ :

$$\Delta(|\Gamma|^2) = \left| \Gamma_{T_0} + \frac{d\Gamma}{dT} dT \right|^2 - |\Gamma_{T_0}|^2. \quad (34)$$

Зависимость  $\Gamma$  от  $T$  определяется зависимостью  $R$  от  $T$ :

$$R = R_0(1 + \beta T). \quad (35)$$

Следовательно,

$$\frac{d\Gamma}{dT} = \frac{d\Gamma}{dx} \cdot \frac{dx}{dT} = \alpha \frac{d\Gamma}{dx}, \quad (36)$$

где

$$\alpha = \frac{dx}{dT} = \frac{a}{2b} \cdot \frac{\chi_0 \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4a^2}}}{120\pi} R_0 \beta_0. \quad (37)$$

Определим  $\frac{d\Gamma}{dx}$ :

$$\frac{d\Gamma}{dx} = \frac{1 - 2e^{-i2\gamma l} + e^{i4\gamma l}}{(x + iy - e^{-i2\gamma l})^2}. \quad (38)$$

Очевидно, что

$$\left| \Gamma_{T_0} + \frac{d\Gamma}{dT} dT \right| = \left| \Gamma_{T_0} + \frac{d\Gamma}{dx} dx \right|.$$

Определим

$$\left| \Gamma_{T_0} + \frac{d\Gamma}{dx} dx \right|.$$

Обозначим

$$\alpha_1 = 2 \cos \chi - 1 - x \cos \chi - y \sin \chi;$$

$$\beta_1 = 2 \sin \chi + y \sin \chi - x \sin \chi;$$

$$\alpha_2 = x - \cos \chi;$$

$$\beta_2 = y + \sin \chi;$$

$$\alpha_3 = (\cos \chi - 1) 2 \cos \chi dx;$$

$$\beta_3 = (1 - \cos \chi) 2 \sin \chi dx.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\Gamma_{T_0}|^2 &= \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}; \\ \left| \Gamma_{T_0} + \frac{d\Gamma}{dx} dx \right|^2 &= \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} + \\ &+ \frac{\alpha_3^2 + \beta_3^2 + 2\alpha_3(\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + 2\beta_3(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)}{(\alpha_2^2 + \beta_2^2)^2} = |\Gamma_{T_0}|^2 + \Delta(|\Gamma|^2); \end{aligned}$$

Отсюда

$$\Delta(|\Gamma|^2) = \frac{4(1 - \cos \chi)^2 (dx)^2 + 4dx(1 - \cos \chi) [(\cos^2 \chi - \sin^2 \chi)(x^2 + y^2 - 2x) + (2 \cos \chi - 1)(1 + 2y \sin \chi)]}{(\alpha_2^2 + \beta_2^2)^2}$$

Очевидно, что знаменатель и первое слагаемое числителя положительны. Знак второго слагаемого числителя определяется значениями  $x$ ,  $y$ ,  $\chi$ .

\*\*\*

Значительная часть приведенных выше результатов была подтверждена экспериментально. Хорошо совпали теоретическое и экспериментальное значения  $k$ , с. в. н. ( $r$ ),  $R'(r)$ ,  $X'(r)$ . Экспериментальные поиски возможностей улучшения согласования привели также, как и теория, к мысли о компенсации реактивной составляющей, обусловленной малым радиусом стержня, введением емкости в сечение волновода, содержащем болометр. Г. Г. Петросян для этой цели был предложен металлический стержень переменной высоты, который имеет значительную емкостную составляющую сопротивления [5]. С той же целью — улучшить согласование узкого пленочного болометра применялась кварцевая трубка, которая на с. в. ч. ведет себя, как параллельная емкость. Коэффициент отражения болометрической головки при помещении болометра в такую трубку уменьшается, согласование становится более широкополосным [6].

#### Л и т е р а т у р а ]

1. Болотовский Б. М. Скин-эффект в тонких пленках и проволочках, ЖЭТФ, 32, 559, 1957.
2. Левин Л. Современная теория волноводов, М. ИЛ, 1954.
3. Müller. «Die Veränderung der elektrischen Feldstärke in einem in der Grundwelle  $H_{10}$  angeregten rechteckigen Hohlkabel durch Einbau eines beschalteten kreisrunden dünnen Drahtes». Archiv der elektrischen Übertragung, 7, 451, 1953.
4. Югов В. А., Югова Г. А. Пленочные болометры в головках с фиксированной настройкой для измерения мощности с. в. ч., Радиотехника и электроника, 7, 11, 1962.
5. Справочник по волноводам, Советское радио, 1952.
6. Югов В. А. Простой метод расширения полосы рабочих частот пленочного болометра в с. в. ч.-диапазоне. Измерительная техника, 2, 1959.

Статья поступила 30 ноября 1964 г.

УДК 621.317.75

**ОБ ИСКАЖЕНИЯХ ИМПУЛЬСА, ВНОСИМЫХ ОТКЛОНЯЮЩЕЙ СИСТЕМОЙ ОСЦИЛЛОГРАФА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ**

Рассматривается вопрос о линейных искажениях импульсов, обусловленных такими отклонениями от идеальности в отклоняющей системе электронно-лучевой трубки как наличие различного типа рассогласований на конце системы, неточность установления ускоряющего напряжения и дисперсия.

Приведены расчетные осциллограммы искажений идеальных прямоугольных импульсов при различных соотношениях между длительностью импульса и временем пребывания электрона в отклоняющей системе.

В настоящее время в ряде областей физики и техники необходимы не только визуальные наблюдения быстропеременных процессов, но и измерения различных параметров [1—5]. Основным методом наблюдения единичных быстропеременных процессов является осциллографирование бегущей волны с помощью электронно-лучевой трубки (ЭЛТ). Однако погрешности, вызванные неидеальностью отклоняющей системы ЭЛТ, в литературе не рассматривались.

Рассмотрим вопрос об искажениях импульсов, обусловленных этой причиной, причем ограничимся только линейными искажениями. Нелинейностью, возникающей при импульсе с большой амплитудой, пренебрегаем. При этом предположении отклонение луча на экране трубки можно записать в виде интеграла Фурье:

$$Y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) E(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (1)$$

где  $K(\omega)$  — спектральная чувствительность трубки по отклонению;  
 $E(\omega)$  — спектр исследуемого сигнала.

$K(\omega)$  определяет частотную характеристику системы. Для идеальной системы должно быть  $K(\omega) = \text{const } e^{-i\omega(\tau_0 + \tau_1)}$ , сигнал передается без искажений с запаздыванием на время, равное времени пролета электрона через отклоняющую систему  $\tau_0$  и от конца отклоняющей системы до экрана  $\tau_1$ .

Для реальной системы положим

$$K(\omega) = \text{const } [1 - \alpha(\omega)] e^{-i\omega(\tau_0 + \tau_1)}; \quad |\alpha(\omega)| \ll 1. \quad (2)$$

Искажения в отклоняющей системе бегущей волны отсутствуют, если во всем диапазоне частот выполнены следующие условия:

1) есть только бегущая волна, нет отражений на входе и от конечной нагрузки;

2) нет дисперсии в отклоняющей системе, т. е. волновой вектор  $k = \frac{\omega}{v_\phi}$ , где  $v_\phi$  — фазовая скорость волны, не зависящая от частоты;

- 3) нет потерь;
- 4) скорость электрона  $v_{эп} = v_{ф}$ ;
- 5) нет периодической структуры, в отклоняющей системе существует только одна пространственная гармоника;
- 6) волновое сопротивление отклоняющей системы не зависит от частоты.

В реальной системе эти условия выполнены лишь приближенно. Степень неидеальности реальной системы (1—6) может быть установлена косвенными методами: «холодными» измерениями ЭЛТ без подачи на трубку напряжений; расчетом; снятием частотной характеристики  $|K(\omega)|$ . Наша цель — связать результаты косвенных методов с искажениями импульса. Искажения за счет невыполнения каждого из условий (1—6) можно рассматривать отдельно.

Мы будем рассматривать переходную функцию отклоняющей системы. Если эта функция известна, то для произвольного сигнала отклик получается простым интегрированием его разложения по единичным функциям. Спектральная функция единичной ступеньки равна  $f(\omega) = \frac{1}{i\omega}$  [6].

Рассмотрим сначала влияние на переходную функцию отражения от конечной нагрузки. Уравнение движения электрона в направлении оси  $y$ , перпендикулярной оси отклоняющей системы, будет:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{e}{m} E; \quad E = E_0 e^{i(\omega - kv_{эп})t} + \Gamma_0 e^{-2ikt} E_0 e^{i(\omega + kv_{эп})t}, \quad (3)$$

где  $\Gamma_0$  — комплексный коэффициент отражения от конечной нагрузки;  $l$  — длина отклоняющей системы; начальные условия уравнения (3) будут:

$$y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0,$$

где  $t_0$  — момент влета электрона в систему.

Пусть  $\tau_0 = \frac{l}{v_{эп}}$  — время пребывания электрона в отклоняющей системе при  $v_{эп} = v_{ф}$ .

После первого интегрирования получаем:

$$y'(\omega) = \frac{eE_0\tau_0}{m} e^{i\omega t_0} \left[ e^{i\frac{\tau_0}{2}(\omega - kv_{эп})} \frac{\sin\frac{\tau_0}{2}(\omega - kv_{эп})}{\frac{\tau_0}{2}(\omega - kv_{эп})} + \Gamma_0 e^{i\frac{\tau_0}{2}(\omega + kv_{эп})} \frac{\sin\frac{\tau_0}{2}(\omega + kv_{эп})}{\frac{\tau_0}{2}(\omega + kv_{эп})} \right]. \quad (4)$$

В случае отсутствия дисперсии  $k = \frac{\omega}{v_{эп}}$  и при  $v_{эп} = v_{ф}$

$$y'(\omega) = \frac{eE_0\tau_0}{m} e^{i\omega t_0} \left( 1 + \Gamma_0 e^{-2i\omega\tau_0} \frac{e^{2i\omega\tau_0} - 1}{2i\omega\tau_0} \right).$$

Второе интегрирование дает:

$$y(\omega) = \frac{eE_0\tau_0^2}{m} e^{i\omega t_0} \left[ \frac{1}{2} + \Gamma_0 \frac{e^{-2i\omega\tau_0}}{2i\omega\tau_0} \left( \frac{e^{2i\omega\tau_0} - 1}{2i\omega\tau_0} - 1 \right) \right]. \quad (5)$$

Как видно из рис. 1, полное отклонение равно

$$Y(\omega) = y'(\omega) \frac{L}{v_{э\lambda}} + y(\omega); \quad |y(\omega)| \ll d, \quad (6)$$

$L$  — расстояние от отклоняющей системы до экрана;

$d$  — ширина зазора в отклоняющей системе.

Если  $y \approx d$ , то возникают нелинейные искажения из-за неоднородности поля в замедляющей системе и при прохождении электронов через послеускоряющую систему.

Легко показать, что вторым слагаемым можно пренебречь. Тогда для  $K(\omega)$  получим

$$K(\omega) = \frac{e\tau_0 L}{mv_{э\lambda}} \left( 1 + \Gamma_0 e^{-2i\omega\tau_0} \frac{e^{2i\omega\tau_0} - 1}{2i\omega\tau_0} \right) e^{-i\omega(\tau_0 + \tau_1)}. \quad (7)$$

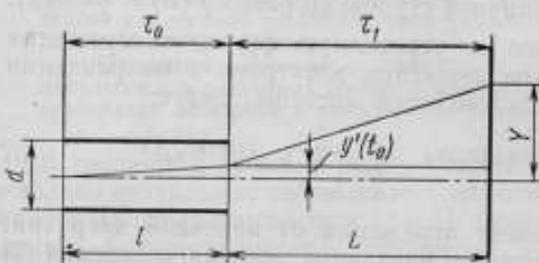


Рис. 1. Схема отклоняющей системы

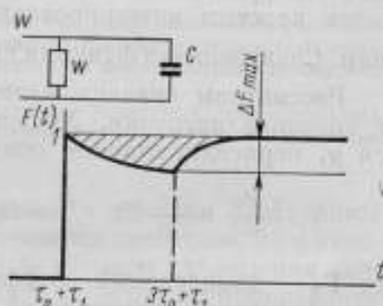


Рис. 2. Искажение импульса для случая емкостной проводимости на конце системы. (Здесь и в остальных рисунках искажения для наглядности увеличены.)

Для коэффициента отражения имеем [7]:

$$\Gamma_0 = \frac{Z - \omega}{Z + \omega}, \quad (8)$$

где  $Z$  — сопротивление нагрузки;

$\omega$  — волновое сопротивление спирали.

Рассмотрим различные частные случаи рассогласования на конце системы. При емкостной проводимости имеем:

$$\Gamma_0 = -\frac{i\omega\tau_R}{2 + i\omega\tau_R}, \quad \text{где } \tau_R = RC, \quad R = \omega.$$

Обозначим отклонение на экране  $Y(t) = \frac{eE_0\tau_0 L}{mv_{э\lambda}} e^{i\omega t_0} F(t)$ . Тогда

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau_0 + \tau_1 \\ 1 - \frac{\tau_R}{4\tau_0} \left[ 1 - e^{-\frac{2}{\tau_R}(t - \tau_0 - \tau_1)} \right], & \tau_0 + \tau_1 < t < 3\tau_0 + \tau_1 \\ 1 - \frac{\tau_R}{4\tau_0} e^{-\frac{2}{\tau_R}(t - 3\tau_0 - \tau_1)} \left( 1 - e^{-\frac{4\tau_0}{\tau_R}} \right), & t > 3\tau_0 + \tau_1 \end{cases}$$

Зависимость  $F$  от  $t$  показана на рис. 2. Структура формул для  $F(t)$  во всех случаях аналогична, поэтому будем приводить только графики.

Как видно из рис. 2, при наличии отражений на конце системы искажается форма переходной характеристики. Максимальный спад плоской части кривой определяется величиной

$$\Delta F_{\max} = \frac{\tau_R}{4\tau_0} \left( 1 - e^{-\frac{4\tau_0}{\tau_R}} \right). \quad (9)$$

Как видно из формулы (9), фронт импульса не меняется.

Можно показать, что аналогичное искажение импульса происходит и при последовательной индуктивности нагрузки, при этом в формуле (9)  $\Delta F$  меняет знак. При  $\tau_0 \approx 2 \cdot 10^{-9}$  сек и  $\tau_R = 0,32 \cdot 10^{-11}$ ;  $0,32 \cdot 10^{-10}$  сек (что соответствует к. б. в. = 0,8 при  $\lambda = 3$  см, и к. б. в. = 0,8 при  $\lambda = 30$  см) получаем, соответственно,  $\Delta F_{\max} \approx 0,04\%$ ;  $0,4\%$ .

Отклик на импульс в виде единичной ступеньки для случая, когда отклоняющая система нагружена только на активное сопротивление, отличающееся от волнового, показан на рис. 3. При  $t > 3\tau_0 + \tau_1$  все нестационарные процессы исчезают и искажений не происходит.

Для реальных отклоняющих систем характерны многократные отражения, при учете которых получаем:

$$K(\omega) \sim e^{i\omega(\tau_0 + \tau_1)} \left[ 1 + \Gamma_1 e^{-2i\omega l} \frac{e^{2i\omega\tau_0} - 1}{2i\omega\tau_0} + \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2i\omega l} + \Gamma_1^2 \Gamma_2 e^{-4i\omega l} \frac{e^{2i\omega\tau_0} - 1}{2i\omega\tau_0} + \dots \right], \quad (10)$$

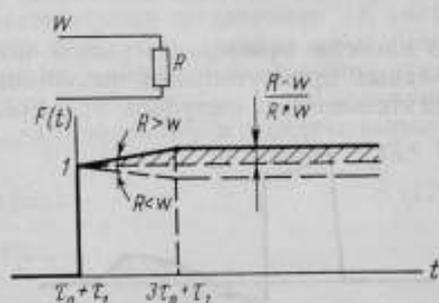


Рис. 3. Искажение импульса в случае, когда система нагружена только на активное сопротивление.

где  $\Gamma_1$  — коэффициент отражения от конечной нагрузки;

$\Gamma_2$  — коэффициент отражения от начала линии.

Каждый следующий член через промежуток времени  $2\tau_0$  вносит постепенно убывающую добавку. В прецизионных трубках должно быть  $\Gamma_1 \Gamma_2 \ll 1$ .

Найдем теперь искажение переходной характеристики, если  $v_{gr} = v_0(1+b)$ , т. е. при установлении напряжения  $U_{уст}$  допущена относительная ошибка, равная  $2b$ . Для  $K(\omega)$  при  $b > 0$  имеем:

$$K(\omega) \sim e^{-i\omega(\tau_0 + \tau_1)} \left[ \frac{1 - e^{-i\omega\tau_0 b}}{i\omega\tau_0 b} + \Gamma_0 \frac{e^{-i\omega\tau_0 b} - e^{-2i\omega\tau_0(1+b)}}{i\omega\tau_0(1+b)} \right]. \quad (11)$$

Переходная функция при наличии рассогласования типа емкости показана на рис. 4, а. В этом случае появляется запаздывание фронта на  $\tau_0 b$ , вызванное завалом высоких частот. Фронт остается линейным. Изломы осциллограммы несколько смещаются во времени. Максимальная амплитуда искажения равна

$$\Delta F_{\max} = \frac{\tau_R}{2\tau_0(2+b)} \left[ 1 - e^{-\frac{2\tau_0}{\tau_R}(2+b)} \right], \quad (12)$$

т. е. увеличивается с ростом  $b$ . Если  $b < 0$ , то линейность фронта нарушается (рис. 4, б).

Искажения импульса удобнее всего исследовать графически, представив импульс в виде разности двух сдвинутых единичных ступенек.

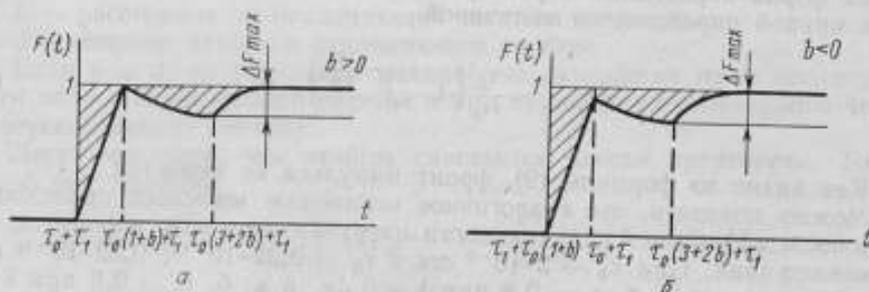


Рис. 4. Искажение импульса для случая емкостной проводимости на конце системы и наличия рассогласования ускоряющего напряжения.

В качестве примера на рис. 5 приведены расчетные осциллограммы идеальных прямоугольных импульсов при различных соотношениях между длительностью импульса  $T$  и временем пролета электронов  $\tau_0$ .

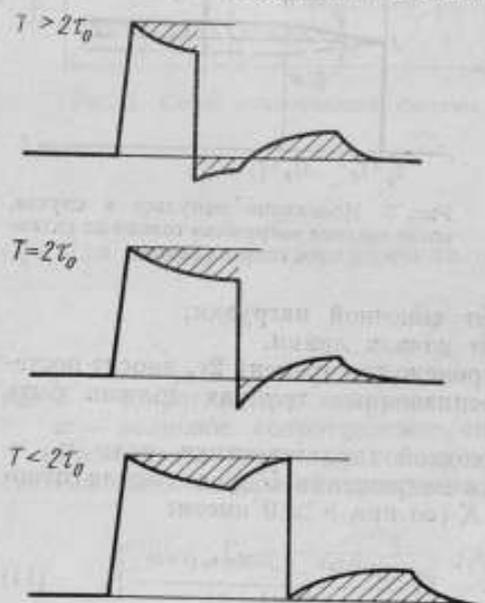


Рис. 5. Искажения прямоугольного импульса для различных соотношений между длительностью импульса  $T$  и временем пролета электронов  $\tau_0$ .

Рассмотрим теперь влияние на искажение импульсов дисперсии замедляющей системы. В этом случае необходимо учесть зависимость фазовой скорости от частоты и наличие полос запрета, в которых волны не распространяются. В простейшем случае отклоняющую систему бегущей волны можно изобразить в виде простейшей модели фильтр-цепочки нижних частот из сосредоточенных постоянных. Закон дисперсии такой линии можно представить в следующем виде:

$$\gamma = 2 \arcsin \frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right), \quad (13)$$

где  $\gamma$  — фазовый сдвиг на звено.  $2\omega_0$  равно частоте запирания спирали. Для  $\omega \ll 2\omega_0$  верно разложение

$$\gamma = \frac{\omega}{\omega_0} + \frac{1}{24} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^3, \quad (14)$$

где  $2\omega_0$  — частота, при которой разложение теряет силу.

Учет этого обстоятельства приведет к тому, что в формуле обращения интеграл будет взят в пределах от  $-\omega_0$  до  $+\omega_0$ , и закон дисперсии будет подчиняться формуле (14). При малой дисперсии, применяя разложение в ряд, получаем для  $\Delta F(t) = F(t) - 1$ :

$$\Delta F(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{si}(2\omega_0 T_1) + A \left[ \frac{2 \cos(2\omega_0 T_1)}{\omega_0 T_1} - \frac{\sin(2\omega_0 T_1)}{(\omega_0 T_1)^2} \right] - \\ - B \left[ \frac{2 \sin(2\omega_0 T_1)}{\omega_0 T_1} + \frac{2 \cos(2\omega_0 T_1)}{(\omega_0 T_1)^2} - \frac{\sin(2\omega_0 T_1)}{(\omega_0 T_1)^3} \right] - \frac{1}{2}, \quad (15)$$

где  $\operatorname{si} x$  — интегральный синус [9];  $T_1 = t - \tau_1 - \frac{\tau_0}{2} \left( 1 + \frac{v_{\text{эл}}}{l_1 \omega_0} \right)$ ;

$l_1$  — шаг спирали;

$A \approx 2,3$ ;  $B \approx 0,2$  — постоянные коэффициенты.

Так как всегда  $2\omega_0 T_1 \gg 1$ , то приближенно получаем:

$$\Delta F = \frac{\cos(2\omega_0 T_1)}{\pi 2\omega_0 T_1} (1 + 4\pi A) + 4B \frac{\sin(2\omega_0 T_1)}{2\omega_0 T_1}. \quad (16)$$

Вершина переходной характеристики осциллирует с очень большой частотой  $2\omega_0$ , что практически приводит лишь к небольшому увеличению ширины линии на плоской части осциллограммы. Завал высоких частот приводит к размыванию фронта волны на время  $\sim \omega_0^{-1}$ .

В заключение отметим следующее. В готовых приборах часто проверяют равномерность частотной характеристики отклонения  $|K(\omega)|$ . Спектр видеоимпульса содержит большое количество спектральных компонент, и изображение импульса получается в результате сложения этих компонент в различных фазах. Поэтому для перечисленных выше примеров погрешностей амплитуды импульса  $\Delta F_{\text{max}}$  и коэффициента передачи выполняется соотношение

$$\Delta F_{\text{max}} \ll |a(\omega)|. \quad (17)$$

Например, для емкостной проводимости

$$\Delta F_{\text{max}} = \frac{\tau_R}{4\tau_0} \left( 1 - e^{-\frac{4\tau_0}{\tau_R}} \right); \quad |a(\omega)| = \frac{\sin \omega \tau_0}{\tau_0 \sqrt{1 + (\omega \tau_R)^2}},$$

т. е. с большой точностью выполняется условие (17). Таким образом, требование равномерности частотной характеристики является более жестким.

#### Литература

1. Букви А. Н., Филиппов М. М., Исаев А. Э. Осциллографирование колебаний сверхвысокой частоты, ЛГУ, 1963.
2. Льюс И., Уэльс Ф. Миллимикросекундная импульсная техника, М., ИЛ, 1956.
3. Стекольников И. С. Электронная осциллография кратковременных процессов, М.—Л., Гостехиздат, 1952.
4. Чернушенко А. М. Применение замедляющих систем для отклонения электронного пучка в осциллографических трубках, Радиотехника и электроника, 6, 1959.
5. Стахов Е. А. Установка для осциллографического наблюдения КВВ в с. в. ч.-трактах, Измерительная техника, II, 1960.
6. Харкевич А. А. Спектры и анализ, М., Гостехиздат, 1957.
7. Справочник по волноводам, Изд-во «Советское Радио», 1952.
8. Босый Н. Д. Электрические фильтры, Киев, Гостехиздат УССР, 1955.
9. Янке Е. и Эмде Ф. Таблицы функций, М.—Л., Гостехиздат, 1948.

Статья поступила 30 ноября 1964 г.

### III. ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА

В. А. БЕЛЯКОВ, С. В. ХУДЯКОВ

УДК 539.143.44

#### КВАДРУПОЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ ОКОЛОСФЕРИЧЕСКИХ ЯДЕР

На основе теории конечных ферми-систем вычисляются квадрупольные моменты большой группы нечетных ядер. Расчеты хорошо согласуются с экспериментальными данными.

В последнее время в работах А. Б. Мигдала и сотрудников [1—8] развивается и успешно применяется для описания основных и низко-возбужденных состояний ядер теория конечных ферми-систем. Значительным достижением этой теории является объяснение экспериментальных значений магнитных моментов большой группы ядер [5].

В настоящей статье по аналогии с работой [5] теория конечных ферми-систем применяется для вычисления квадрупольных моментов нечетных ядер. Рассматриваются ядра, которые можно представить как четно-четный сферический остов плюс нуклон (нуклонная дырка).

Сильное взаимодействие добавленного нуклона (дырки) с нуклонами остова приводит к тому, что квадрупольный момент ядра, вызванный добавлением нуклона (дырки), существенно отличается от одночастичного значения. Уравнения теории, используемые в данной работе, точно учитывают это взаимодействие и позволяют вычислить квадрупольный момент, индуцированный частицей (дыркой).

Изменение квадрупольного момента ядра  $\delta Q$  при добавлении к ядру нуклона определяется выражением:

$$\delta Q = S p \delta \rho^n \hat{Q}, \quad (1)$$

где  $\delta \rho^n$  — изменение матрицы плотности протонов в ядре;

$\hat{Q}$  — оператор квадрупольного момента.

Если ядро, к которому добавляется частица (дырка), сферическое, то  $\delta Q$  совпадает с квадрупольным моментом рассматриваемого ядра. Далее будем рассматривать только такие ядра.

Из сказанного выше следуют ограничения на рассматриваемые ядра:

- 1) ядро должно иметь квази-частичную (квази-дырочную) природу;
- 2) исходное четно-четное ядро должно быть сферическим.

Этим условиям прежде всего удовлетворяют ядра «маг» и плюс (минус) один нуклон. Сюда же можно отнести многие ядра, у которых на заполняющейся  $j$ -подоболочке имеется один нуклон или одна нуклонная дырка. Для таких ядер, как правило, исходные четно-четные ядра являются сферическими. Условия сферичности исходных четно-четных ядер нарушаются только для ядер редкоземельных элементов и трансуранов. Среди ядер

с  $A < 100$  имеется около 50 изотопов, удовлетворяющих поставленным условиям.

Удобнее выражать  $\delta Q$  не через изменение протонной матрицы плотности, а через матричный элемент квадрупольной вершины  $T(Q) = \begin{bmatrix} T_p(Q) \\ T(Q) \end{bmatrix}$ . Величина  $T(Q)$  вводится по аналогии с  $T(\sigma)$  [5]. При добавлении протона  $\langle \lambda_0 | T_p(Q) | \lambda_0 \rangle = T_p^{\lambda_0 \lambda_0}$  дает квадрупольный момент ядра. ( $\lambda_0$  — совокупность квантовых чисел  $n, l, j, m$ , описывающих состояние добавленного протона). При добавлении протонной дырки  $T_p^{\lambda_0 \lambda_0}$  дает величину квадрупольного момента с противоположным знаком.

$T(Q)$  в  $\lambda$ -представлении удовлетворяет уравнению:

$$T^{\lambda_1 \lambda_2} = T^{0 \lambda_1 \lambda_2} + \sum_{\lambda \lambda'} \langle \lambda_1 \lambda_2 | a^2 \Gamma^{00} | \lambda \lambda' \rangle L_{\lambda \lambda'} T^{\lambda \lambda'}. \quad (2)$$

Величины, входящие в уравнение (2), являются матрицами:

$$T^{00} = \begin{pmatrix} T_p^{00} \\ T_n^{00} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sqrt{\frac{4\pi}{5}} r^2 Y_{20}(\theta, \varphi) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma^{00} = \begin{pmatrix} \Gamma_{pp}^{00} & \Gamma_{pn}^{00} \\ \Gamma_{np}^{00} & \Gamma_{nn}^{00} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} L^p & 0 \\ 0 & L^n \end{pmatrix},$$

$$L_{\lambda \lambda'}^i = \frac{E_\lambda^i E_{\lambda'}^i - e_\lambda^i e_{\lambda'}^i + \Delta_\lambda^i \lambda_\lambda^i}{2E_\lambda^i E_{\lambda'}^i (E_\lambda^i + E_{\lambda'}^i)}$$

$$\langle \lambda_1 \lambda_2 | \Gamma_{ik}^{00} | \lambda \lambda' \rangle = \int [\Phi_{\lambda_1}^i(r_1)]^* \Phi_{\lambda_2}^i(r_2) \times \\ \times \Gamma_{ik}^{00}(r_1, r_2, r_3, r_4) [\Phi_{\lambda}^k(r_3)]^* \Phi_{\lambda'}^k(r_4) dr_1 dr_2 dr_3 dr_4.$$

Индексы  $i, k$  могут принимать два значения:  $n$  — соответствует нейтронам,  $p$  — протонам,  $\Phi_\lambda^i(r)$  — одночастичная волновая функция нуклона,  $a$  — константа перенормировки.

$E_\lambda^i = \sqrt{(e_\lambda^i)^2 + (\Delta_\lambda^i)^2}$ ;  $e_\lambda^i$  — нуклонные одночастичные уровни энергии, отсчитанные от химического потенциала  $\mu^i$ ,  $\Delta_\lambda^i = a \Delta_{\lambda\lambda}^i \cdot \Delta_{\lambda\lambda}^i$  — диагональный матричный элемент амплитуды перехода нуклона в дырку плюс конденсатную пару.

Для скалярных вершин затравочная вершина не перенормируется [6], поэтому в нашем случае  $T^{00}$  просто совпадает с затравочной вершиной

$$\tau = \begin{pmatrix} 2 \sqrt{\frac{4\pi}{5}} r^2 Y_{20} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\Gamma^{00}$  характеризует взаимодействие нуклонов, причем учитывается взаимодействие нуклонов не только одного, но и разного сорта:  $\Gamma_{pp}^{00} = \Gamma_{pn}^{00} \neq 0$ .  $\Gamma^{00}$  не может быть найдена теоретическим путем и описывается вводимыми в теорию константами. Эти константы должны быть определены из сравнения теоретических расчетов с данными эксперимента. Одним из критериев правильности теории является совпадение констант, найденных в результате рассмотрения различных явлений. Поэтому желательно рассмотрение различных свойств ядер в рамках теории.

Будем считать [5], что в  $r$ -представлении

$$\Gamma_{r_1 r_2 r_3 r_4}^0 = \Gamma^0(r_1) \delta(r_1 - r_2) \delta(r_1 - r_3) \delta(r_1 - r_4). \quad (3)$$

Поскольку ядро представляет собой конечную систему, то взаимодействие нуклонов во внутренней и периферийной областях ядра существенно различается. Во внутренней области эффективное взаимодействие носит характер отталкивания  $\Gamma^0 = \Gamma_{ex}^0 > 0$ . В периферийной области ядра между нуклонами действует эффективное притяжение  $\Gamma^0 = \Gamma_{ex}^0 < 0$ , причем  $|\Gamma_{ex}^0| > |\Gamma_{in}^0|$ . Поэтому, несмотря на то, что периферийная область мала ( $\sim \frac{1}{\Lambda^3}$ ) по сравнению с внутренней, она может быть существенна [1].

Предельные значения  $\Gamma_{ex}^0(r)$  при  $r \rightarrow \infty$  можно связать с амплитудой рассеяния двух частиц в пустоте на нулевой угол [9]. Эти значения вычислены в работе [10].

Вид перехода от  $\Gamma_{ex}^0$  к  $\Gamma_{in}^0$  также может быть найден теоретически. Значение  $\Gamma_{in}^0$  следует взять из сравнения теоретических расчетов с экспериментальными данными.

В настоящей работе точное решение задачи о переходе от  $\Gamma_{in}^0$  к  $\Gamma_{ex}^0$  заменяется приближенным. Следуя работе [6], используем интерполяционную формулу:

$$\Gamma_{(r)}^0 = \Gamma_{in}^0 + \frac{(\Gamma_{in}^0 - \Gamma_{ex}^0)[n(r) - n_0]}{n_0}. \quad (4)$$

Здесь  $\Gamma_{in}^0$  и  $\Gamma_{ex}^0$  являются константами,

$n(r)$  — плотность нуклонов в ядре как функция радиуса,

$n_0$  — средняя плотность нуклонов в ядре.

$\Gamma^0$  связано с безразмерными величинами  $f$  и  $g$  следующим соотношением

$$a^2 \Gamma^0 \frac{\partial n}{\partial \epsilon_0} = f + q \sigma \sigma'. \quad (5)$$

Поскольку затравочная вершина  $T^0$  на спиновые индексы не действует, то  $g \sigma \sigma'$  не дает вклада в  $T$ . Поэтому в формуле (4) для нашей задачи достаточно ограничиться только  $f$ . Для определения  $f$  воспользуемся формулой (4). Следует отметить, что попытка решать уравнения теории, пренебрегая фактом интерполяции, т. е. считая, что  $f_{in} = f_{ex} = f$ , приводит к противоречию. Знаки констант, определенные из изотопического смещения и квадрупольных моментов, оказываются противоположными. Использование интерполяционной формулы (4) позволяет с помощью одних и тех же констант  $f_{in}$  и  $f_{ex}$  достаточно хорошо объяснить как квадрупольные моменты, так и изотопическое смещение [1].

Весьма существенным в задаче является учет парной корреляции. Пренебречь ею, т. е. положить в выражении (2)  $\Delta_\lambda = 0$ , можно только для околomagических ядер, энергия парной корреляции у которых гораздо меньше магического просвета. В отличие от многих работ, например [11, 12], квадрупольные моменты вычисляются без введения квадруполь-квадрупольных сил.

#### Решение уравнения (2) и обсуждение результатов

Для сферических ядер угловая зависимость точной вершины совпадает с угловой зависимостью затравочной вершины (см. приложение), и уравнение (2) переходит в уравнение для радиальной части вершины.

Из формулы (1.12) приложения, положив  $L=2$ , для радиальной части вершины  $T(r)$  [ $T(Q) = T(r) Y_{20}(\theta, \varphi)$ ] получим уравнение

$$T^{vv'} = T^{vv'} + \frac{a^2}{20\pi} \sum_{v_1 v_1'} |Z(\epsilon_{1j_1}; \epsilon_{1j_1}'; \frac{1}{2} 2)|^2 \Gamma_{v_1 v_1'}^{vv'} L_{v_1 v_1'} T^{v_1 v_1'}. \quad (6)$$

Здесь  $v$  обозначает совокупность квантовых чисел  $n, l, j$ . Раскрывая изотопические матрицы, получим

$$f_p^{vv'} = 2 \sqrt{\frac{4\pi}{5}} (r^2)^{vv'} + \frac{a^2}{20\pi} \sum_{v_1 v_1'} (\Gamma_{pp}^{vv'})_{v_1 v_1'} |Z_{v_1 v_1'}| |Z_{v_1 v_1'}|^2 L_{v_1 v_1'}^p T_p^{v_1 v_1'} + \\ + \frac{a^2}{20\pi} \sum_{v_1 v_1'} (\Gamma_{pn}^{vv'})_{v_1 v_1'} |Z_{v_1 v_1'}| |Z_{v_1 v_1'}|^2 L_{v_1 v_1'}^n T_n^{v_1 v_1'}; \quad (7)$$

$$T_n^{vv'} = \frac{a^2}{20\pi} \sum_{v_1 v_1'} (\Gamma_{np}^{vv'})_{v_1 v_1'} |Z_{v_1 v_1'}| |Z_{v_1 v_1'}|^2 L_{v_1 v_1'}^p T_p^{v_1 v_1'} + \\ + \frac{a^2}{20\pi} \sum_{v_1 v_1'} (\Gamma_{nn}^{vv'})_{v_1 v_1'} |Z_{v_1 v_1'}| |Z_{v_1 v_1'}|^2 L_{v_1 v_1'}^n T_n^{v_1 v_1'}.$$

$(\Gamma_{ik}^{vv'})_{v_1 v_1'}$  определяется формулой (1.13),  $\Gamma^0$  связана с  $f$  формулой (4).

Искомая величина

$$\delta Q = \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \frac{2j_0 - 1}{2j_0 + 2} T^{v_0 v_0}. \quad (8)$$

Верхний знак относится к квазичастичным ядрам, нижний — к квазидырочным.

Уравнение (7) решалось на электронно-вычислительной машине. В качестве системы одночастичных уровней для нейтронов и протонов использовалась схема Нильссона [13]. Величины  $\Delta_\lambda$  и  $\mu$ , входящие в  $L$ , могут быть точно найдены в рамках теории. Тем не менее в качестве предварительного приближения представляется интересным решить уравнение (7), сделав некоторые допущения относительно  $\Delta_\lambda$  и  $\mu$ .

В настоящей работе предполагалось, что  $\Delta_\lambda^p = \Delta_p$  и  $\Delta_\lambda^n = \Delta_n$  не зависят от индексов и являются одними и теми же константами для всех переходов в рассматриваемом ядре. Значения  $\mu^p$  и  $\mu^n$  находились из приближенного решения уравнений

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \left( 1 - \frac{\epsilon_{\lambda}^p}{V(\Delta_n)^2 + (\epsilon_{\lambda}^p)^2} \right), \\ N = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \left( 1 - \frac{\epsilon_{\lambda}^n}{V(\Delta_p)^2 + (\epsilon_{\lambda}^n)^2} \right). \quad (9)$$

Значения  $\Delta_n$  и  $\Delta_p$  брались из работ [11, 14].

Переходы, допустимые в формуле (7), определяются правилами отбора для угловой части  $T(Q)$ , т. е. правилами отбора для  $Y_{20}(Q)$ . При решении уравнения учитывались переходы через одну оболочку, между соседними

оболочками и внутри одной оболочки. В качестве радиальных волновых функций использовались осцилляторные радиальные функции. В формуле (4) плотность нуклонов бралась в виде

$$n(r) = \frac{n_0}{1 + e^{\alpha(r - R_0)}}, \quad (10)$$

где  $\alpha = 1,55f^{-1}$ ,  $R_0 = 1,2A^{1/3}f$ .

Результаты решения уравнения (7) приведены в табл. 1 и 2 (см. приложение). В табл. 1 даны результаты решения (7) для ядер с нечетным протоном, в табл. 2 — для ядер с нечетным нейтроном.

При расчетах полагалось, что  $f^{pn} = f^{pp}$ . Для ядер с  $A < 50$  расчеты проводились при  $f_{in}^{pp} = 1,3$ ,  $f_{ex}^{pp} = -3,2$ ,  $f_{in}^{np} = 0,6$ ,  $f_{ex}^{np} = -2,6$ . Для ядер с  $A > 50$   $f_{in}^{pp} = 1,3$ ,  $f_{ex}^{pp} = -2,9$ ,  $f_{in}^{np} = 0,6$ ,  $f_{ex}^{np} = -2,3$  (см. рисунок).

Как видно из таблиц, при указанных значениях констант полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Если произвести расчеты для всех ядер с одними и теми же константами, например,  $f_{in}^{pp} = 1,3$ ,  $f_{ex}^{pp} = -3,0$ ,  $f_{in}^{np} = 0,6$ ,  $f_{ex}^{np} = -2,4$ , то для ядер с  $A < 50$  получаются заниженные, а для  $A > 50$  завышенные значения квадрупольных моментов. Однако и при этом вычисленные значения не более чем в два раза отличаются от экспериментальных значений. Наблюдаемая зависимость  $f$  от  $A$  связана с выбранной моделью.

Значения пустотных констант  $f_{ex}$  в значительной степени зависят от поведения волновых функций в области размытия ядерного потенциала. Осцилляторные функции в этой области затухают несколько слабее, чем реальные функции в ядре. Поэтому интерполяция в осцилляторной модели влияет на результаты расчетов сильнее, чем в более реалистических моделях, например, в модели Вудса—Саксона. Если для легких ядер  $A < 40$  различие волновых функций в осцилляторной модели и модели Вудса—Саксона очень незначительно, то при  $A > 50$  различие становится существенным. Это приводит к тому, что наши расчеты для  $A > 50$  дают заниженные значения пустотных констант. Источником неточностей в наших расчетах является также предположение, что радиус ядра и радиус

интерполяции даются соотношением  $R_0 = r_0 A^{1/3}f$ , где  $r_0 = 1,2$ . На самом деле величина  $r_0 = 1,2$  является средней для осцилляторной ямы. Действительные же значения  $r_0$  для ядер в осцилляторной модели колеблются около этого значения. Повысить точность расчетов можно было бы, найдя более точные значения  $\Delta$  и  $\mu$ . Предположив  $\Delta = \text{const}$ , это можно сделать, следуя работе [15]. Однако расчеты показывают, что при  $\Delta$  больше или порядка расстояния между уровнями вблизи ферми-поверхности решение слабо зависит от  $\Delta$  и приближение  $\Delta = \text{const}$  является вполне удовлетворительным.

Решение уравнения (7) не меняется, если одновременно изменять  $f_{in}$  и  $f_{ex}$ , но так, чтобы приращения  $f_{in}$  и  $f_{ex}$ ,  $\Delta f_{in}$  и  $\Delta f_{ex}$  были связаны соотношением  $\Delta f_{in} = k \Delta f_{ex}$ , где  $k$  — константа. Более того, в наших расчетах по осцилляторной модели,  $k$  с хорошей точностью оказывается одной и той же константой для всех ядер (см. рисунок).

Постоянство  $k$  для всех ядер приводит к неоднозначности при выборе констант. Значение ядерных констант  $f_{in}^{pp} = 1,3$ ,  $f_{in}^{np} = 0,6$  были выбраны для согласования с данными работ [6], [8]. Отличие пустотных констант, используемых в данной работе, от констант, приводимых в работе [6], связано не только с выбранной моделью, но и с тем, что мы не ограничивались при решении уравнения (7) первой итерацией.

Из таблиц видно, что рассчитанные значения  $Q$  в общем хорошо согласуются с экспериментальными значениями. Характерно, что для ядер, у которых заполняется подоболочка  $1d_{5/2}$  получены большие значения  $Q$ . Это находится в соответствии с экспериментальными данными о деформации ядер в этой области (изотопы Mg и Al). В то же время при заполнении подоболочки  $1d_{3/2}$   $Q$  не велики (изотопы S, Cl, K), хотя одночастичные значения  $Q$  для  $1d_{5/2}$  и  $1d_{3/2}$  отличаются незначительно.

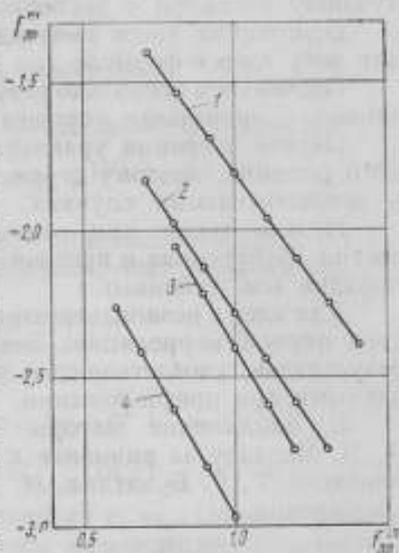
Известно, что схема Нильссона дает иногда не только неправильные энергетические разности между одночастичными уровнями, но и неправильный порядок следования одночастичных уровней. Это, в частности, относится к подоболочкам  $1f_{5/2}$  и  $2p_{3/2}$ . Поэтому при рассмотрении ядер, у которых заполнялись указанные подоболочки (изотопы Ni, Cu, Zn, Ga), значения их спинов брались из экспериментальных данных, хотя энергетические разности вычислялись по схеме Нильссона. Это практически не повлияло на результаты, так как значение  $\Delta$  больше расстояния между соответствующими уровнями и неточность в их расположении слабо влияет на решение равенства (7).

Особый интерес представляет ядро  $Nb^{93}$ . Это единственное ядро среди ядер с протонной частицей (дыркой), для которого экспериментальное значение квадрупольного момента меньше одночастичного. Расчет квадрупольного момента по схеме Нильссона дает значение  $Q$  больше одночастичного. По всей видимости, причина этого заключается в том, что схема Нильссона дает завышенное значение энергетической разности уровней  $1g_{5/2}$  и  $2d_{5/2}$ . Уменьшение этой разности приводит к уменьшению вычисляемого значения  $Q$ . В пользу целесообразности уменьшения этой разности свидетельствует хорошо известный факт, что спаривание частиц приводит к значительному понижению энергии одночастичных уровней с большим моментом. В ядре  $Nb^{93}$ , кроме заполненной оболочки, на подоболочке  $2d_{5/2}$  имеется четное число нейтронов, поэтому для уровня  $2d_{5/2}$  этот эффект может оказаться существенным.

### Выводы

Часть результатов, полученных в работе, связана со сделанными допущениями и принятой моделью, а часть носит общий характер.

Расчеты подтверждают тот факт, что величины  $f$  с достаточной точностью можно считать одними и теми же константами для всех ядер. Однако численное значение констант связано применяемым в работе приближением. Действительно, с одной стороны, осцилляторные функции являются хорошим приближением только для легких ядер, а с другой



Примеры зависимости  $f_{ex}^{pp}$  от  $f_{in}^{pp}$  при условии  $Q_{теор} (f_{ex}^{pp}, f_{in}^{pp}) = Q_{эксп}$  для ядер  ${}_{32}Ge^{73}$ ,  ${}_{18}S^{33}$ ,  ${}_{17}Cl^{35}$ ,  ${}_{19}K^{39}$ .

стороны, введение интерполяции является не вполне корректной процедурой в осцилляторном потенциале, для которого о радиусе ямы можно говорить только условно. Тем не менее проведение расчетов для двух групп констант нам представляется целесообразным, поскольку в настоящее время схема Нильссона широко используется в ядерных расчетах и для нее желательно знать константы, использование которых приводит к наилучшему согласию с экспериментальными данными.

Отмеченная ранее неоднозначность в выборе  $f_{in}$  и  $f_{ex}$  (постоянство  $k$  для всех ядер в формуле для  $\Delta f$ ) связано с применяемой моделью.

Подчеркнем несколько результатов, носящих общий характер и не связанных с принятыми упрощениями.

Первая итерация уравнения (7), как правило, очень далека от точного решения, поэтому ограничиваться первой итерацией можно только в исключительных случаях.

Нельзя также при решении задачи ограничиваться одним типом частиц. Нейтронная и протонная суммы дают в решении слагаемые одного порядка (см. таблицы).

Для ядер с незаполненными оболочками очень существенным является учет парной корреляции. Без учета спаривания невозможно добиться результатов, удовлетворительно согласующихся с экспериментальными данными при предположении, что  $f$  постоянно.

В заключение авторы выражают признательность профессору А. Б. Мигдалу за внимание к работе, а также благодарят М. А. Микунлинского, Г. Г. Бунатяна, М. А. Тронцкого, В. Гольдберга за полезные обсуждения.

### Приложение

Для сферических ядер уравнение (2) можно значительно упростить, используя вырождение одночастичных энергетических уровней по проекции момента  $m$ . При этом оказывается, что угловая зависимость точной вершины совпадает с угловой зависимостью затравочной вершины, и уравнение (2) сводится к уравнению для радиальной части вершины. Покажем, как проводится упрощение (2), на примере уравнения для одного типа частиц. В уравнении для двух типов частиц упрощение выполняется аналогичным образом.

Рассмотрим уравнение для вершины с затравкой  $g_L^0(r) Y_{L0}(n)$  (уравнение для квадрупольной вершины получится, если положить  $g_L^0(r) = 2 \sqrt{\frac{4\pi}{5}} r^2$  и  $L = 2$ ). Будем считать, что  $\Gamma^0(r_1, r_2, r_3, r_4)$  определяется формулой (3). Тогда уравнение для  $T(r)$  в  $r$ -представлении запишется:

$$T(r) = g_L^0(r) Y_{L0}(n) + a^2 \Gamma^0(r) \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \Phi_{\lambda_1}^*(r) \Phi_{\lambda_2}(r) L_{\lambda_1 \lambda_2} T^{\lambda_1 \lambda_2}. \quad (1.1)$$

Решение уравнения (1.1) естественно искать в виде:

$$T(r) \sum_k g_k(r) Y_{k0}(n). \quad (1.2)$$

Подставим это выражение в (1.1), умножим левую и правую части полученного выражения на  $Y_{M0}(n)$  и проинтегрируем по углам. Вследствие ортонормированности шаровых функций для  $g_k(r)$  получим

$$g_M(r) = g_L^0(r) \delta_{LM} + a^2 \Gamma^0(r) \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \int \Phi_{\lambda_1}^*(r) \Phi_{\lambda_2}(r) Y_{M0}(n) dn \times \\ \times L_{\lambda_1 \lambda_2} \sum_k \int \Phi_{\lambda_1}(r') \Phi_{\lambda_2}^*(r') g_k(r') Y_{k0}(n') dv' \quad (1.3)$$

$$\delta_{LM} \begin{cases} 1 & \text{при } L = M \\ 0 & \text{при } L \neq M \end{cases}$$

Для дальнейших преобразований необходимо воспользоваться явным видом угловой зависимости одночастичных волновых функций. Одночастичные волновые функции в сферическом ядре определяются выражением:

$$\varphi_{nlm}(r) = R_{nl}(r) \Omega_{lm}(n), \quad (1.4)$$

где  $R_{nl}(r)$  — радиальная часть волновой функции;

$\Omega_{lm}(n)$  — шаровой спинор.

Его компоненты связаны с шаровыми функциями соотношением

$$(\Omega_{lm}(n))^\mu = C_{lm-\mu}^{jm} \frac{1}{l_1 m_1 - \mu} Y_{lm-\mu}(n), \quad (1.5)$$

$C_{l_1 m_1, l_2 m_2}^{lm}$  — коэффициенты Клебша—Гордана,  $\mu$  принимает значения  $\pm 1/2$ .

Подставим в (1.3) выражение для одночастичных волновых функций (1.4). Получим

$$g_M(r) = g_L^0(r) \delta_{LM} + a^2 \Gamma^0(r) \sum_{\substack{n_1 l_1 m_1 \\ n_2 l_2 m_2}} R_{n_1 l_1}(r) R_{n_2 l_2}(r) \times \\ \times \int \Omega_{l_1 l_1 m_1}^*(n) \Omega_{l_2 l_2 m_2}(n) Y_{M0}(n) dn L_{n_1 l_1; n_2 l_2} \sum_{\mathbf{z}} \int R_{n_1 l_1}(r') \times \\ \times R_{n_2 l_2}(r') g_k(r') r'^2 dr' \int \Omega_{l_1 l_1 m_1}(n') \Omega_{l_2 l_2 m_2}^*(n') Y_{k0}(n') dn'. \quad (1.6)$$

Величина  $L_{\lambda_1 \lambda_2}$  зависит от одночастичных энергий  $\epsilon_{\lambda_1}, \epsilon_{\lambda_2}$ . Опустив в (1.6) индексы  $m_1 m_2$  у  $L_{\lambda_1 \lambda_2}$ , мы воспользовались вырождением одночастичной энергии по проекциям полного момента.

Теперь в выражении (1.6) можно выполнить суммирование по  $m_1, m_2$ . Для этого воспользуемся формулой, выражающей входящие в (1.6) угловые интегралы через  $3-j$  и  $6-j$  символы.

$$\int \Omega_{l_1 l_1 m_1}^*(n) \Omega_{l_2 l_2 m_2}(n) Y_{k0}(n) dn = (-1)^{3m_1+l_1+l_2+k} \frac{1}{2} \times \\ \times \left[ \frac{1}{4\pi} (2l_1+1)(2l_2+1)(2j_1+1)(2j_2+1)(2k+1) \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \begin{pmatrix} l_1 l_2 k \\ 0 0 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 j_2 k \\ m_1 m_2 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 j_2 k \\ l_2 l_1 \frac{1}{2} \end{Bmatrix}. \quad (1.7)$$

Из свойств  $3-j$  символов следует, что интеграл (1.7) отличается от нуля только при  $m_1 = m_2$ . Поэтому в формуле (1.6) следует положить  $m_1 = m_2$ .

Подставляя выражение (1.7) в (1.6), получим

$$g_M(r) = g_L^0(r) \delta_{LM} + a^2 \Gamma^0(r) \sum_{\substack{v_1 v_2 k \\ v_1 v_2 k}} R_{v_1}(r) R_{v_2}(r) L_{v_1 v_2} \times \\ \times g_k^{v_1 v_2} \begin{pmatrix} l_1 l_2 M \\ 0 0 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 l_2 k \\ 0 0 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} i_1 i_2 M \\ l_2 l_1 \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} i_1 i_2 k \\ l_2 l_1 \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \sum_{m_1} \begin{pmatrix} l_1 l_2 k \\ m_1 - m_1 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 l_2 M \\ m_1 - m_1 0 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Здесь  $v$  обозначает совокупность квантовых чисел  $n, l, j$ , а  $g_k^{v_1 v_2}$  — матричный элемент  $g_k(r)$  по радиальным функциям. При суммировании по  $m_1$  воспользуемся свойством ортогональности  $3-j$  символов:

$$\sum_{m_1 m_2} \begin{pmatrix} j_1 j_2 j_3 \\ m_1 m_2 m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 j_2 j_3 \\ m_1 m_2 m_3 \end{pmatrix} = (2j_3+1)^{-1} \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_2 m_3} \delta(j_1 j_2 j_3). \quad (1.9)$$

где  $\delta(j_1 j_2 j_3) = 0$ , если  $j_1 j_2 j_3$  не удовлетворяют условию треугольника, и равно 1, если они удовлетворяют этому условию. Тогда (1.8) переписывается:

$$g_M(r) = g_L^0(r) \delta_{LM} + a^2 \Gamma^0(r) \sum_{v_1 v_2} R_{v_1}(r) R_{v_2}(r) \times \\ \times \frac{|Z(l_1 j_1; l_2 j_2; \frac{1}{2} M)|^2}{4\pi(2M+1)} L_{v_1 v_2} g_M^{v_1 v_2}. \quad (1.10)$$

Здесь  $Z$  — функция, введенная Биденхарном, Блаттом и Роузом (см., например, [16, 17]).

$$Z(abcd; ef) = i^{f-a+c} (-1)^{2a+b+d} \times \\ \times [(2a+1)(2b+1)(2c+1)(2d+1)(2f+1)]^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} acf \\ 000 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} abc \\ def \end{Bmatrix}. \quad (1.11)$$

(1.10) представляет собой интегральные уравнения для  $g_M$ , причем неоднородность уравнения отлична от 0 только при  $L = M$ . Поэтому отличным от 0 будет только решение для  $g_L(r)$ , а полная вершина имеет вид  $T(r) = g_L(r) Y_{L0}(n)$ .

Таким образом, угловая зависимость полной вершины для сферических ядер совпадает с угловой зависимостью затравочной вершины  $T^0(r)$ .

Обычно в задачах достаточно знать не  $g_L(r)$ , а только матричные элементы  $g_L(r)$  по радиальным волновым функциям  $g_L^{v_1 v_2}$ . Из (1.10) для  $g_L^{v_1 v_2}$  легко получить

$$g_L^{v_1 v_2} = g_L^{0v_1 v_2} + a^2 \sum_{vv'} \Gamma_{vv'v_2}^{0v_1 v_2} \frac{|Z(l_1 j_1; l_2 j_2; \frac{1}{2} L)|^2}{4\pi(2L+1)} L_{vv'} g_L^{vv'}. \quad (1.12)$$

где

$$\Gamma_{vv'v_2}^{0v_1 v_2} = \int R_{v_1}(r) R_{v_2}(r) \Gamma^0(r) R_v(r) R_{v'}(r) r^2 dr. \quad (1.13)$$

Таблица 1

Квадрупольные моменты ядер с нечетным протоном

Ядро	$l$	$\Delta_p$	$\mu_p$	$\Delta_n$	$\mu_n$	$\sigma$	$Q^I$	$Q_{\text{теор}}$	$Q_{\text{эксп}}$	$\frac{\Sigma_p}{\Sigma_n}$
${}^5\text{B}^{11}$	3/2	0	—	0	—	+0,022	0,019	0,068	0,053	0,1
${}^{13}\text{Al}^{25}$	5/2	0,20	3,49	0,19	3,40	0,058	0,078	0,34	—	0,9
${}^{15}\text{Al}^{27}$	5/2	0,20	3,49	0,21	3,50	0,060	0,076	0,24	0,15	0,8
${}^{17}\text{Al}^{29}$	5/2	0,20	3,49	0,14	3,58	0,061	0,074	0,23	—	0,7
${}^{17}\text{Cl}^{33}$	3/2	0,14	3,57	0,15	3,58	-0,045	-0,049	-0,10	—	0,6
${}^{17}\text{Cl}^{35}$	3/2	0,13	3,57	0,16	3,71	-0,046	-0,048	-0,077	-0,079	0,5
${}^{17}\text{Cl}^{37}$	3/2	0,14	3,57	0	—	-0,047	-0,046	-0,066	-0,062	0,6
${}^{19}\text{K}^{39}$	3/2	0	—	0	—	0,047	0,048	0,062	0,070	1,1
${}^{19}\text{K}^{41}$	3/2	0	—	0,18	4,04	0,048	0,048	-0,068	-0,085	0,5
${}^{21}\text{Sc}^{41}$	7/2	0	—	0	—	-0,10	-0,12	-0,14	—	1,6
${}^{21}\text{Sc}^{43}$	7/2	0	—	0,18	4,14	-0,11	-0,12	-0,17	—	0,5
${}^{21}\text{Sc}^{45}$	7/2	0	—	—	—	-0,11	-0,12	-0,22	—	0,2
${}^{27}\text{Co}^{57}$	7/2	0	—	0,12	4,34	0,12	0,14	0,49	—	0,7
${}^{27}\text{Co}^{59}$	7/2	0	—	0,15	4,42	0,12	0,14	0,53	0,5	0,6
${}^{29}\text{Cu}^{63}$	3/2	0	—	0,16	4,46	-0,072	-0,12	-0,27	-0,16	1,9
${}^{29}\text{Cu}^{65}$	3/2	0	—	0,17	4,55	-0,072	-0,12	-0,23	-0,15	2,2

Ядро	<i>l</i>	$\Delta_p$	$\mu_p$	$\Delta_n$	$\mu_n$	<i>q</i>	$Q^I$	$Q_{теор}$	$Q_{эксп}$	$\frac{\Sigma_p}{\Sigma_n}$
$^{97}_{31}\text{Ga}$	3/2	0,13	4,42	0,18	4,55	0,073	0,089	0,24	0,22	1,1
$^{99}_{31}\text{Ga}$	3/2	0,16	4,41	0,18	4,66	0,074	0,090	0,17	0,20	1,5
$^{21}_{31}\text{Ga}$	3/2	0,17	4,41	0	—	0,075	0,090	0,15	0,12	1,7
$^{23}_{35}\text{Br}$	3/2	0,15	4,54	0,15	4,74	0,077	0,084	0,16	—	1,0
$^{29}_{35}\text{Br}$	3/2	0,18	4,55	0,18	4,85	0,077	0,10	0,16	0,32	1,0
$^{81}_{35}\text{Br}$	3/2	0,14	4,54	0,19	4,90	0,078	0,078	0,18	0,27	0,4
$^{83}_{35}\text{Br}$	3/2	0,13	4,53	0,18	4,99	0,079	0,076	0,20	—	0,3
$^{86}_{37}\text{Rb}$	5/2	0,18	4,67	0,11	4,93	0,11	0,10	0,17	0,29	0,3
$^{87}_{37}\text{Rb}$	3/2	0,10	4,61	0	—	0,080	0,080	—	0,14	0,3
$^{93}_{41}\text{Nb}$	9/2	0	—	0	—	-0,18	—	-0,30	-0,13	0,3

Примечание.  $\Delta$  и  $\mu$  даны в единицах  $\hbar\omega_0$  ( $\hbar\omega_0 = 41A^{-1/2}$ ); *q* — одночастичный квадрупольный момент;  $Q^I$  — первая итерация уравнения (7);  $Q_{теор}$  — точное решение уравнения (7);  $Q_{эксп}$  — экспериментальное значение квадрупольного момента. (Величины *q*,  $Q^I$ ,  $Q_{теор}$ ,  $Q_{эксп}$  приведены в барнах).  $\frac{\Sigma_p}{\Sigma_n}$  — отношение протонной суммы к нейтронной в выражении (7).

Таблица 2\*

## Квадрупольные моменты ядер с нечетным нейтроном

Ядро	<i>l</i>	$\Delta_p$	$\mu_p$	$\Delta_n$	$\mu_n$	$Q^I$	$Q_{теор}$	$Q_{эксп}$	$\frac{\Sigma_p}{\Sigma_n}$
$^{17}_8\text{O}$	5/2	0	—	0	—	-0,011	-0,017	-0,026	7,0
$^{23}_{12}\text{Mg}$	5/2	0,21	3,39	0,20	3,50	0,026	0,18	0,15	1,7
$^{27}_{14}\text{Si}$	5/2	0,20	3,49	0,22	3,50	0,030	0,19	—	2,1
$^{31}_{14}\text{Si}$	3/2	0,21	3,49	0,14	3,58	-0,018	-0,063	—	2,9
$^{33}_{16}\text{S}$	3/2	0,14	3,57	0,15	3,58	-0,019	-0,071	-0,064	3,3
$^{35}_{16}\text{S}$	3/2	0,14	3,57	0	—	0,019	0,045	0,038	3,9
$^{37}_{16}\text{S}$	7/2	0,14	3,58	0	—	-0,039	-0,093	—	3,6
$^{37}_{18}\text{Ar}$	3/2	0,15	3,69	0	—	0,013	0,029	—	4,0
$^{39}_{18}\text{Ar}$	7/2	0,15	3,70	0	—	-0,031	-0,066	—	3,7
$^{41}_{20}\text{Ca}$	7/2	0	—	0	—	-0,026	-0,051	—	3,7
$^{47}_{20}\text{Ca}$	7/2	0	—	0	—	0,026	0,16	—	0,8
$^{49}_{20}\text{Ca}$	3/2	0	—	0	—	-0,013	-0,087	—	0,6
$^{49}_{22}\text{Ti}$	7/2	0,16	3,95	0	—	0,025	0,20	—	0,8
$^{53}_{24}\text{Cr}$	3/2	0,17	4,14	0	—	-0,26	-0,13	—	—
$^{58}_{28}\text{Ni}$	3/2	0	—	0,15	4,41	0,043	0,31	—	1,9
$^{62}_{28}\text{Ni}$	3/2	0	—	0,15	4,42	-0,044	-0,14	—	1,8
$^{67}_{30}\text{Zn}$	5/2	0,13	4,33	0,14	4,64	0,034	0,10	0,18	2,9
$^{71}_{30}\text{Zn}$	9/2	0,13	4,33	0	—	-0,054	-0,13	—	3,3
$^{69}_{32}\text{Ge}$	5/2	0,16	4,41	0,18	4,67	0,031	0,11	—	3,0
$^{73}_{32}\text{Ge}$	9/2	0,18	4,41	0	—	-0,057	-0,15	-0,20	2,7
$^{85}_{34}\text{Kr}$	9/2	0,18	4,55	0	—	0,045	0,25	0,30	1,5
$^{87}_{38}\text{Sr}$	9/2	0,16	4,65	0	—	0,038	0,18	—	1,3
$^{88}_{38}\text{Sr}$	5/2	0,16	4,65	0	—	-0,032	-0,16	—	1,0

\* Обозначения те же, что и в табл. 1.

## Литература

1. Мигдал А. Б. ЖЭТФ, 43, 1940, 1962.
2. Ларкин А. И., Мигдал А. Б. ЖЭТФ, 44, 1703, 1963.
3. Мигдал А. Б., Ларкин А. И. ЖЭТФ, 45, 1036, 1963.
4. Migdal A. B. Nucl Phys. 57 (1) 29, 1964.
5. Мигдал А. Б. ЖЭТФ, 46, 1680, 1964.



УДК 539.143.5

### ИЗОМЕРНЫЙ СДВИГ И СТРУКТУРА МЕТАСТАБИЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ ЯДЕР

На основе теории конечных ферми-систем вычисляется  $\Delta \langle R^2 \rangle$  (разность средних квадратов радиусов распределения электрического заряда возбужденного и основного состояний группы ядер). Для той же области атомных весов вычисляется константа объемного изотопического смещения. Обсуждается природа возбужденных состояний ядер.

Явление изомерного сдвига состоит в том, что энергия электронной оболочки атома зависит от того, в каком состоянии — основном или возбужденном — находится ядро. Эта зависимость связана с различным распределением электрического заряда ядра в основном и возбужденном состояниях. Изучение изомерного сдвига позволяет исследовать тонкие эффекты в распределении электрического заряда ядер и дает сведения о структуре ядра, которые либо затруднительно, либо невозможно получить другими методами.

Экспериментально изомерный сдвиг был впервые обнаружен оптическими методами [1]. Затем его нашли и стали интенсивно исследовать в экспериментах по эффекту Мессбауэра [2]. Теория изомерного сдвига совершенно аналогична теории объемного изотопического смещения, неоднократно рассматривавшегося в литературе [3].

**Оптические методы.** Изомерный сдвиг проявляется в смещении линий оптических спектров изомеров. Так как к пространственному распределению электрического заряда в ядре чувствительны энергии только  $s$  и  $p_{1/2}$  электронов (их  $\psi$ -функции отличны от нуля в области расположения ядра), то смещение может наблюдаться только в линиях, соответствующих переходам  $s$ - и  $p_{1/2}$ -электронов. Эффект для  $p$ -электронов гораздо меньше, поэтому будем рассматривать изомерный сдвиг, вызванный только  $s$ -электронами. Различие в объемном распределении электрического заряда изомерного и основного состояний ядер характеризуется  $\Delta \langle R^2 \rangle$  — разностью средних квадратов радиусов распределения заряда этих состояний:

$$\Delta \langle R^2 \rangle = R_u^2 - R_0^2,$$

$$\text{где } R_u^2 = \frac{\int \rho_u(r) r^2 dV}{\int \rho_u(r) dV} = \frac{1}{Z} \int \rho_u(r) r^2 dV,$$

$$R_0^2 = \frac{1}{Z} \int \rho_0(r) r^2 dV, \quad (1)$$

где  $\rho_u(r)$ ,  $\rho_0(r)$  — распределения электрического заряда в возбужденном и основном состояниях соответственно;

$Z$  — заряд ядра.

Изомерный сдвиг в оптических спектрах характеризуется величиной  $C$ , которая следующим образом связана с  $\Delta \langle R^2 \rangle$

$$C = \frac{R_\infty}{3} \left( \frac{1 + \sigma}{\Gamma(1 + 2\sigma)} \right)^2 \left( \frac{2ZR}{a_H} \right)^{2\sigma} \frac{\Delta \langle R^2 \rangle}{R^2}, \quad (2)$$

где  $R_\infty$  — постоянная Ридберга,  $a_H$  — радиус первой боровской орбиты для атома водорода,  $\sigma = \sqrt{1 - \left(\frac{Z}{137}\right)^2}$ ,  $R$  — радиус ядра.

**Эффект Мессбауэра.** В экспериментах по эффекту Мессбауэра (резонансное поглощение  $\gamma$ -квантов) изомерный сдвиг проявляется, если источником и поглотителем  $\gamma$ -квантов является один и тот же изотоп, но связанные в различные химические соединения. В этом случае энергия испускаемых  $\gamma$ -квантов отлична от резонансной энергии поглощения  $\gamma$ -квантов. Различие в энергиях связано с различной электронной плотностью в месте расположения ядра источника и поглотителя. Энергия испускаемого  $\gamma$ -кванта  $\epsilon_1 = \epsilon_0 - \Delta T_1$ , энергия поглощаемого  $\gamma$ -кванта  $\epsilon_2 = \epsilon_0 - \Delta T_2$ , где  $\epsilon_0$  — энергия ядерного перехода,  $\Delta T_1$  — изменение энергии электронной оболочки ядра источника из-за различия объемных распределений заряда возбужденного и основного состояний ядра,  $\Delta T_2$  — та же величина для поглотителя. Разность энергий  $\Delta E = \Delta T_1 - \Delta T_2$  выражается через  $\psi$ -функции  $s$ -электронов источника  $\psi_n$  поглотителя  $\psi_n$  и  $\frac{\Delta \langle R^2 \rangle}{R^2}$  по формуле:

$$\Delta E = \frac{1}{3} \pi Z e^2 R^2 S(Z) \left[ \sum \psi_n^2(0) - \sum \psi_n^2(0) \frac{\Delta \langle R^2 \rangle}{R^2} \right], \quad (3)$$

где  $S(Z)$  — релятивистский фактор, для легких ядер близкий к единице (см. [2]).

В формулах (2) и (3) разделяются зависимости от ядерных и электронных характеристик задачи. Для нахождения ядерного множителя необходимо вычислить  $\Delta \langle R^2 \rangle$ . При вычислении  $\Delta \langle R^2 \rangle$  воспользуемся методами теории конечных ферми-систем [4]. Следует отметить, что экспериментально с большой точностью определяется величина, включающая оба множителя, в то время как по отдельности точное их определение затруднительно. Достаточно близкое совпадение теоретических значений  $\Delta \langle R^2 \rangle$  с экспериментальными для изотопического смещения [5] позволяет надеяться, что сравнение теоретических значений  $\frac{\Delta \langle R^2 \rangle}{R^2}$  с экспериментальными для изомерного сдвига даст возможность в тех случаях, когда хорошо изучена природа изомерного состояния, получить сведения об электронных характеристиках задачи, а в тех случаях, когда хорошо известны электронные характеристики, уточнить природу изомерных состояний.

#### Вычисление $\Delta \langle R^2 \rangle$ .

Рассмотрим изомеры, переходы которых в основное состояние можно трактовать как одночастичные. Такие изомерные состояния можно представить как результат добавления к четно-четному остову нуклона (нуклонной дырки) на соответствующий спин и энергии возбуждения изомера одночастичный уровень. Точно так же основное состояние ядра представим как четно-четный остов плюс частица (дырка). Тогда задача вычисления  $\Delta \langle R^2 \rangle$  сводится к вычислению разности изменений средних квадратов радиусов распределения заряда от добавления нуклона в различные одночастичные состояния. Учет взаимодействия нечетной частицы (дырки) с остовом будем производить, следуя работе [4].

Изменение  $\delta A$  некоторой величины  $A$ , характеризующей ядро, от добавления к ядру протона может быть выражено через соответствующую вершину  $T^p(A)$  по формуле

$$\delta A = \sum_{\lambda} T_{\lambda\lambda}^p(A) (\bar{n}_{\lambda} - n_{\lambda}), \quad (4)$$

где  $\lambda$  — индексы одночастичных состояний ( $n, l, j, m$ );  $n_{\lambda}$  — числа заполнения одночастичных состояний в исходном ядре;  $\bar{n}_{\lambda}$  — числа заполнения в ядре, полученном путем добавления протона к исходному ядру в пренебрежении взаимодействием добавленного протона с нуклонами остова;  $T_{\lambda\lambda}^p(A)$  — диагональный матричный элемент вершины по одночастичным функциям. При добавлении нейтрона  $\delta A$  аналогично выражается через  $T^n(A)$ .

В  $\lambda$ -представлении вершина  $T(A) = \begin{pmatrix} T^p(A) \\ T^n(A) \end{pmatrix}$  удовлетворяет уравнению:

$$T(A)_{\lambda\lambda'} = T^0(A)_{\lambda\lambda'} + \sum_{\lambda_1\lambda_2} \langle \lambda\lambda' | a^2 \Gamma^0 | \lambda_1\lambda_2 \rangle \times \\ \times \left[ L_{\lambda_1\lambda_2} T(A)_{\lambda_1\lambda_2} - \delta_{\lambda_1\lambda_2} \frac{\Delta^2 \lambda_2}{2E_{\lambda_2}^2} (T(A)_{\lambda_1\lambda_2} - \bar{T}(A)_{\lambda_1\lambda_2}) \right],$$

где  $L = \begin{pmatrix} L^p & 0 \\ 0 & L^n \end{pmatrix}$ ,  $\Gamma^0 = \begin{pmatrix} \Gamma_{pp}^0 & \Gamma_{pn}^0 \\ \Gamma_{np}^0 & \Gamma_{nn}^0 \end{pmatrix}$ ,  $T^0 = \begin{vmatrix} T^p \\ T^n \end{vmatrix}$  (5)

(для скалярных вершин  $T^0(A) = A$ )

$$L_{\lambda\lambda'}^p = \frac{E_{\lambda}^p E_{\lambda'}^p - \varepsilon_{\lambda}^p \varepsilon_{\lambda'}^p + \Delta_{\lambda\lambda'}^p}{2E_{\lambda}^p E_{\lambda'}^p (E_{\lambda}^p + E_{\lambda'}^p)},$$

$E_{\lambda}^p = V(\varepsilon_{\lambda}^p)^2 + (\Delta_{\lambda}^p)^2$ ,  $\varepsilon_{\lambda}^p$  — протонные одночастичные энергетические уровни, отсчитанные от химического потенциала  $\mu^p$ ,  $\Delta_{\lambda}^p = a\Delta_{\lambda\lambda}^p$ ;

$\Delta_{\lambda\lambda}^p$  — диагональный матричный элемент амплитуды перехода протонной частицы (дырки) в дырку (частицу) и конденсатную пару;

$a$  — константа перенормировки.

$L_{\lambda\lambda}^n$  аналогично выражается через те же характеристики нейтронной системы, имеющие индекс  $n$ ,

$$\langle \lambda_1\lambda_2 | \Gamma_{ik}^0 | \lambda\lambda' \rangle = \int (\Psi_{\lambda_1}^i(\mathbf{r}_1))^* \Psi_{\lambda_2}^k(\mathbf{r}_2) \Gamma_{ik}^0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \times \\ \times (\Psi_{\lambda}^i(\mathbf{r}_3))^* \Psi_{\lambda'}^k(\mathbf{r}_4) dV_1 dV_2 dV_3 dV_4,$$

$\Psi_{\lambda}^i(\mathbf{r})$  — одночастичные волновые функции нуклонов ( $i, k$  пробегает два значения  $p$  и  $n$ );  $T_{\lambda\lambda}$  — усредненное по уровням, близким к ферми-поверхности, значение диагонального матричного элемента вершины (от  $\lambda$  не зависит). Для сферических ядер, рассмотрением которых мы в дальнейшем ограничимся, угловая зависимость полной вершины совпадает с угловой зависимостью  $T^0$ , поэтому переходы, входящие в сумму уравнения (5), определяются правилами отбора для угловой части  $T^0$ .

Чтобы найти  $\Delta \langle R^2 \rangle$ , необходимо решить уравнение (5) для  $T(A)$  при  $A = r^2$ . В этом случае  $T^0 = \begin{pmatrix} r^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ . В уравнении для  $T(r^2)$  диагональные члены малы, и кроме того переменны по знаку, поэтому их можно опустить. Малость диагональных членов связана с тем, что  $T(r^2)_{\lambda\lambda}$  слабо зависит от  $\lambda$ , и поэтому  $|T_{\lambda\lambda} - T_{\lambda\lambda'}| \ll T_{\lambda\lambda}$ . Подставляя в формулу (5)  $A = r^2$ , опуская в сумме диагональные слагаемые и проведя суммирование по  $m$ , получим

$$T_{\lambda\lambda'} = T_{\lambda\lambda'}^0 + \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \frac{a^2}{4\pi} \langle \lambda\lambda' | \Gamma^0 | \lambda_1\lambda_2 \rangle (2j_1 + 1) L_{\lambda_1\lambda_2} T_{\lambda_1\lambda_2}. \quad (6)$$

Теперь индекс  $\lambda$  обозначает совокупность квантовых чисел  $l, j$ , а матричные элементы, входящие в выражение (6), взяты по радиальным волновым функциям. Переходы в сумме определяются правилами отбора  $\Delta l = 0, \Delta j = 0$ .

При получении равенства (6) предполагалось, что

$$\Gamma_{ik}^0(r_1, r_2, r_3, r_4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \epsilon_0} f^{ik}(r_i) \delta(r_1 - r_2) \delta(r_1 - r_3) \delta(r_1 - r_4), \quad (7)$$

где  $n$  — плотность нуклонов,  $\epsilon_0$  — энергия Ферми.

Уравнение (6) решалось на электронно-вычислительной машине. В качестве системы одночастичных уровней как для протонов, так и для нейтронов использовалась схема Нильссона [6]. Учитывались переходы через оболочку (в пределах одной оболочки правила отбора запрещают переходы). Для  $f^{ik}$  использована интерполяционная формула [5]:

$$f^{ik} = \frac{1}{n_0} \{ f_{in}^{ik} n(r) - f_{ex}^{ik} [n(r) - n_0] \}, \quad (8)$$

где  $n(r) = \frac{n_0}{1 + e^{\alpha(r-R_0)}}$ ,  $n_0$  — средняя плотность нуклонов в ядре,  $\alpha = 1,55f^{-1}$ ,  $R_0 = 1,2A^{1/2}f$ . Предполагалось, что  $f^{nn} = f^{pp}$ .

В сумме уравнения (6) парная корреляция существенна для переходов, затрагивающих уровни, близкие к ферми-поверхности. Так как таких слагаемых в сумме мало, то неточность в соответствующих  $L_{\lambda_1\lambda_2}$  слабо влияет на решение. Учитывая это, было принято, что  $\Delta_{\lambda}^n \equiv \Delta^n$  и  $\Delta_{\lambda}^p \equiv \Delta^p$  не зависят от индексов и являются одними и теми же константами для всех переходов в рассматриваемом ядре.  $\mu^p$  и  $\mu^n$  находились из приближенного решения уравнений

$$\begin{aligned} N &= \sum_{\lambda} \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\epsilon_{\lambda}^n}{\sqrt{(\Delta^n)^2 + (\epsilon_{\lambda}^n)^2}} \right), \\ Z &= \sum_{\lambda} \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\epsilon_{\lambda}^p}{\sqrt{(\Delta^p)^2 + (\epsilon_{\lambda}^p)^2}} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

При выборе численных значений  $\Delta^n$  и  $\Delta^p$  использовались данные работы [7]. Значение констант  $f^{pp}$  и  $f^{nn}$  взяты из работы [8], в которой они получены из анализа квадрупольных моментов:

$$f_{in}^{pp} = 1,3, \quad f_{ex}^{pp} = -2,9, \quad f_{in}^{nn} = 0,6, \quad f_{ex}^{nn} = -2,3.$$

Для проверки правильности выбора значений  $f$  рассчитаны константы объемного изотопического смещения для той же области атомных весов,

в которой рассматривается изомерный сдвиг.  $\Delta \langle R^2 \rangle$  в формуле (2) для изотопического смещения определяется выражением

$$\Delta \langle R^2 \rangle = \sum_{\lambda} T_{\lambda\lambda}^{\pi} (r^2) (\tilde{n}_{\lambda} - n_{\lambda}), \quad (10)$$

где  $\tilde{n}_{\lambda}$ ,  $n_{\lambda}$  — числа заполнения в изотопах с  $N + 2$ - и  $N$ -нейтронами соответственно ( $\tilde{n}_{\lambda}$  находится без учета взаимодействия добавленных нейтронов с остовом). Задача о нахождении  $\tilde{n}_{\lambda}$  с учетом спаривания не решалась. Предполагалось, что числа заполнения нейтронов меняются только на одном уровне  $\lambda_0$ . При этом равенство (10) переходит в

$$\Delta \langle R^2 \rangle = 2T_{\lambda_0\lambda_0}^{\pi}. \quad (11)$$

Для многих рассмотренных изотопов при заполнении нейтронных оболочек характерна конкуренция различных  $j$ -уровней, поэтому выбрать состояние  $\lambda_0$ , в которое добавляется пара нейтронов, можно только путем сравнения расчетных значений константы изотопического смещения с экспериментальными. При указанных значениях констант  $f^{jk}$  расчеты удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными, причем порядок заполнения  $j$ -уровней не противоречит общепринятым схемам. Расчеты константы объемного изотопического смещения приведены в табл. 1.

При вычислении  $\Delta \langle R^2 \rangle$  для изомерного состояния в формулу (10) может входить либо протонная, либо нейтронная вершина в зависимости от того, протон или нейтрон является нечетной частицей.  $\tilde{n}_{\lambda}$  в этом случае обозначает числа заполнения нуклонов в изомерном состоянии. Для строго одночастичных (дырочных) изомерных состояний из выражения (10) получим

$$\Delta \langle R^2 \rangle = \pm (T_{\lambda_1\lambda_1} - T_{\lambda_0\lambda_0}). \quad (12)$$

где  $\lambda_1$  — совокупность квантовых чисел возбужденного, а  $\lambda_0$  — основного состояния. Верхний знак соответствует частичным, а нижний — дырочным состояниям. Предположение об одночастичной природе состояний хорошо выполняется для рассмотренных долгоживущих изомеров, в которых изомерный сдвиг может быть обнаружен оптическим путем. Соответствующие изомерные переходы характеризуются большой разностью моментов при малой энергетической разности. При этом отсутствуют переходы типа  $E2$ , характерные для коллективных состояний. В соседних четно-четных ядрах не наблюдается близких по энергии коллективных возбуждений. Результаты расчетов для таких изомеров приведены в табл. 2.

Для изомеров, исследуемых в эффекте Месбауэра, трудно однозначно истолковать природу состояний. Однако по результатам расчетов  $\Delta \langle R^2 \rangle$  можно получить сведения об их природе, если имеются надежные экспериментальные значения  $\Delta \langle R^2 \rangle$ . Для этих ядер  $\Delta \langle R^2 \rangle$  следует находить, пользуясь формулой (10), т. е. учитывать перераспределение нуклонов на всех уровнях, близких к ферми-поверхности.

Нахождение  $n_{\lambda}$  и  $\tilde{n}_{\lambda}$  требует решения системы уравнений для  $\Delta_{\lambda}$  [4]. Приближение  $\Delta_{\lambda} \equiv \Delta$  здесь, по-видимому, будет неудовлетворительным, так как в этом приближении  $\Delta$  для возбужденного состояния больше, чем для основного [9]. Поэтому при вычислении  $\Delta \langle R^2 \rangle$  было сделано предположение, что в возбужденном состоянии ядра числа заполнения меняются только для состояний  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$ . Тогда из условия сохранения числа нуклонов получим

$$\sum_m (n_{n_0 t_0 i_0 m} - \tilde{n}_{n_0 t_0 i_0 m}) = \sum_m (\tilde{n}_{n_1 t_1 i_1 m} - n_{n_1 t_1 i_1 m}) = \xi \approx u_{\lambda_0}^2 - v_{\lambda_0}^2, \quad (13)$$

где  $\xi$  характеризует число «перераспределившихся» нуклонов. Выражение (10) переходит в

$$\Delta \langle R^2 \rangle = \xi (T_{\lambda, \lambda} - T_{\lambda, \lambda_0}), \quad (14)$$

$\xi = 1$  соответствует частичному,  $\xi = -1$  — дырочному переходу.

Результаты расчетов для этих изотопов при  $|\xi| = 1$  даны в табл. 3.

### Обсуждение результатов

Сравнение теоретических значений  $S$  с экспериментальными для изотопического смещения показывает, что величины  $f^{pp}$ ,  $f^{np}$ , полученные в работе [8] из анализа квадрупольных моментов, позволяют удовлетворительно объяснить и изотопическое смещение. Можно улучшить согласие теоретических и экспериментальных значений  $S$ , если учесть «размазывание» добавленных нейтронов по различным состояниям  $\lambda$ , т. е. если точно учитывать эффекты парной корреляции. В табл. 1 для иллюстрации такой возможности приведены значения  $T_{\lambda\lambda}^n$  для всех значений  $\lambda$ , входящих в заполняющуюся нейтронную оболочку  $\text{Sn}^{119}$ . Сравнение точного решения уравнения (6) с первой итерацией показывает, что в задаче для  $\Delta \langle R^2 \rangle$  нельзя ограничиваться первой итерацией, так как она дает сильно завышенные результаты.

Переходя к обсуждению изомеров, заметим, что точность вычисления  $\Delta \langle R^2 \rangle$  для протонных переходов ниже, чем для нейтронных, так как для протонных переходов в  $\Delta \langle R^2 \rangle$  кроме разности интегральных членов входит разность больших по величине одночастичных матричных элементов  $r_{\lambda\lambda}^2$ . Поэтому здесь точность расчета существенно зависит от того, насколько правильно одночастичная схема отражает относительное изменение  $r_{\lambda\lambda}^2$  для различных состояний.

Расчеты константы изомерного сдвига (см. табл. 2) показывают, что экспериментальное обнаружение эффекта для рассмотренных изомеров оптическими методами затруднительно, так как величина эффекта находится на пределе возможностей эксперимента [10].

По изомерному сдвигу ядер, изучаемых в эффекте Мессбауэра, имеется много данных, часто противоречивых. Обсудим этот вопрос более детально. Для того чтобы характеризовать изомерные переходы помимо спина возбужденного состояния и типа перехода были использованы данные о величинах и знаках квадрупольных моментов  $Q$  и  $Q^*$  в основном и возбужденном состояниях. Сравнение квадрупольных моментов с одночастичными оценками показывает, насколько правильно предположение об одночастичной природе перехода, а их знаки указывают на то, как надо интерпретировать переход — как частичный или как дырочный (отрицательный знак соответствует частичному, а положительный — дырочному состоянию).

Рассмотрим конкретные изомеры.

$^{28}\text{Ni}^{61}$  спины и четности основного и возбужденного состояний:  $3/2^-$  и  $5/2^-$ , переход  $M1$ . Данные о квадрупольном моменте отсутствуют. В соответствии со схемой одночастичных уровней предполагается, что переход частичный  $\frac{\Delta \langle R^2 \rangle}{R^2} = -1,5 \cdot 10^{-3}$ .

$^{30}\text{Zn}^{67}$ :  $5/2^-$ ,  $1/2^-$ , переход  $M1$ ,  $Q = 0,18$  бн, больше одночастичных оценок приблизительно в два раза. По одночастичной схеме уровней соответствует дырочному переходу  $\frac{\Delta \langle R^2 \rangle}{R^2} = -1,6 \cdot 10^{-3}$ .

$_{50}\text{Sn}^{110}$ :  $1/2^+$ ,  $3/2^+$  переход  $M1$ ,  $Q = 0$ ,  $Q^* = -0,08$  бн [11] порядка одночастичных оценок ( $-0,11$  бн). Переход считаем частичным.  $\frac{\Delta \langle R^2 \rangle}{R^2} = -2,5 \cdot 10^{-4}$ . Этот результат находится в противоречии с полученными в работе [2], где приводится величина  $1,2 \cdot 10^{-4}$ .

$_{32}\text{Ge}^{126}$ :  $1/2^+$ ,  $3/2^+$ , переход  $M1$ ,  $Q = 0$ ,  $Q^* = 0,20$  бн [12], что в два раза больше одночастичной оценки ( $0,11$  бн). Переход классифицирован как дырочный.  $\frac{\Delta \langle R^2 \rangle}{R^2} = 3 \cdot 10^{-4}$ , что по порядку согласуется с выводами, сделанными в работе [3]. В этой работе приводится ориентировочное значение  $\frac{\Delta \langle R^2 \rangle}{R^2} = 8 \cdot 10^{-4}$ .

$_{53}\text{I}^{129}$ :  $7/2^+$ ,  $5/2^+$ ,  $Q = 0,5$  бн,  $Q^* = -0,69$  бн [13].

Значение квадрупольных моментов в три раза превышает одночастичные ( $-0,18$  бн). В этом ядре рассматривается переход нечетного протона. В соответствии со знаками квадрупольных моментов он классифицирован как частичный.

Для  $\text{I}^{129}$  получаем интересный результат. Если вычислить  $\Delta \langle R^2 \rangle$  по оболочечной модели, то получим отрицательную величину, что находится в противоречии с данными, которые приводятся в работе [13]. Учет взаимодействия меняет знак, при этом  $\frac{\Delta \langle R^2 \rangle}{R^2} = 1,5 \cdot 10^{-3}$ .

$_{54}\text{Xe}^{129}$ :  $1/2^+$ ,  $3/2^+$ , переход  $M1$ ,  $Q = 0$ ,  $|Q^*| = 0,48$  бн [14].

$_{54}\text{Xe}^{131}$ :  $3/2^+$ ,  $1/2^+$ , переход  $M1$ ,  $Q = -0,12$  бн,  $Q^* = 0$ .

Одночастичные расчеты дают  $Q = -0,11$  бн.

В обоих изотопах Xe переход классифицировался как частичный. Получены одинаковые по величине, но противоположные по знаку значения  $\frac{\Delta \langle R^2 \rangle}{R^2}$ . Для  $\text{Xe}^{129} - 2 \cdot 10^{-4}$ , для  $\text{Xe}^{131} + 2 \cdot 10^{-4}$ .

Отметим, что приведенные значения  $\frac{\Delta \langle R^2 \rangle}{R^2}$  получены не рассматривая деформацию ядра как целого.

В заключение выражаю благодарность проф. А. Б. Мигдалу за внимание к работе и М. А. Микулинскому — за ценные обсуждения.

Таблица 1

Константа объемного изотопического смещения \*

Элемент	$A_1 - A_2$	$\lambda_n$	$C' [10^{-3} \text{ см}^{-2}]$	$C_{\text{теор}} [10^{-3} \text{ см}^{-2}]$	$C_{\text{эксп}} [10^{-3} \text{ см}^{-2}]$
$_{37}\text{Rb}$	85—87	$1g_{7/2}$	23	12	$8 \pm 12$
$_{38}\text{Sr}$	84—86	$1g_{7/2}$	23	12	$\sim 0$
	86—88	$1g_{7/2}$	23	12	
$_{44}\text{Ru}$	96—89	$1g_{7/2}$	40	22	—
	98—100	$1g_{7/2}$	40	22	$34 \pm 9$
	100—102	$1g_{7/2}$	40	22	(усредненное по всем изотопам)
	102—104	$2d_{5/2}$	68	35	

Элемент	$A_1 - A_2$	$\lambda_0$	$C' [10^{-8} \text{ см}^{-1}]$	$C_{\text{теор}} [10^{-8} \text{ см}^{-1}]$	$C_{\text{эксп}} [10^{-8} \text{ см}^{-1}]$
$^{50}\text{Sn}$	112—114	$1g_{7/2}$	62	34	—
	114—116	$2d_{5/2}$	100	48	$40 \pm 10$
	116—118	$2d_{3/2}$	100	48	$40 \pm 10$
	118—120	$2d_{5/2}$	100	48	$30 \pm 10$
	120—122	$3s_{1/2}$	100	44	$30 \pm 10$
	122—124	$1h_{11/2}$	58	30	$15 \pm 10$
$^{56}\text{Ba}$	134—136	$1h_{11/2}$	82	44	$44 \pm 9$
	136—138	$1h_{13/2}$	82	44	$67 \pm 13$
$^{54}\text{Xe}$	132—134	$1h_{11/2}$	70	38	$18 \pm 4$
	134—136	$1h_{13/2}$	70	38	$26 \pm 6$

\*  $C_{\text{теор}}$  — теоретическое значение константы изотопического смещения;  
 $C'$  — значение  $C_7$ , полученное по первой итерации уравнения (2).  
 Экспериментальные данные взяты из работы [3].

Таблица 2

## Константа изомерного сдвига\*

Изотоп	$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\Delta E$ , кэВ	$\tau$	$c$ , $10^{-9} \text{ см}^{-1}$
$^{50}\text{Zn}^{99}$	$2p_{1/2}$	$1g_{7/2}$	436	13,8 ч	-3
$^{52}\text{Kr}^{83}$	$-1g_{7/2}$	$-2p_{1/2}$	305	4,4 ч	-4
$^{52}\text{Sr}^{87}$	$-1g_{7/2}$	$-2p_{1/2}$	390	2,8 ч	-4
$^{59}\text{Y}^{87}$	$2p_{1/2}$	$1g_{7/2}$	384	14 ч	2
$^{59}\text{Y}^{89}$	$2p_{1/2}$	$1g_{7/2}$	913	14 сек	2
$^{59}\text{Y}^{91}$	$2p_{1/2}$	$1g_{7/2}$	555	51 мин	2
$^{50}\text{Zn}^{99}$	$-1g_{7/2}$	$-2p_{1/2}$	588	4,4 мин	-4
$^{58}\text{Cd}^{112}$	$3s_{1/2}$	$1h_{13/2}$	—	5,1 года	-10
$^{50}\text{In}^{113}$	$-1g_{7/2}$	$-2p_{1/2}$	390	1,73 ч	-7
$^{50}\text{In}^{115}$	$-1g_{7/2}$	$-2p_{1/2}$	335	4,5 ч	-7
$^{52}\text{Te}^{127}$	$-2d_{3/2}$	$-1h_{11/2}$	88,5	113 дней	3
$^{52}\text{Te}^{129}$	$-2d_{5/2}$	$-1h_{13/2}$	106	34 дня	3
$^{52}\text{Te}^{131}$	$-2d_{3/2}$	$-1h_{11/2}$	300	63 мин	3
$^{54}\text{Xe}^{133}$	$-2d_{5/2}$	$-1h_{13/2}$	232	2,3 дня	4
$^{54}\text{Xe}^{135}$	$-2d_{3/2}$	$-1h_{11/2}$	520	15,3 мин	4
$^{56}\text{Ba}^{133}$	$-2d_{5/2}$	$-1h_{13/2}$	269	28,7 ч	5
$^{56}\text{Ba}^{137}$	$-2d_{3/2}$	$-1h_{11/2}$	661	2,6 мин	5

\*  $\lambda_0$  — основное состояние;  
 $\lambda_1$  — изомерное состояние;  
 ( $-\lambda$  — обозначает дырочное состояние);  
 $\Delta E$  — энергия перехода;  
 $\tau$  — время жизни изомерного состояния

Результаты расчетов для мессбауэровских изомеров\*

Изотоп	$\lambda_0$	$\lambda_1$	$Q, \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$	$Q^*, \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$	$\Delta E, \text{ кэВ}$	$\gamma, \cdot 10^{-9} \text{ сек}$	$\frac{\Delta < R^2 >}{R^2}, \cdot 10^{-4}$	$\left( \frac{\Delta < R^2 >}{R^2} \right)_{\text{н.}}$ , $\cdot 10^{-4}$
$^{28}\text{Ni}^{61}$	$2p_{3/2}$	$1f_{7/2}$	—	—	70	51	-15	—
$^{30}\text{Zn}^{67}$	$-1f_{5/2}$	$-2p_{3/2}$	0,18	—	93	$10^4$	-16	—
$^{50}\text{Sn}^{119}$	$3s_{1/2}$	$2d_{3/2}$	0	-0,08	24	18	-2,5	1,4
$^{52}\text{Te}^{125}$	$-3s_{1/2}$	$-2d_{3/2}$	0	0,20	35,5	2,2	2,8	9
$^{53}\text{I}^{129}$	$1g_{7/2}$	$2d_{3/2}$	-0,5	-0,69	27	—	15	-1,2 (или более)
$^{54}\text{Xe}^{129}$	$3s_{1/2}$	$2d_{3/2}$	0	0,48	40	0,7	-2	—
$^{54}\text{Xe}^{131}$	$2d_{3/2}$	$3s_{1/2}$	-0,12	—	80,2	0,3	+2	—

\*  $Q, Q^*$  — квадрупольные моменты основного и возбужденного состояний соответственно. В последней колонке таблицы приведены данные из работы [2]. (В этой работе  $\frac{\Delta < R^2 >}{R^2}$  принимается равным  $\frac{6}{5} \cdot \frac{\Delta R}{R}$ ).

## Литература

1. Melissinos A. C., Davis S. P. Phys. Rev., **115**, 130, 1959.
2. Shirley D. A., Rev. Mod. Phys., **36**, 339, 1964.
3. Бабушкин Ф. А. ЖЭТФ, **44**, 1661, 1963.
4. Мигдал А. Б. Теория конечных ферми-систем. Свойства ядер, Изд-во «Наука», 1965.
5. Бунатян Г. Г., Микулинский М. А. Ядерная физика, **1**, 33, 1965.
6. Nilsson S. G., Kgl. Dan. Vid. Selsk. **29**, 16, 1955. (Имеется перевод в сборнике Деформация ядер, И. Л., 1958).
7. Немировский П. Э., Адамчук Ю. В. Nucl. Phys. **39**, 551, 1962.
8. Беляков В. А., Худяков С. Б. Ядерная физика **1**, 744, 1965.
9. Соловьев В. Г. Влияние парных корреляций сверхпроводящего типа на свойства атомных ядер, М., Госатомиздат, 1963.
10. Конферман Г. Ядерные моменты М., И. Л., 1958.
11. Boyle A. I., Bunbury D. st. P., Edwards C. Proc. Phys. Soc. (London), **79**, 416, 1962.
12. Violet C. E., Booth R., Wooten F. Phys. Lett. **5**, 230, 1963.
13. Waard H. De., Pasquali G. De., Hafemeister D., Phys. Lett. **5**, 217, 1963.
14. Perlov G. I., Perlov M. R., Rev. Mod. Phys., **36**, 353, 1964.

Статья поступила 8 февраля 1965 г.

УДК 539.17

## ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ РЕЗОНАНСНЫХ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ. СЕЧЕНИЯ ПАРЦИАЛЬНЫХ РЕАКЦИЙ

Математический аппарат единой теории резонансных ядерных реакций, основанный на рассмотрении операций проектирования уравнения Шредингера—Швингера—Липпмана [1] в подпространства собственных волновых функций составного ядра и плоских волн (волновых функций свободного движения системы  $A + 1$  частиц) впервые был предложен В. И. Сердобольским [2].

Однако в «эффективном» гамильтониане системы при усреднении по энергии для получения оптического гамильтониана не учитывались мнимые члены, обуславливающие переход падающего нейтрона из одночастичного состояния в составное ядро. Задача эта была решена в работе [3] с помощью проектирования уравнения Шредингера—Швингера—Липпмана во входной канал рассеяния и введения «эффективного» гамильтониана системы. Вместе с тем необходимо было решить эту задачу в самом общем виде для всех открытых каналов реакции, с тем чтобы можно было рассматривать не только суммарное сечение всех реакций (обычная оптическая модель), но и сечения отдельных реакций (парциальные сечения).

Решению этой задачи посвящена настоящая работа.

### Основы теории

В работе [1] было получено уравнение Шредингера—Швингера—Липпмана [2] для проекции волновой функции в подпространство волновых функций открытых каналов реакции с эффективным гамильтонианом системы  $(A + 1)$  сталкивающихся частиц:

$$(E + i\epsilon - H_{P_0 P_0}) | P \Psi^{(+)} \rangle = i\epsilon | \Phi \rangle, \quad (1)$$

где

$E$  — энергия относительного движения системы;

$i\epsilon$  — бесконечно малые мнимые добавки, автоматически выделяющие расходящиеся волны на бесконечности;

$|\Phi\rangle$  — волновая функция свободного движения во входном канале (падающая плоская волна);

$P$  — оператор проектирования в подпространство волновых функций открытых каналов реакции;

$P_{\perp}$  — оператор проектирования в дополнительное подпространство волновых функций закрытых каналов реакции и волновых функций составного ядра, так что:  $|\Psi_{\alpha}\rangle \langle \Psi_{\alpha}| = \hat{1} = P + P_{\perp}$ , где  $\hat{1}$  — единичный оператор проектирования собственной волновой функции  $\Psi_{\alpha}$  гамильтониана системы  $H$  самой на себя;

$| P \Psi^{(+)} \rangle$  — проекция волновой функции системы в подпространство волновых функций открытых каналов реакции (индекс

(+) вверху указывает на то, что в асимптотике  $\psi$  автоматически выделяются расходящиеся волны);

$H_{P_{эфф}}$  — «эффективный» гамильтониан системы, имеющий вид:

$$H_{P_{эфф}} = PHP = \sum_{\lambda} \frac{\Gamma^+ |\chi_{\lambda}\rangle \langle \chi_{\lambda}| \Gamma}{E - E_{\lambda}}, \quad (2)$$

где  $H$  — гамильтониан системы;

$E_{\lambda}, |\chi_{\lambda}\rangle$  — соответственно собственные значения и собственные волновые функции проекции гамильтониана  $H$  в подпространство  $P_{\perp}$ , т. е.  $P_{\perp}HP_{\perp}$  при этом

$$(P_{\perp}HP_{\perp})|\chi_{\lambda}\rangle = E_{\lambda}|\chi_{\lambda}\rangle$$

$\Gamma = P_{\perp}HP, \Gamma^+ = PHP_{\perp}$  — операторы перехода из подпространства  $P$  в  $P_{\perp}$  и обратно, соответственно.

Усредняя уравнение (1) по энергетическому интервалу  $I$ , включающему много резонансов составного ядра, но значительно меньшему, чем расстояние между одночастичными резонансами в потенциальной яме, будем иметь

$$(E + i\epsilon - H_p^0)|\psi^{0(+)}\rangle = i\epsilon|\Phi\rangle, \quad (3)$$

где  $H_p^0$  — оптический гамильтониан, имеющий вид:

$$H_p^0 = PHP - \overline{\alpha_{\lambda p} \Gamma^+ |\chi_{\lambda}\rangle \langle \chi_{\lambda}| \Gamma}, \quad (3.a)$$

При этом предполагалось, что часть  $H_p^0 PHP$  в интервале  $I$  с энергией практически не меняется, а  $|\psi^{0(+)}\rangle \equiv |P\psi^{(+)}\rangle$ . Величина  $\alpha_{\lambda p}$  определяется как:

$$\overline{\alpha_{\lambda p}} \equiv \left( \sum_{\lambda} \frac{\langle \chi_{\lambda} | \Gamma | P\psi^{(+)} \rangle}{E - E_{\lambda}} \right)_I \frac{1}{\langle \chi_{\lambda} | \Gamma | \psi^{0(+)} \rangle} \equiv \frac{\overline{X_{\lambda}}}{\langle \chi_{\lambda} | \Gamma | \psi^{0(+)} \rangle} \quad (3.b)$$

и находится из системы уравнений:

$$\sum_{\lambda} [\delta_{\mu\lambda} (1 + \alpha_{\lambda p} \overline{K_{\mu\lambda}}) (E - E_{\lambda}) - K_{\mu\lambda}] X_{\lambda} = \langle \chi_{\mu} | \Gamma | \psi^{0(+)} \rangle, \quad (4)$$

где

$$K_{\mu\lambda} = \langle \chi_{\mu} | \Gamma (E + i\epsilon - H_p^0)^{-1} \Gamma^+ | \chi_{\lambda} \rangle$$

$$X_{\lambda} = \frac{\langle \chi_{\lambda} | \Gamma | P\psi^{(+)} \rangle}{E - E_{\lambda}}$$

Эта система уравнений получается путем умножения слева на  $\langle \chi_{\lambda} | \Gamma$  формального решения уравнения (1)  $|P\psi^{(+)}\rangle$ , получающегося делением всего уравнения (1) слева на оператор  $(E + i\epsilon - H_p^0)$  и перенесения всех членов, кроме  $|P\psi^{(+)}\rangle$  вправо, и затем интегрирования полученного выражения по всему конфигурационному объему системы.

После добавления и вычитания в эффективном гамильтониане члена  $\overline{\alpha_{\lambda p} \Gamma^+ |\chi_{\lambda}\rangle \langle \chi_{\lambda}| \Gamma}$  и простых преобразований получается система уравнений (4).

Предполагается затем, что  $\overline{Im K_{\mu\lambda}} \ll D$ , где  $D$  — среднее расстояние между уровнями составного ядра; или, что дает тот же результат, в уравнении (4) пренебрегают интерференционными членами порядка малости

$(\overline{ImK_{\mu\lambda}/D})_{\mu\neq\lambda}$  от диагональных по  $\mu = \lambda$  членов. После усреднения решения равенства (4) по интервалу  $I$  будем иметь:

$$\overline{X_\lambda} = -\frac{i\pi}{D} \langle \overline{\chi_\lambda} | \Gamma | \Psi^{0(+)} \rangle. \quad (4a)$$

Подставляя уравнение (4a) в уравнение (3б), окончательно получим:

$$\overline{a_{\lambda p}} = -i \frac{\pi}{D}. \quad (4b)$$

Заметим, что то же приближение (4б) мы получили бы, если бы пренебрегли интерференционными по  $\lambda \neq \mu$  членами в уравнении (4) на основании предположения Бете [4] о случайности знаков матричных элементов, содержащих волновые функции составного ядра  $|\chi_\lambda\rangle$ .

Из вида множителя  $\overline{a_{\lambda p}}$  следует, что второй член выражения (3a) мнимый и именно он ответственен за мнимую часть оптического потенциала (вернее потенциальной матрицы, так как в  $V_{p'p}^0$  могут быть и недиагональные члены по  $p' \neq p$ ), поскольку в этот член входят операторы перехода  $\Gamma$  и  $\Gamma^+$ , переводящие частицу из одночастичного состояния в составное ядро и обратно.

В работе Сердобольского [2] этот член не учитывался, вследствие чего весь формализм был развит только для вещественной части оптического потенциала (вернее вещественной потенциальной матрицы).

Зная формальное решение уравнения (1), можно найти матричный элемент перехода  $\langle \Phi' | P \Psi^{(+)} \rangle$ , а по нему — недиагональный элемент  $S$  — матрицы, которым уже определяется само сечение произвольной реакции  $p' \neq p$ . Не останавливаясь на подробностях вывода выражения для  $S_{p'p}^I$  — матричного элемента (подробности его вывода можно найти в работах [1], [3]), выпишем окончательное выражение для  $S_{p'p}^I$ :

$$S_{p'p}^I = S_{p'p}^{0I} - 2i\Omega_p \theta_p \Pi_p^{\frac{1}{2}} \Omega_p \theta_p^0 \Pi_p^{\frac{1}{2}} \sum_\lambda \beta_{\lambda p'} \chi_{\lambda p} + \\ + \frac{2\pi}{D} \cdot \frac{\Omega_p \theta_p^0 \Pi_p^{\frac{1}{2}} \Omega_p \theta_p^0 \Pi_p^{\frac{1}{2}} \beta_{\lambda p} \beta_{\lambda p'}}{1 - \frac{i\pi}{D} \left[ \overline{\Delta_{\lambda\lambda}} - i \sum_p \beta_{\lambda p}^2 \Pi_p \left( \frac{\Omega_p \theta_p^0}{\Omega_p^0} \right)^2 \right]} - \\ - \sum_\lambda \left[ \Delta_{\mu\lambda} - i \sum_p \beta_{\mu p} \beta_{\lambda p} \Pi_p \left( \frac{\theta_p^0 \Omega_p}{\Omega_p^0} \right)^2 \right] \frac{\chi_{\lambda p} \Omega_p \theta_p^0 \Pi_p^{\frac{1}{2}}}{\langle \chi_\mu | \Gamma | \Psi^{(+)} \rangle}, \quad (5)$$

где

$$S_{p'p}^{0I} \equiv S_{p'p}^0 \delta_{p'p} = \Omega_p^2 \left( 1 - \frac{i\Gamma_p^0}{(E - E_p^0 - \Delta_p^0) + i \left( \frac{\Gamma_p^0}{2} + W_p \right)} \right). \quad (5a)$$

\* Здесь индексы  $p, p'$  (по аналогии с  $e, e'$  в работах [1] и [3]) означают полные наборы квантовых чисел, характеризующих соответственно входной и выходной каналы реакции.

Искомые величины  $\chi_{\lambda p}$  определяются системой уравнений, следующей из системы уравнений (4):

$$\sum_{\lambda} \left\{ \delta_{\mu\lambda} \left[ 1 - \frac{i\pi}{D} \left( \Delta_{\mu\lambda} - i \sum_p \beta_{\mu p} \beta_{\lambda p} \Pi_p \left( \frac{\Omega_p \theta_p^0}{\Omega_p^0} \right)^2 \right) \right] (E - E_{\lambda}) - \right. \\ \left. - \Delta_{\mu\lambda} + i \sum_p \beta_{\mu p} \beta_{\lambda p} \Pi_p \left( \frac{\Omega_p \theta_p^0}{\Omega_p^0} \right)^2 \right\} \chi_{\lambda p} = \beta_{\mu p} \quad (6)$$

В выражении (5) и системе уравнений (6) приняты следующие обозначения [1], [3]:

$$\Omega_p^0 = I_p |O_p|_{r=R}, \quad L_p = R I_p' |I_p|_{r=R} = \Delta_p + iP_p$$

$I_p, O_p$  — сходящаяся и расходящаяся волна в канале  $p$  на бесконечности. (Вблизи ядра ( $r \approx R$ ) они имеют более сложный вид [5])

$$L_p^0 = \frac{R (r u_p^{0(+)'})}{r u_p^{0(+)'}} \Big|_{r=R}, \quad \theta_p^{02} = \frac{(L_p - L_p^0)^*}{L_p - L_p^0}$$

При этом радиальная часть полной оптической волновой функции  $u_p^{0(+)}$  предполагается в виде:

$$|u_p^{0(+)}\rangle = \frac{1}{r_p v_p^{\frac{1}{2}}} (I_p - S_{pp}^{0'} O_p) |p\rangle, \quad r \gg R, \quad (5, a)$$

где  $|p\rangle$  — волновая функция внутреннего движения системы и спин-угловая часть.

Радиальная часть полной волновой функции имеет соответственно вид:

$$|u_p^{(+)}\rangle = \sum_p \frac{1}{r_p v_p^{\frac{1}{2}}} (I_p \delta_{p'p} - S_{p'p}^I O_p) |p'\rangle$$

$$\Omega_p^{02} = S_{pp}^{0'} = \Omega_p^0 \frac{L_p^* - L_p^0}{L_p - L_p^0}$$

$$\Gamma_p^0 = 2\gamma_p^{02} P_p, \quad \gamma_p^{02} = - \left( \frac{\partial L_p^0}{\partial E} \right)^{-1}$$

$$\Delta_p^0 = -\Delta_p \gamma_p^{02}, \quad \Pi_p = \frac{E_R \left( -\frac{\partial L_p^0}{\partial E} \right)}{|L_p - L_p^0|^2}$$

$$E_R = \frac{\hbar^2}{2mR^2}$$

Для  $L_p^0$  использовано линейное приближение при условии [3]:

$$L_p^0(E = E_p^0, W_p = 0) = 0,$$

$$L_p^0(E) = (E - E_p^0 + iW_p) \frac{\partial L_p^0}{\partial E} \Big|_{E = E_p^0, W_p = 0}$$

$$= (E - E_p^0 + iW_p) \frac{\partial \text{Re} L_p^0}{\partial E} \Big|_{E = E_p^0, W_p = \text{const}(E)} \quad (5b)$$

$$W_p = \langle pN_p | \text{Im} V_p^0 N_p \rangle \Big|_0^R = -\frac{\pi E_R \beta_{\lambda p}^0}{D};$$

$\infty H_p^0 = H_{0p} + V_p^0$  — мнимая часть оптического потенциала в канале  $p$ ;  
 $H_{0p}$  — гамильтониан свободного движения системы в канале  $p$ ;

$\langle pN_p | V_p^0 | pN_p \rangle$  — диагональный элемент в канале  $p$  оптической потенциальной матрицы.

$$K_{\mu\lambda} = \Delta_{\mu\lambda} - i \sum_p \beta_{\mu p} \beta_{\lambda p} \Pi_p \left( \frac{\Omega_p \theta_p^0}{\Omega_p^0} \right)^2$$

$$\Delta_{\mu\lambda} = \text{Re} K_{\mu\lambda} = \langle \chi_\mu | \Gamma_{\text{гл. шн}} (E - H_p^0)^{-1} \Gamma^+ | \chi_\lambda \rangle$$

$$\Delta_{\mu\lambda} = \text{Re} K_{\mu\lambda} = \langle \chi_\mu | \Gamma_{\text{гл. шн}} (E - H_p^0)^{-1} \Gamma^+ | \chi_\lambda \rangle,$$

где

$$\beta_{\lambda p} = E_R^{-\frac{1}{2}} \langle \chi_\lambda | \Gamma | pN_p \frac{\sqrt{2\delta(r-R)}}{r} \rangle.$$

$\Gamma_{\lambda p} = 2\Pi_p \beta_{\lambda p}^2$  — парциальная ширина в канале  $p$ , где  $|N_p\rangle$  — чисто радиальная часть оптической волновой функции внутри ядра, для которой по аналогии с работами [1, 3] принимается приближение:

$$|u_p^{0(+)}\rangle = N_p(r) \frac{\sqrt{2\delta(r-R)}}{r} f_p(E, R) |p\rangle, \quad r \leq R. \quad (5, в)$$

Отличие от прежнего разложения заключается лишь в том, что чисто радиальная часть  $N_p(r) \frac{\sqrt{2\delta(r-R)}}{r}$  предполагается в виде двух сомножителей — одного, зависящего плавно от координаты, и другого — сильно зависящего от нее в виде  $\delta$ -функции. Такое приближение позволяет выделить явный вид функции  $f_p(E, R)$ , необходимый для расчета матричных элементов, содержащих оптическую волновую функцию, а следовательно, для расчета проникаемости  $\Pi_p(E, R)$  нейтронных ширин, не прибегая к приближению малых энергий, т. е. к условию  $k \ll K$  (где  $k$  — волновое число нейтрона вне ядра, а  $K$  — волновое число нейтрона внутри ядра). В самом деле, скалярное произведение  $\langle \tilde{u}_p^{0(-)} | u_p^{0(+)} \rangle$  [1, 3] можно тогда, пользуясь разложением (5 в), представить в виде:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{u}_p^{0(-)} | u_p^{0(+)} \rangle_0^R &= |N_p(R)|^2 2 \int_0^R \delta(r-R) f_p^2(E, r) \langle p | p \rangle dr = \\ &= |N_p(R)|^2 f_p^2(E, R) \langle p | p \rangle = \frac{\hbar^2 R}{2m} [1 \tilde{u}_p^{0(-)}]^* |u_p^{0(+)}\rangle_{r=R} \frac{\partial L_p^0}{\partial E}. \quad (5, з) \end{aligned}$$

Полагая  $|N_p(R)|^2 = 1$  и  $\langle p | p \rangle = 1$ , через правую часть соотношения (5з) находим явный вид множителя  $f_p(E, R)$ .

Указанное приближение (5в) соответствует рассмотренно оптических эффектов (поглощение и рассеяние) как чисто поверхностных, для которых при оптическом взаимодействии главную роль играет взаимодействие нейтронов с поверхностью ядра.

Второе важное предположение: рассматриваются только одни диагональные элементы  $S^0$ -матрицы. Пренебрежение недиагональными матричными элементами  $S^0$ -матрицы ( $p' \neq p$ ) соответствует приближению, когда пренебрегают вкладом чисто прямых процессов взаимодействия (без

образования составного ядра) в неупругих каналах реакций, хотя при этом и учитывают многокаскадные процессы перехода из одночастичного состояния в составное ядро, а затем обратно с возможным вылетом другой частицы или с изменением состояния исходного ядра-мишени (неупругое рассеяние). Такое приближение оправдано тем, что недиагональные по  $p' \neq p$  элементы  $S_{p',p}^{01}$ -матрицы имеют порядок малости  $\Gamma_p^0/d$  от диагональных по  $p' = p$  членов ( $d$  — среднее расстояние между одночастичными уровнями в потенциальной яме глубины  $ReV_p^0$ ). Для рассматриваемой здесь области энергий (не выше нескольких десятков Мэв) эти величины малы. Величины  $\Delta_{\mu\lambda}$  — «смещения» положений резонансных уровней  $E_\mu$  и  $E_\lambda$ , автоматически обращаются в нуль, если подинтегральные матричные элементы плавно зависят от энергии. В самом деле, по определению

$$\Delta_{\mu\lambda} = \frac{1}{2\pi\hbar} \sum_p \int dE' \frac{\langle \chi_\mu | \Gamma | u_p^{0(+)} \rangle \langle \tilde{u}_p^{0(+)} | \Gamma^+ | \chi_\lambda \rangle}{E - E'} \approx$$

$$\approx \sum_p \frac{\langle \chi_\mu | \Gamma | u_p^{0(+)} \rangle \langle \tilde{u}_p^{0(+)} | \Gamma^+ | \chi_\lambda \rangle}{2\pi\hbar} \int \frac{dE'}{E - E'} = 0$$

так как

$$\int \frac{dE'}{E - E'} = 0.$$

Множитель  $\left(\frac{\Omega_p^0 \theta_p^0}{\Omega_p^b}\right)^2$ , из выражений (5) и (6), отражает специфику учета мнимой части оптического потенциала (потенциальной матрицы), так как в случае, если бы оптический потенциал был вещественным, этот множитель автоматически обращался бы в единицу.

### Средние сечения

Среднее сечение произвольной реакции  $p \rightarrow p'$  определяется обычным образом через недиагональный элемент  $S_{p',p}^I$ -матрицы [см. выражение (5)]:

$$\sigma_{p',p} = \sum_I \sigma_{p',p}^I = \pi\lambda^2 \sum_I g_I |S_{p',p}^I|^2,$$

$$\sigma_{p',p} = \pi\lambda^2 \sum_I g_I \frac{2\pi\Gamma_{\lambda p}\Gamma_{\lambda p'}}{D\Gamma_\lambda} \left[ K_{\lambda\lambda p',p}^0 - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Gamma_\lambda}{D} (K_{\lambda\lambda p',p})^2 + \right.$$

$$\left. + \left[ 2 \left(\frac{\Gamma_\lambda}{D}\right)^2 K_{\lambda\mu p',p}, \text{ при } \frac{\Gamma_\lambda}{D} \ll 1 \right] \right],$$

$$\left. + \left[ \pi \frac{\Gamma_\lambda}{D} (K_{\lambda\lambda p',p})^2, \text{ при } \frac{\Gamma_\lambda}{D} \gg 1 \right] \right],$$

где  $\lambda^2$  — длина волны падающего нейтрона, деленная на  $2\pi$ ;  $g_I = \frac{2I+1}{2(2I+1)}$  — статистический вес;  $I_{i,j}$  — спин составного ядра и ядра-мишени соответственно;  $K = (K_i^0, K_i^1, K_{(j)})$  — корреляционные функции, учитывающие усреднение сечения  $\sigma_{p',p}$  по распределению знаков и амплитуд приведенных полуширин  $\beta_{\lambda p}, \beta_{\lambda p'}, \sum_{p'+p, p'} \beta_{\lambda p'}$ .

В самом общем виде функции  $K$  могут быть представлены следующим образом:

$$K_{\lambda\lambda\rho\rho'}^0 = \left( \frac{\beta_{\lambda\rho}^2 \beta_{\lambda\rho'}^2}{\Gamma_{\lambda\rho} + 2\beta_{\lambda\rho}^2 \Pi_p + 2\beta_{\lambda\rho'}^2 \Pi_{p'} + 2 \sum_{p''} \beta_{\lambda\rho''}^2 \Pi_{p''}} \right)_l \frac{\Gamma_{\lambda}}{\beta_{\lambda\rho}^2 \beta_{\lambda\rho'}^2},$$

где  $\Gamma_{\lambda\rho}$  — полная ширина всех реакций, исключая упругое и неупругое рассеяния;

$$K_{\lambda\lambda\rho\rho'} = \frac{(\beta_{\lambda\rho} \beta_{\lambda\rho'})_l}{(\beta_{\lambda\rho}^2)^{\frac{1}{2}} (\beta_{\lambda\rho'}^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$K_{\lambda\mu\rho\rho'} = \frac{[\beta_{\lambda\rho} \beta_{\lambda\rho'} \beta_{\mu\rho'} (\Gamma_{\lambda\rho} + 2\Pi_p \beta_{\lambda\rho}^2 + 2\Pi_{p'} \beta_{\lambda\rho'}^2 + 2 \sum_{p''} \Pi_{p''} \beta_{\lambda\rho''}^2)]_l}{\beta_{\lambda\rho}^2 \beta_{\lambda\rho'}^2 \Gamma_{\lambda}}.$$

Наибольший интерес представляет рассмотрение двух крайних случаев в распределении амплитуд приведенных полуширин.

**1-й случай.** Согласно Бете [4] распределение знаков амплитуд приведенных полуширин предположим случайным.

Тогда для определения  $K$ -функции будут характерны два подслучая:

а)  $\rho' = \rho$ ,  $K_{\lambda\lambda\rho\rho} = 1$ ,  $K_{\lambda\lambda\rho\rho}^0 \neq 0$ ,  $K'_{\lambda\mu\rho\rho} \neq 0$ ,

так как последние зависят не от распределения знаков амплитуд, а только от величины амплитуд.

б)  $\rho' \neq \rho$ ,  $K_{\lambda\lambda\rho\rho'} = K'_{\lambda\mu\rho\rho'} = 0$ ,  $K_{\lambda\lambda\rho\rho'}^0 \neq 0$ ,

так как  $K^0$  не зависит от выбора знаков амплитуд.

**2-й случай.** Знаки амплитуд приведенных полуширин вполне определены и не меняются в пределах интервала усреднения  $l$ . Тогда соответственно двум подслучаям будем иметь:

а)  $\rho' = \rho$ ,  $K_{\lambda\lambda\rho\rho} = 1$ ,  $K_{\lambda\lambda\rho\rho}^0 \neq 0$ ,  $K'_{\lambda\lambda\rho\rho} \neq 0$ ;

б)  $\rho' \neq \rho$ ,  $K_{\lambda\lambda\rho\rho'} \neq 0$ ,  $K'_{\lambda\mu\rho\rho'} \neq 0$ ,  $K_{\lambda\lambda\rho\rho'}^0 \neq 0$ .

Для оценок  $K$ -функций воспользуемся  $\chi^2$  — распределением Портера—Томаса [6].

$$P_{\nu}(x) dx = \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\frac{\nu}{2}-1} \exp\left(-\frac{\nu x}{2}\right) dx, \quad (8)$$

где  $x = \beta_{\lambda\rho}^2 / \beta_{\lambda\rho'}^2$ .

Усредняя выражение (7) по распределению (8) и предположив, что  $\nu$  — числа открытых каналов типа  $\rho$ ;  $\mu$  — числа открытых каналов типа  $\rho'$ ;  $\varrho$  — числа открытых каналов типа  $\rho'' \neq \rho, \rho'$  соответственно обоим случаям будем иметь:

**1-й случай**

а)  $\rho' = \rho$

$$K_{\lambda\lambda\rho\rho}^0 = \frac{\Gamma_{\lambda}}{\Gamma_{\lambda\rho}} \left(\frac{\nu}{2} + 1\right) \left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}+1} \left(\frac{\varrho + \mu}{2}\right)^{\frac{\varrho + \mu}{2}} l, *$$

\* Трехкратный интеграл, получающийся при усреднении выражений (7), аналитически не вычисляется, но его можно свести к однократному интегралу (см., например, [7]), который в достаточном приближении определяется по интерполяционной формуле Гаусса с 8-ю коэффициентами [8].

где

$$I = \int_0^1 f(z) dz = \sum_{k=1}^8 A_k f(z_k)$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{1-z}{z}\right)}{\left(\frac{\nu}{2} + \frac{r_1}{r_0} \cdot \frac{1-z}{z}\right)^{\frac{\nu}{2}+2} \left(\frac{\mu}{2} + \frac{r_2+r_3}{r_0} \cdot \frac{1-z}{z}\right)^{\frac{\mu}{2}}}$$

$$r_0 = \frac{\bar{\Gamma}_{\lambda r}}{\Gamma_{\lambda p}}, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = \frac{\bar{\Gamma}_{\lambda p'}}{\Gamma_{\lambda p}}, \quad r_3 = \frac{\sum \bar{\Gamma}_{\lambda p''}}{\Gamma_{\lambda p}}$$

$$z_1 = 0,01986 \quad A_1 = A_8 = 0,05061$$

$$z_2 = 0,1017 \quad A_2 = A_7 = 0,1112$$

$$z_3 = 0,2372 \quad A_3 = A_6 = 0,1569$$

$$z_4 = 0,4083 \quad A_4 = A_5 = 0,1813$$

$$z_5 = 0,5917$$

$$z_6 = 0,7628$$

$$z_7 = 0,8983$$

$$z_8 = 0,9801$$

$$K_{\lambda \mu \rho \rho'} = \frac{r_0 + r_1 \cdot \frac{\nu}{2} + 1}{\frac{\nu}{2}} + r_2 + r_3$$

$$K_{\lambda \mu \rho \rho} = \frac{r_0 + r_1 + r_2 + r_3}{r_0 + r_1 + r_2 + r_3};$$

б)  $\rho' \neq \rho$ ;

$$K_{\lambda \lambda \rho' \rho}^0 = \frac{\Gamma_{\lambda}}{\Gamma_{\lambda r}} \left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}+1} \left(\frac{\mu}{2}\right)^{\frac{\mu}{2}+1} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{\frac{\rho}{2}} I,$$

где

$$I = \int_0^1 f(z) dz = \sum_{k=1}^8 A_k f(z_k);$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{1-z}{z}\right)}{\left(\frac{\nu}{2} + \frac{r_1}{r_0} \cdot \frac{1-z}{z}\right)^{\frac{\nu}{2}+1} \left(\frac{\mu}{2} + \frac{r_2}{r_0} \cdot \frac{1-z}{z}\right)^{\frac{\mu}{2}+1} \left(\frac{\rho}{2} + \frac{r_3}{r_0} \cdot \frac{1-z}{z}\right)^{\frac{\rho}{2}}}$$

Значения  $z_k$  и  $A_k$  те же, что в случае 1, а.

2-й случай

а)  $\rho' = \rho, \quad K_{\lambda \lambda \rho \rho}^0 = K_{\lambda \lambda \rho \rho}^0$

(см. случай 1а)

$$K_{\lambda \mu \rho \rho}^0 = K_{\lambda \mu \rho \rho}^0$$

(см. случай 1а)

б)  $\rho' \neq \rho, \quad K_{\lambda \lambda \rho' \rho}^0 = K_{\lambda \lambda \rho' \rho}^0$

(см. случай 1б)

$$K_{\lambda \lambda \rho' \rho} = \frac{2\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\mu}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}$$

$$K'_{\lambda\mu\rho^0\rho} = r_0 + r_1 \frac{\nu+1}{\nu} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{\nu}{2}\right) \left(\frac{\nu}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} +$$

$$\frac{r_2 \frac{\mu+1}{\mu} \Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{\mu}{2}\right) \left(\frac{\mu}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} + r_3}{r_0 + r_1 + r_2 + r_3}.$$

### Выводы и обсуждение результатов

Развитый в работах [1, 3] математический аппарат теории столкновений позволил в настоящей работе в рамках определенных предположений получить выражение для среднего сечения произвольной реакции с учетом оптических эффектов рассеяния.

При этом принимались следующие предположения:

1) При описании неупругих столкновений не учитывалось влияние прямых одночастичных процессов рассеяния в матричных элементах оптической  $S^0$ -матрицы, иначе говоря, рассматривались только диагональные элементы  $S^0$ -матрицы. Такое приближение может быть оправдано тем, что вклад недиагональных членов  $S^0$ -матрицы порядка  $\Gamma_p^0/d \ll 1$ , где  $d$  — среднее расстояние между одночастичными резонансами, а  $\Gamma_p^0$  — одночастичная ширина в канале  $p$ .

Вместе с тем одночастичное взаимодействие косвенным образом учитывалось в нейтронных ширинах через пронцаемость нейтронов.

2) Мнимая часть оптического потенциала, получающаяся при усреднении резонансных членов «эффективного» гамильтониана, определялась при предположении, что резонансы составного ядра изолированы. При этом пренебрегали интерференционными членами с  $\lambda \neq \mu$  в сумме по  $\lambda, \mu$ , которые вносят слагаемые порядка  $\Gamma_\lambda/D$  от диагональных членов ( $\lambda = \mu$ ) или, что дает тот же результат, при условии выполнения предположения Бете [4] о случайности знаков амплитуд приведенных полуширин  $\beta_{\lambda\rho}$ .

Последнее приближение выполняется и при условии перекрывающихся уровней, когда  $\bar{\Gamma}_\lambda/D \geq 1$ . Рассмотрение корреляционных функций  $K$  позволяет дать однозначный ответ на вопрос: коррелируют ли нет знаки амплитуд приведенных полуширин? Представляется интересным сравнить с этой целью теорию с экспериментом.

Предварительные расчеты сечений неупругого рассеяния нейтронов и радиационного захвата для средних и тяжелых ядер в области энергий падающих нейтронов ниже нескольких  $M\text{эв}$  показывают, что корреляционные поправки необходимо учитывать.

### Литература

1. Schwinger J., Lippmann B. A. Phys. Rev. 79, 469, 1950.
2. Сердобольский В. И. ЖЭТФ, 40, 590, 1961.
3. Гордеев И. В. ЖЭТФ, 42, 1063, 1962.
4. Bethe H. Phys. Rev. 57, 1125, 1940.
5. Blatt В. Вайскопф Д. Теоретическая ядерная физика М., ИЛ., 1954.
6. Porter C. E., Thomas R. Phys. Rev. 104, 483, 1956.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., ГИФМЛ, 1962.
8. Крылов А. Н. Лекция о приближенных вычислениях. М., ГИТТЛ, 1954.

Статья поступила 30 ноября 1964 г.

## ИЗУЧЕНИЕ СВОЙСТВ РАДИОАКТИВНЫХ АЭРОЗОЛЕЙ НА ПРИМЕРЕ ДОЧЕРНИХ ПРОДУКТОВ РАДОНА

Экспериментально определен коэффициент самопоглощения  $\alpha$ -активности в пробе и осаждения дочерних продуктов радона в цилиндрических каналах по методике, основанной на  $\alpha$ -,  $\beta$ -спектрометрии RaA, RaB и RaC.

Существующие в настоящее время методы определения концентраций короткоживущих дочерних продуктов распада радона в воздухе [1—3] имеют ряд недостатков. Недостатки эти обусловлены тем, что производится суммарное измерение активности всех изотопов, собранных на фильтре при отборе пробы. Несмотря на то, что между изотопами, собранными на фильтре существует строгая генетическая связь, временной анализ  $\alpha$ -активности приводит к методическим погрешностям, зависящим от отношения измеряемых концентраций, выбора моментов времени, в которые измеряют активность, наличия эффекта самопоглощения  $\alpha$ -активности и других факторов. Эти погрешности в отдельных случаях могут достигать нескольких сот процентов, что ограничивает возможность применения данных методик при проведении научно-исследовательских работ по физике образования и осаждения радиоактивных аэрозолей.

В работе [4] была предложена методика, в основу которой положен принцип раздельного измерения активности каждого из дочерних продуктов. Эта методика дает результаты примерно на порядок точнее имеющихся в настоящее время, что позволяет измерять ряд эффектов, связанных с выяснением некоторых физико-химических свойств радиоактивных аэрозолей.

В настоящей работе при помощи методики, основанной на  $\alpha$ -,  $\beta$ -спектрометрии дочерних продуктов распада радона, экспериментально определены эффекты самопоглощения  $\alpha$ -активности в пробе и осаждения дочерних продуктов радона в цилиндрических каналах.

### Теория метода и методика измерений

Выражения для активности каждого из дочерних продуктов радона, которые осаждаются с постоянной скоростью (методы фильтрации, электростатической преципитации, инерционного и диффузионного осаждения, оседания в поле тяжести и др.) к моменту окончания отбора пробы могут быть получены путем решения уравнения для цепочки радиоактивных превращений, когда материнское вещество является долгоживущим [5]. Активности RaA, RaB и RaC запишутся соответственно в виде:

$$A_A(\theta) = \delta_A W_A \frac{1}{\lambda_A} (1 - e^{-\lambda_A \theta}); \quad (1)$$

$$A_B(\theta) = \delta_B W_B \frac{1}{\lambda_B} (1 - e^{-\lambda_B \theta}) + \delta_A W_A \frac{1}{\lambda_A} \left( 1 + \frac{\lambda_B e^{-\lambda_A \theta} - \lambda_A e^{-\lambda_B \theta}}{\lambda_A - \lambda_B} \right). \quad (2)$$

$$A_C(\theta) = \delta_C W_C \xi_C(\theta) + \delta_B W_B \xi_B(\theta) + \delta_A W_A \xi_A(\theta). \quad (3)$$

где:  $\theta$  — время отбора пробы, мин;  $\delta_A, \delta_B, \delta_C$  — коэффициенты осаждения RaA, RaB и RaC;  $W_A, W_B, W_C$  — скорости осаждения активности RaA, RaB и RaC, кюри/мин;  $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C$  — постоянные распада RaA, RaB и RaC, мин<sup>-1</sup>.

$$\xi_C(\theta) = \frac{1}{\lambda_C} (1 - e^{-\lambda_C \theta}), \quad (4)$$

$$\xi_B(\theta) = \frac{1}{\lambda_B} \left( 1 + \frac{\lambda_C e^{-\lambda_B \theta} - \lambda_B e^{-\lambda_C \theta}}{\lambda_B - \lambda_C} \right), \quad (5)$$

$$\xi_A(\theta) = \frac{1}{\lambda_A} \left[ 1 - \frac{\lambda_B \lambda_C e^{-\lambda_A \theta}}{(\lambda_B - \lambda_A)(\lambda_C - \lambda_A)} - \frac{\lambda_A \lambda_C e^{-\lambda_B \theta}}{(\lambda_A - \lambda_B)(\lambda_C - \lambda_B)} - \frac{\lambda_A \lambda_B e^{-\lambda_C \theta}}{(\lambda_A - \lambda_C)(\lambda_B - \lambda_C)} \right]. \quad (6)$$

Выражения для активности RaA, RaB и RaC к моменту времени  $t$ , прошедшему после окончания отбора пробы, получим, применяя известные выражения для цепочки радиоактивных превращений [6]:

$$A_A(\theta, t) = A_A(\theta) e^{-\lambda_A t}, \quad (7)$$

$$A_B(\theta, t) = A_B(\theta) e^{-\lambda_B t} + A_A(\theta) \frac{\lambda_B}{\lambda_A - \lambda_B} (e^{-\lambda_B t} - e^{-\lambda_A t}), \quad (8)$$

$$A_C(\theta, t) = A_C(\theta) e^{-\lambda_C t} + A_B(\theta) \frac{\lambda_C}{\lambda_B - \lambda_C} (e^{-\lambda_C t} - e^{-\lambda_B t}) + A_A(\theta) \lambda_B \lambda_C \left[ \frac{e^{-\lambda_B t} - e^{-\lambda_A t}}{(\lambda_A - \lambda_B)(\lambda_C - \lambda_B)} + \frac{e^{-\lambda_C t} - e^{-\lambda_A t}}{(\lambda_A - \lambda_C)(\lambda_B - \lambda_C)} \right]. \quad (9)$$

Существенное различие в энергиях  $\alpha$ -излучения RaA (6,00 мэв) и RaC' (7,68 мэв), а также  $\beta$ -излучения RaB ( $E_{\max} = 0,65$  мэв) и RaC ( $E_{\max} = 3,17$  мэв) дает возможность сравнительно просто раздельно измерять активность каждого из этих изотопов методом  $\alpha$ - и  $\beta$ -спектрометрии.

Для измерения  $\alpha$ -активности использовалась установка, состоящая из датчика  $\alpha$ -излучения (кристалл CsI (Тl) толщиной 0,1 мм) и амплитудного анализатора АИ-100. При измерении  $\beta$ -излучения датчиком служил кристалл антрацена толщиной 20 мм.

Для определения  $A_A(\theta, t)$ ,  $A_B(\theta, t)$  и  $A_C(\theta, t)$  в кюри проводились относительные измерения. В качестве образцового источника использовался незманирующийся  $\alpha$ -,  $\beta$ -излучающий источник Ra<sup>226</sup>, энергетические спектры которого приведены на рис. 1, 2.

Поскольку  $Ra^{226}$ ,  $Rn^{222}$ ,  $RaA$ ,  $RaB$ ,  $RaC$  и  $RaC'$  в источнике находятся в равновесии, можно легко определить число распадов  $\alpha$ -излучающих изотопов  $RaA$  и  $RaC'$  за определенное время. Число распадов  $\beta$ -излу-

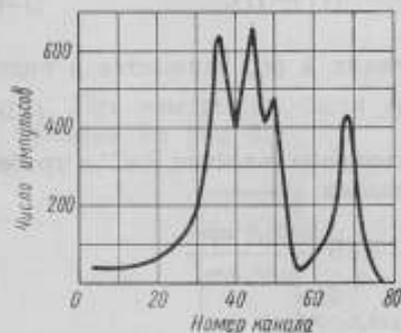


Рис. 1. Альфа-спектр источника  $Ra^{226}$ .

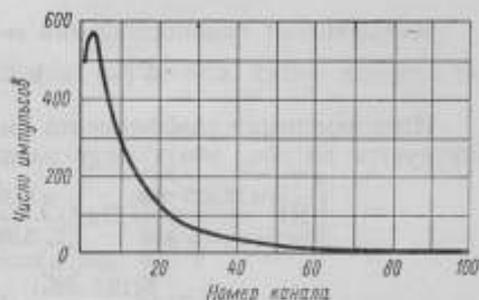


Рис. 2. Бета-спектр источника  $Ra^{226}$ .

чающих изотопов  $RaB$  и  $RaC$  находится путем разделения непрерывного  $\beta$ -спектра при помощи конверсионной линии  $Cs^{137}$ , энергия которой 0,624 мэв служит в качестве реперной точки для разделения  $RaB$  и  $RaC$ .

#### Экспериментальное определение коэффициента самопоглощения $\alpha$ -активности в пробе

Коэффициент самопоглощения  $\alpha$ -излучения зависит от распределения активности и пыли в пылевом осадке, от дисперсности пыли и других факторов.

Будем считать, что проба представляет собой плоский источник с равномерным распределением активности в слое осевшей пыли. Расчет, проведенный в работе [7], показывает, что спектр  $\alpha$ -частиц, вылетающих из плоского источника, имеет вид:

$$N(\epsilon) d\epsilon = \frac{N_0 n \epsilon^{n-1} d\epsilon}{4H} \theta(H-1) + \frac{N_0 n \epsilon^{n-1} d\epsilon}{4H} \theta[\epsilon - \epsilon'(H)] \theta[1-H] + \frac{N_0 H n \epsilon^{n-1} d\epsilon}{4(1-\epsilon^n)^2} \theta[\epsilon'(H) - \epsilon] \theta[1-H], \quad (10)$$

где  $\epsilon = \frac{E}{E_0}$  — относительная энергия  $\alpha$ -частиц,  $H = \frac{h}{R_0}$  ( $h$  — толщина активного слоя,  $R_0 = aE_0^n$  — пробег  $\alpha$ -частиц с энергией  $E_0$  в материале пыли).

$$\epsilon'(H) = (1-H)^{\frac{1}{n}}$$

$$\theta(x-y) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq y \\ 0 & \text{при } x < y. \end{cases}$$

$N_0$  — активность изотопа в пробе.

Доля  $\alpha$ -частиц, вылетающих из такого слоя

$$p(m) = \frac{N}{N_0} \quad (11)$$

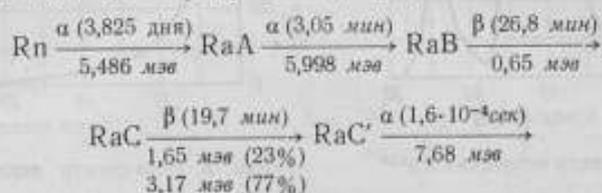
зависит от толщины пылевого осадка  $m$  ( $\text{мг}/\text{см}^2$ ) и определяется интегрированием выражения (10) по энергии

$$p(m) = \frac{1}{4H} \theta(H-1) + \frac{2-H}{4} \theta(1-H). \quad (12)$$

Коэффициент самопоглощения  $\alpha$ -излучения  $k(m)$  запишется в виде

$$k(m) = 1 - p(m). \quad (13)$$

Идея измерения коэффициента самопоглощения  $\alpha$ -частиц  $\text{RaC}'$  в пробе базируется на том, что в ряду распада радона



$\alpha$ -излучатель  $\text{RaC}'$  всегда находится в равновесии с  $\beta$ -излучателем  $\text{RaC}$  ( $\lambda_{\text{RaC}'} \gg \lambda_{\text{RaC}}$ ), т. е. активности  $\text{RaC}'$  и  $\text{RaC}$  равны между собой в любой момент времени

$$A_{\text{C}'}(t) = A_{\text{C}}(t). \quad (14)$$

Поскольку  $\alpha$ -излучение  $\text{RaC}'$  в значительной степени поглощается в пробе, а поглощение  $\beta$ -излучения  $\text{RaC}$  пренебрежимо мало, то из сравнения счета  $\alpha$ -частиц  $\text{RaC}'$  и  $\beta$ -частиц  $\text{RaC}$  можно определить коэффициент самопоглощения  $\alpha$ -излучения  $\text{RaC}'$  в пылевом осадке.

Эта идея применима и к  $\alpha$ -излучателю  $\text{ThC}'$ , так как в ряду распада торона он всегда находится в равновесии с  $\beta$ -излучателем  $\text{ThC}$ .

Количества  $\beta$ -частиц  $\text{RaC}-\text{N}_{\text{C}}$  и  $\alpha$ -частиц  $\text{RaC}'-\text{N}_{\text{C}'}$ , зарегистрированных за время измерения  $T$ , запишутся следующим образом:

$$N_{\text{C}} = \epsilon_{\beta} \int_0^T A_{\text{C}}(t) dt, \quad (15)$$

$$N_{\text{C}'} = p_{\text{C}'}(m) \epsilon_{\alpha} \int_0^T A_{\text{C}'}(t) dt, \quad (16)$$

где  $\epsilon_{\beta}$  и  $\epsilon_{\alpha}$  — эффективности регистрации  $\beta$ - и  $\alpha$ -излучения  $\text{RaC}$  и  $\text{RaC}'$ . Так как  $A_{\text{C}}(t) = A_{\text{C}'}(t)$ , то

$$p_{\text{C}'}(m) = \frac{N_{\text{C}'}}{N_{\text{C}}} \cdot \frac{\epsilon_{\beta}}{\epsilon_{\alpha}}. \quad (17)$$

Отношение  $\frac{\epsilon_{\beta}}{\epsilon_{\alpha}}$  можно определить, измеряя счет  $\beta$ -частиц  $\text{RaC}$  и  $\alpha$ -частиц  $\text{RaC}'$  от описанного выше образцового источника  $\text{Ra}^{226}$  с постоянной активностью  $A_{\text{C}}^{\text{ист}} = A_{\text{C}'}^{\text{ист}} = A^{\text{ист}}$ .

$$N_{\text{C}}^{\text{ист}} = \epsilon_{\beta} A^{\text{ист}} T, \quad (18)$$

$$N_{\text{C}'}^{\text{ист}} = \epsilon_{\alpha} A^{\text{ист}} T, \quad (19)$$

$$\frac{\epsilon_{\beta}}{\epsilon_{\alpha}} = \frac{N_{\text{C}}^{\text{ист}}}{N_{\text{C}'}^{\text{ист}}}. \quad (20)$$

Таким образом,

$$p_{C'}(m) = \frac{\frac{N_{C'}}{N_{C'}^{ист}}}{\frac{N_C}{N_C^{ист}}} \quad (21)$$

При измерениях была использована установка, схема которой изображена на рис. 3.

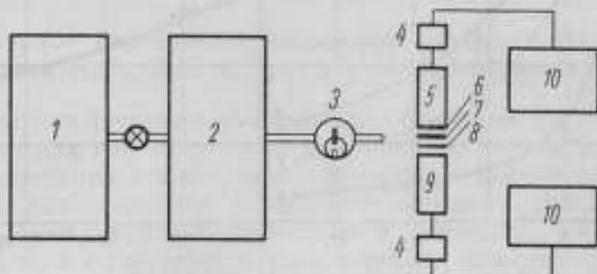
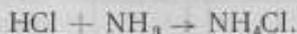


Рис. 3. Схема экспериментальной установки:

1 — камера типа 1 КА-НЖ с источником  $Ra^{226}$ ; 2 — пылевая камера; 3 — воздуходувка ПРВ-1М; 4 — предусилитель; 5 — ФЭУ-13; 6 — кристалл  $CsI(Tl)$ ; 7 — фильтр типа ЛФС; 8 — кристалл антрацена; 9 — ФЭУ-29; 10 — пересчетный прибор «Искра-1».

В качестве аэрозоля использовался хлористый аммоний  $NH_4Cl$  с логарифмически нормальным распределением частиц по размерам [8], образующийся в результате взаимодействия в газовой фазе хлористого водорода и аммиака



Микрофотография аэрозолей  $NH_4Cl$  приведена на рис. 4.

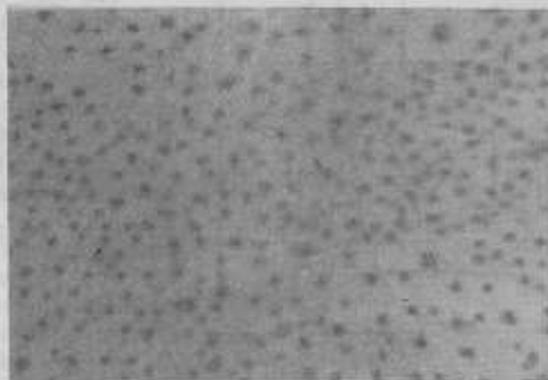


Рис. 4. Микрофотография аэрозоля  $NH_4Cl$ .

После получения нужной концентрации аэрозоля в пылевую камеру объемом  $2 м^3$  впускали радон с дочерними продуктами. Образовавшийся радиоактивный аэрозоль  $NH_4Cl$  осаждался на фильтр типа ЛФС путем прокачки заданного объема воздуха ротационной воздуходувкой ПРВ-1М.

Активность пробы измеряли при помощи спектрометрической установки, состоящей из  $\alpha$ - и  $\beta$ -каналов. Каналы состояли из датчиков  $\alpha$ -

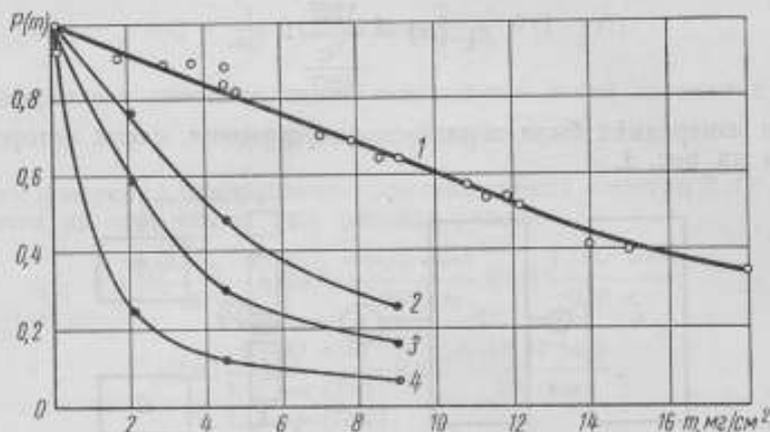


Рис. 5. Зависимость  $p$  от  $m$  при различных порогах дискриминации: 1 — 1 к, 2 — 50 к, 3 — 60 к, 4 — 70 к.

и  $\beta$ -излучения [кристаллы CsI (Т1) и антрацен соответственно], интегральных дискриминаторов и пересчетных приборов типа «Искра-1».

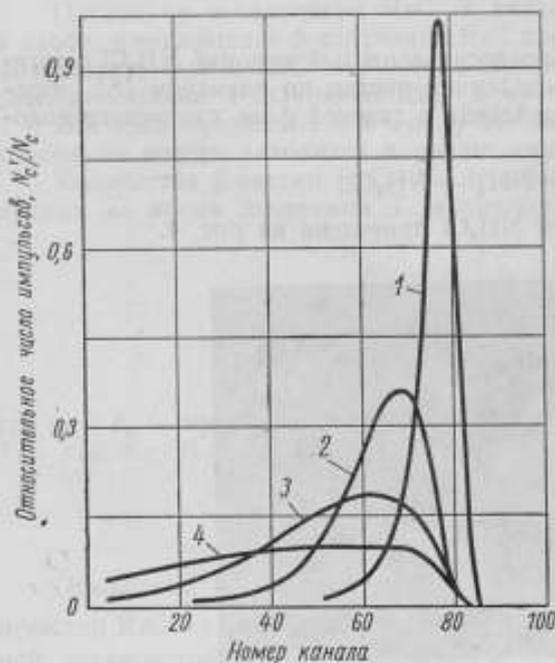


Рис. 6. Альфа-спектры  $RaC'$  для различных количеств пыли на фильтре:

1 — 0,00  $мг/см²$ , 2 — 2,10  $мг/см²$ , 3 — 4,47  $мг/см²$ , 4 — 9,00  $мг/см²$ .

фильтре. Нормировка числа импульсов  $RaC'$  на  $RaC$ , зарегистрированных за одно и то же время, произведена с целью сведения всех экспериментов к одной системе отсчета.

Измерения проводились по методике, описанной выше. Вначале измерялись величины  $N_{C'}$ ,  $N_C$ ,  $N_{C'}^{ист}$ ,  $N_C^{ист}$ , а затем по формуле (21) вычисляли величину  $p_C(m)$ , связанную с коэффициентом самопоглощения формулой (13).

На рис. 5 даны результаты измерения  $p_C(m)$  в зависимости от количества пыли, осажденной на  $1 см²$  поверхности фильтра, которые сняты при разных порогах дискриминации. Экспериментальные точки кривой 1 хорошо согласуются с теоретической кривой, построенной по формуле (12), если принять пробег  $\alpha$ -частиц  $RaC'$  в слое хлористого аммония  $R_0 = 12,5 мг/см²$ .

На рис. 6 приведены  $\alpha$ -спектры  $RaC'$ , снятые на амплитудном анализаторе импульсов АИ-100 при различных количествах пыли на

Из рис. 5 и 6 следует, что при наличии заметных количеств пыли на фильтре происходит существенное поглощение, а спектральные искажения довольно велики, что в некоторых случаях ограничивает применение метода  $\alpha$ -спектрометрии при измерении активности пылевого осадка.

Полученные результаты могут применяться для введения поправки на самопоглощение  $\alpha$ -излучения при определении концентрации  $\text{Pu}^{239}$  в воздухе, так как в данном случае приходится прокачивать большие объемы воздуха и на фильтре накапливается большое количество пыли.

#### Экспериментальное определение осаждения дочерних продуктов распада радона RaA, RaB и RaC в цилиндрическом канале

Спектрометрия дочерних продуктов распада радона может быть с успехом применена для изучения вопросов образования радиоактивных аэрозолей и их поведения в различных системах. В данной работе она была использована для изучения осаждения дочерних продуктов распада радона, что имеет значение не только в медицине, биологии, защите от излучений, но и в соответствующих отраслях промышленности, так как позволяет оценить вызванные осаждением потери радиоактивных частиц в подводных коммуникациях, соединительных трубопроводах, проботборниках дозиметрических приборов и т. д.

Вопросам осаждения дочерних продуктов распада радона при прохождении их через цилиндрические каналы посвящены работы [9], [10], [11]. Существенным недостатком этих работ, на наш взгляд, является несовершенство методики измерения активности осадка. В работе [9], например, осаждение RaA измерялось по RaC, в работе [10] — по RaC', что, как показано в работе [4], может в отдельных случаях приводить к ошибке в несколько сот процентов. К тому же работ по осаждению дочерних продуктов радона вообще очень немного, и в литературе этот вопрос освещен слабо.

Для установившегося режима диффузии в круглом канале длиной  $x$ , при не очень малых значениях параметра  $\mu$

$$\mu = \frac{Dx}{R^2U}, \quad (22)$$

где  $D$  — коэффициент диффузии частиц;

$R$  — радиус канала;

$U$  — средняя линейная скорость частиц при движении их через канал.

Гормлей и Кеннеди [12] получили формулу:

$$\frac{\bar{n}}{n_0} = 0,819 \exp(-3,657\mu) + 0,097 \exp(-22,3\mu) + 0,032 \exp(-57\mu), \quad (23)$$

где  $\bar{n}$  — средняя концентрация частиц на выходе канала;

$n_0$  — начальная концентрация частиц на входе канала.

Для неустановившегося режима диффузии, т. е. для малых  $\mu$ , эти же авторы вывели формулу:

$$\frac{\bar{n}}{n_0} = 1 - 2,56\mu^{\frac{2}{3}} + 1,2\mu + 0,177\mu^{\frac{4}{3}}. \quad (24)$$

В работе [9] на основе этих формул измерен коэффициент диффузии свободных атомов RaA. Вычисленная величина  $D = 0,054 \text{ см}^2/\text{сек}$ . В работе [11] указывается, что при определении  $D$  необходимо учитывать поправку за счет распада радона внутри канала. В ней приводится зна-

чение  $D = 0,068 \text{ см}^2/\text{сек}$ . По-видимому, этот результат является более точным, хотя авторы не указывают, как учитывалось явление проскока дочерних продуктов радона через поперечный фильтр.

В данной работе исследовали осаждение дочерних продуктов распада радона в цилиндрическом канале с помощью более совершенной методики, позволяющей раздельно и более точно измерять осаждение RaA, RaB и RaC.

Для определения осаждения дочерних продуктов радона воздух, содержащий радон и его дочерние, прокачивали с одинаковой скоростью через два цилиндрических канала, находящихся в одинаковых условиях. В одном канале фильтр устанавливали на входе, в другом — на выходе. По разности активностей фильтров определяли процент активности, осевшей внутри канала для каждого из изотопов. В качестве источника воздуха, содержащего радон и его дочерние продукты, использовали камеру ИКА-НЖ с помещенным внутри нее раствором  $\text{Ra}^{226}$  активностью  $10^{-5}$  кюри. Скорость потока воздуха в каналах измеряли двумя сухими газовыми реометрами. Концентрацию радона контролировали с помощью двух рудничных радиометров воздуха типа РАНаг-1. Воздух через каналы прокачивали при помощи портативных, встроенных в радиометры, воздуходувок типа ПРВ-1М. В экспериментах использовали атмосферный воздух с нормальной влажностью и запыленностью, т. е. эффект осаждения исследовали при нормальных естественных условиях. Концентрация радона в воздухе составляла  $5 \cdot 10^{-8}$  кюри/л. Длительность прокачки составляла 10 мин. Для устранения ошибки, связанной с проскоком радиоактивных аэрозолей через фильтры, в каждый держатель устанавливали по два фильтра. При работе использовали спектрометрические фильтры типа ЛФС-1. Таким образом, при изучении осаждения методом двух «лобовых» фильтров в первую, вторую, третью и четвертую минуты после окончания прокачки измеряли соответственно активность четырех фильтров. По формулам (7)—(9) активность RaA, RaB и RaC, измеренную в эти минуты, приводили ко времени, соответствующему моменту окончания прокачки.

Опыты проводили на цилиндрическом латунном канале размером  $10 \times 3100$  мм при скоростях прокачки в диапазоне 3—15 л/мин. Результаты измерения  $K$  — коэффициента, показывающего, какой процент активности осел на боковых стенках канала от активности, прошедшей через канал за то же время, приведены ниже, %:

RaA 29

RaB 11

RaC 5

Из полученных результатов видно, что в основном осаждается RaA. После этого был выбран канал такой длины, в котором фракция «свободных атомов» составляла бы наибольший вклад в суммарную осевшую активность. В результате расчетов, основанных на использовании формул (22), (23), выяснилось, что таким условиям отвечает канал размером  $10 \times 300$  мм при скорости прокачки воздуха 3 л/мин. Результаты опытов, проведенных на этом канале, следующие, %:

RaA 17

RaB 1,6

RaC 0,7

Были проведены эксперименты по непосредственному измерению осаждения на фильтре, помещенном на боковую поверхность цилиндрического канала. Результаты представлены на спектрограммах (рис. 7—10).

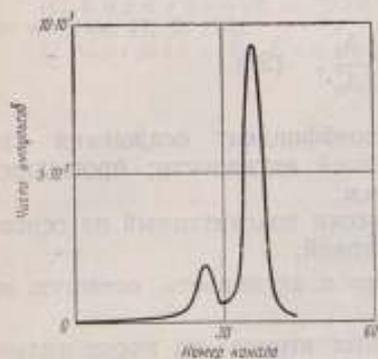


Рис. 7. Альфа-спектр RaA и RaC' на лобовом фильтре.

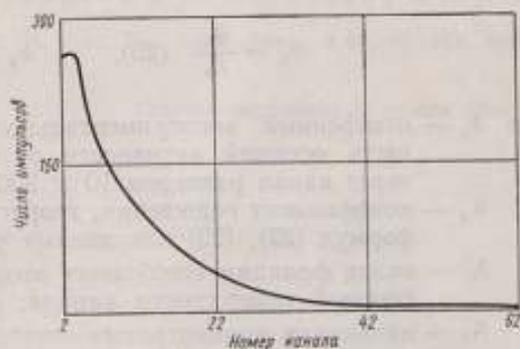


Рис. 8. Бета-спектр RaB и RaC на боковом фильтре.

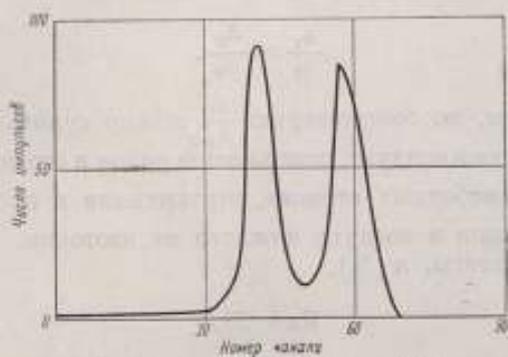


Рис. 9. Альфа-спектр RaA и RaC' на боковом фильтре.

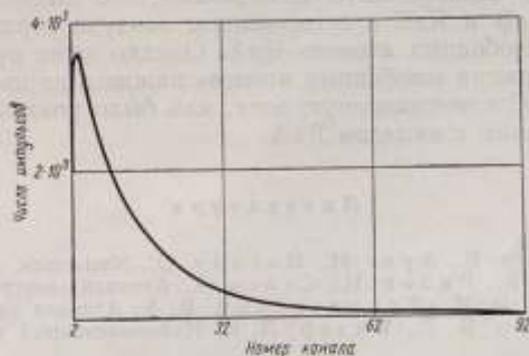


Рис. 10. Бета-спектр RaB и RaC на лобовом фильтре.

С определенной степенью точности можно считать, что  $K = 17\%$  соответствует осаждению свободных атомов RaA. Тогда для данного канала можно записать:

$$k_1 = \frac{A_1'}{A_0} \quad (25), \quad k_2 = \frac{A_1'}{A_0} \quad (26)$$

где  $k_1$  — измеренный экспериментально коэффициент осаждения как часть осевшей активности от общей активности; прошедшей через канал размером  $10 \times 300$  мм;

$k_2$  — коэффициент осаждения, теоретически подсчитанный на основе формул (22), (23) для данных условий;

$A_1'$  — вклад фракции «свободных атомов» в активность, осевшую на боковой поверхности канала;

$A_0'$  — начальная концентрация «свободных атомов» на входе цилиндрического канала;

$A_0$  — начальная концентрация «свободных атомов» и аэрозолей на входе цилиндрического канала.

Тогда очевидно, что

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{A_0'}{A_0} \quad (27)$$

Таким образом, по соотношению  $\frac{k_1}{k_2}$  можно судить о концентрации «свободной» фракции в воздухе, содержащем радон и его дочерние продукты  $\frac{k_1}{k_2} = n$  — доля «свободных атомов», выраженная в процентах от суммарной концентрации в воздухе каждого из изотопов. Ниже приведены полученные результаты,  $n$  (%):

RaA 33,3

RaB 3,1

RaC 1,4

Проведенные эксперименты показывают, что концентрация «свободных атомов» RaB и RaC в естественном воздухе гораздо меньше, чем концентрация «свободных атомов» RaA. Однако даже при таких соотношениях концентрации «свободных атомов» каждого из изотопов в воздухе вклад RaB и RaC в поглощенную дозу, как было показано в работе [5], может быть сравним с вкладом RaA.

#### Литература

1. Tsivoglou E., Ayer H., Holady D., *Nucleonics*, 11, 9, 40, 1953.
2. Марков К., Рябов Н., Стась К. *Атомная энергия*, 12, 4, 1962.
3. Гусаров И. И., Ляниденский В. К. *Атомная энергия*, 10, 1, 1961.
4. Лабущкин В. Г., Рузер Л. С. Информационный бюллетень СНИИП, 7 (67), 33, 1964.
5. Рузер Л. С. *Атомная энергия*, 4, 2, 1958.
6. Гольданский В. И., Куценко А. В., Подгорецкий М. И. *Статистика отсчетов при регистрации ядерных частиц*, Физматгиз, М., 1959.
7. Кочаров Г. Е., Королев Г. А. *Известия Академии наук, серия физическая*, 25, 237, 1961.
8. Спурный К., Йех Ч., Сердлочек Б., Шторх О. *Аэрозоли*, М., Атомиздат, 1964, стр. 30.

9. Chamberlain M. A. and Dyson E. D. Brit. J. Radiol., 29, 317, 1956.
10. Graft I. F., Perry K. E. G. An experimental study of the behaviour and detection of hazardous radon releases in air., A. E. E., Winfrith, October, 1962.
11. Корпусов В. И., Огородников Б. И., Киряченко В. Н. Атомная энергия, 17, 3, 1964.
12. Gormley P., Kennedy M. Proc. Roy. Irish. Acad., A 52, 12, 163, 1949.

Статья поступила 30 ноября 1964 г.

## IV. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

*В. И. ПУСТОВОЙТ, А. В. БАУТИН*

УДК 530.12 : 531.51

### ДВИЖЕНИЕ ГИРОСКОПА В ТЕОРИЯХ ГРАВИТАЦИИ

Рассматривается движение гироскопа как в рамках общей теории относительности (эффект Шиффа), так и в линейных теориях Биркгоффа и Беллифанте—Синхарта. Показано, что движение гироскопа согласно линейным теориям Биркгоффа и Беллифанте—Синхарта существенно отличается от результатов общей теории относительности, и поэтому эксперимент с гироскопами дает возможность отличить общую теорию относительности от указанных линейных теорий.

Проблема экспериментального подтверждения общей теории относительности является актуальной и в настоящее время [1—4]. На одну из новых возможностей в этом направлении обратил внимание недавно Шифф [3], который рассмотрел движение гироскопа в общей теории относительности. Шифф показал [3], что гироскоп, находящийся, скажем, на спутнике, будет прецессировать с угловой скоростью  $\Omega$ , определяемой выражением (10). Наблюдение за прецессией такого гироскопа, как увидим ниже, может служить опытом, позволяющим отличить общую теорию относительности от других теорий тяготения.

Известно, что в настоящее время делаются определенные попытки подойти к проблеме тяготения другим, отличным от общей теории относительности путем. Это относится, главным образом, к всевозможным линейным теориям гравитации [5—7], основанным на обычной псевдоевклидовой метрике пространства—времени. Существенно, что отличить на опыте линейные теории от общей теории относительности довольно трудно: для всех трех критических эффектов «загибания» луча в поле тяготения — смещения перигелия планет и «красного» смещения — линейные теории дают те же значения, что и общая теория относительности [6, 7].

Различие удастся обнаружить только в четвертом эффекте [8] — дополнительном смещении перигелия планет (спутников), вызванном вращением центрального тела. Однако этот эффект крайне мал и вряд ли можно надеяться обнаружить и измерить его в ближайшем будущем.

Поэтому интересно рассмотреть движение гироскопа в линейных теориях и затем сравнить с результатами общей теории относительности.

#### Движение гироскопа в общей теории относительности

Метод, которым пользовался Шифф [3] при определении угловой скорости прецессии гироскопа, является довольно сложным и громоздким. Исходными в работе Шиффа [3] являются уравнения движения для спина пробной частицы в поле Шварцшильда, найденные Папапетроу [9], исходя из динамического принципа Фока [10]. Число полученных таким способом уравнений оказывается меньше числа неизвестных функций, поэтому приходится в той или иной форме вводить дополнительные условия [3], что значительно усложняет весь расчет.

Ниже мы покажем, что эффект релятивистской прецессии оси гироскопа можно получить значительно проще, исходя из функции Лагранжа,

которую нетрудно построить. Этот метод аналогичен решению задачи Лензе и Тирринга, приведенной в книге Ландау и Лифшица [11, 12]. Поскольку излучение гравитационных волн является эффектом порядка  $(v/c)^5$ , то, как известно [12], система гравитирующих тел может быть описана с помощью функции Лагранжа с точностью до членов  $(v/c)^4$ , что оказывается вполне достаточным для вычисления эффекта. Кроме того, общеквариантный метод получения уравнений движения спиновой частицы является специфическим методом общей теории относительности и непосредственно к линейным теориям не применим. В целях сравнения результатов для различных теорий, на наш взгляд, расчеты целесообразно вести по единому методу.

Функция Лагранжа для точечной массы  $dm$ , находящейся в гравитационном поле  $g_{ik}$ , имеет вид:

$$dL = -dmc \frac{ds}{dt} = -dmc \sqrt{g_{ik} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt}}. \quad (1)$$

Подставляя в выражение (1) значения метрического тензора  $g_{ik} = \delta_{ik} + h_{ik}$ , где  $h_{ik}$  — малые отклонения от галилеевой метрики, с точностью до членов  $(v/c)^4$  получим [12]:

$$dL = dmc^2 \left( \frac{h_{00}}{2} + \frac{v^2}{2c^2} + h_{0\alpha} \frac{v_\alpha}{c} + h_{\alpha\beta} \frac{v^\alpha v^\beta}{2c^2} + \frac{h_{00}}{4c^2} v^2 + \frac{v^4}{8c^4} \right), \quad (2)$$

где  $\mathbf{v}$  — трехмерная скорость массы  $dm$ , а компоненты тензора  $h_{ik}$  с учетом вращения центрального тела равны [12]:

$$h_{ik} = 2\varphi \delta_{ik}, \quad h_{0\alpha} = \frac{4\kappa M l^2}{5c^2 R^3} [\Omega_0 R]_\alpha, \\ \varphi = \frac{\kappa M}{c^2 R}, \quad \delta_{il} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} i, k, l = 1, 2, 3, 0 \\ \alpha, \beta = 1, 2, 3, \\ x_0 = ict \end{matrix} \quad (3)$$

где  $\kappa = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{e}^{-1} \text{cm}^3 \text{сек}^{-2}$  — гравитационная постоянная,  $M$  — масса,  $l$  — радиус центрального тела,  $\Omega_0$  — угловая скорость вращения центрального тела вокруг оси,  $R$  — радиус-вектор массы  $dm$ .

Чтобы получить функцию Лагранжа для гироскопа, находящегося в заданном поле  $g_{ik}$ , выражение (2), очевидно, необходимо проинтегрировать по всему объему гироскопа, т. е.\*

$$z = \int_{(V)} dL. \quad (4)$$

Пусть  $R_0$  — радиус-вектор центра инерции гироскопа, тогда  $R = R_0 + r$ , где  $r$  — координаты массы  $dm$  в системе отсчета с центром инерции гироскопа, т. е.

$$\int_{(V)} r_\alpha dm = 0. \quad (5)$$

Скорость массы  $dm$ , очевидно, равна  $V = V_0 + [\omega r]$ , где  $V_0$  — орбитальная скорость спутника,  $\omega$  — угловая скорость вращения гироскопа

\* Строго говоря, функция Лагранжа системы гравитирующих частиц не равна сумме функций Лагранжа отдельных частиц, однако для рассматриваемого нами случая это ограничение совершенно не существенно.

вокруг своей оси. Подставляя в выражение (4) равенства (2) и (3) и используя при этом условие (5) и определение тензора инерции [13], получим:

$$I_{\alpha\beta} = \int_{(V)} (r_\alpha r_\beta - r_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta}) dm, \quad I_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} I' & & \\ & I' & \\ & & I \end{pmatrix}. \quad (6)$$

В результате несложного интегрирования получим:

$$L = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{s^2}{2I} + \frac{3}{2} \frac{\kappa M}{c^2 R_0^3} (\mathbf{S}, [\mathbf{v}_0, \mathbf{R}_0]) + \frac{\kappa}{c^2 R_0^3} (\mathbf{S}, \mathbf{M} - 3\mathbf{n}(\mathbf{nM})). \quad (7)$$

Здесь  $\mathbf{S} = I\boldsymbol{\omega}$  — момент количества движения гироскопа,  $\mathbf{M} = \frac{2}{5} MI^2 \boldsymbol{\Omega}_0$  — момент количества движения Земли,  $\mathbf{n} = \mathbf{R}_0/R_0$  — единичный вектор.

При выводе (7) мы учли, что

$$\left| \frac{r}{R_0} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\kappa M}{c^2 R_0} \right| \ll 1.$$

Полученное выражение для функции Лагранжа (7) имеет ясный физический смысл: первые два члена — это энергия поступательного и вращательного движения гироскопа, третий член представляет собой энергию спин-орбитального взаимодействия и, наконец, последний член — это энергия «спин-спинового» взаимодействия.

Уравнения движения гироскопа (уравнения Эйлера—Лагранжа) будут:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = 0, \quad (8)$$

где  $\boldsymbol{\varphi}$  — угол. Подставляя в уравнения (8) выражение (7), получим:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = [\mathbf{S}\boldsymbol{\Omega}], \quad (9)$$

где угловая скорость прецессии  $\boldsymbol{\Omega}$  равна:

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{3}{2} \frac{\kappa M}{c^2 R_0^3} [\mathbf{v}_0 \mathbf{R}_0] + \frac{\kappa}{c^2 R_0^3} (\mathbf{M} - 3\mathbf{n}(\mathbf{Mn})). \quad (10)$$

Этот результат совпадает с окончательной формулой из работы Шинфа [3], если в последней отбросить член, соответствующий томасовской прецессии [14]. Томасовская прецессия есть эффект специальной теории относительности, он одинаков во всех теориях и без труда может быть получен таким же методом, если учесть, что  $dL/dr = f$  — внешней силе негравитационного происхождения. Тогда вместо выражения (10) получим:

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2c^2} [\mathbf{v}_0 f] + \frac{3}{2} \frac{\kappa M}{c^2 R_0^3} [\mathbf{v}_0 \mathbf{R}_0] + \frac{\kappa}{c^2 R} (\mathbf{M} - 3\mathbf{n}(\mathbf{Mn})). \quad (10a)$$

Это выражение описывает прецессию гироскопа при наличии дополнительной силы  $f$ . Для спутника  $f = 0$  и, если спутник летит близко к Земле, то основной член в равенстве (10)  $\boldsymbol{\Omega} \approx 7 \cdot 10^{-9}$  рад/оборот  $\approx 3 \times 10^{-7}$  углов. сек/сек. Отметим, что этот результат можно получить не

только из функции Лагранжа, но и непосредственно из уравнений движения:

$$\frac{d^2 x^a}{ds^2} + \Gamma_{mn}^a \frac{dx^m}{ds} \frac{dx^n}{ds} = 0. \quad (11)$$

Для этого уравнения (11) необходимо умножить слева векторно на  $z$  и проинтегрировать по объему гироскопа, после чего сразу следует вывод (9).

### Движение гироскопа в линейных теориях гравитации

Мы не будем останавливаться на теоретическом анализе линейных теорий, поскольку это не входит в нашу задачу, а рассмотрим только те экспериментальные выводы которые возможно проверить на опыте. Отметим только, что линейные теории связаны с серьезными трудностями, главная из которых заключается в том, что плотность энергии гравитационного поля не является положительно определенной [15, 16].

Рассмотрим вначале эффект в теории Биркгоффа [6, 7].

Уравнения поля и уравнения движения в этой теории имеют вид:

$$\square h_{ik} = -\frac{8\pi\kappa}{c^4} T_{ik}. \quad (12a)$$

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = g_{ik}^0 \left( \frac{\partial h_{im}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^m} \right) \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^m}{ds}. \quad (12b)$$

Причем,  $ds^2 = g_{ik}^0 dx^i dx^k$  — интервал специальной теории относительности,  $g_{ab}^0 = -\delta_{ab}$ ,  $g_{00} = 1$ ,  $T_{ik}$  — тензор энергии-импульса материи (без гравитационного поля)<sup>2</sup>. Решение уравнения (12a), соответствующее полю вращающегося шара, имеет вид (7)–(8):

$$h_{ik} = \varphi \delta_{ik}, \quad h_{0a} = \frac{2}{5} \frac{\kappa M R^2}{c^2 R^3} [\Omega R]_a. \quad (13)$$

Подставляя выражения (13) в выражение (12b), получим уравнения движения точечной массы в поле (13):

$$\frac{d^2 R^a}{dt^2} = -\frac{\kappa M R^a}{R^3} - \frac{\kappa M}{c^2 R^3} v^2 R^a + \frac{2\kappa M}{c^2 R^3} v^a (Rv) + 2cv^y \frac{\partial h_{0y}}{\partial R^a} - cv^y \frac{\partial h_{0a}}{\partial R^y}. \quad (14)$$

Очевидно, что все члены уравнения (14), кроме членов вращения, могут быть получены из функции Лагранжа:

$$dz = dmc \left\{ \frac{v^2}{2c^2} + \varphi \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \right\}. \quad (15)$$

Дальнейшая схема вычисления угловой скорости прецессии, обусловленной «спин-орбитальным» взаимодействием, ничем не отличается от случая общей теории относительности, рассмотренного выше. Результат можно получить сравнив коэффициенты соответствующих членов функции (15) и (2):

$$\Omega = \frac{\kappa M}{c^2 R_0} [v_0 R_0]. \quad (16)$$

\* Теория Биркгоффа не является линейным приближением общей теории относительности, более того, как было показано в работе [17], уравнения движения (12b) не являются геодезическими в каком бы то ни было римановом пространстве.

Что касается членов вращения, то в этом случае приходится производить вычисления иначе, поскольку для них неизвестна функция Лагранжа. Если умножить уравнение (14) слева векторно на  $r$  и проинтегрировать по объему гироскопа, то для круговой орбиты получим:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\kappa M}{c^2 R_0^3} [\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}_0 \mathbf{R}_0] - \frac{3}{2} \frac{\kappa}{c^2 R_0^3} [\mathbf{S} \mathbf{M}] + \\ + \frac{3}{2} \frac{\kappa n}{c^2 R_0^3} (n, [\mathbf{S} \mathbf{M}]) - \frac{3\kappa}{c^2 R_0^3} [\mathbf{M} n] (\mathbf{S} n). \quad (17)$$

Первый член, естественно, соответствует результату равенства (16), последние три члена дают прецессию гироскопа, обусловленную наличием вращения центрального тела. Таким образом первый основной член прецессии оказывается в полтора раза меньше, чем в общей теории относительности. Прецессия, не обусловленная вращением, даже по структуре отличается от получаемой по общей теории относительности.

Рассмотрим теперь этот эффект в теории Белинфанте—Свихарта [6]. Хотя в этой теории имеется лагранжиан, как уравнения поля, так и уравнения движения получаются по вариационному принципу. Пользоваться непосредственно лагранжевым методом для вычисления эффекта нельзя. Обусловлено это тем, что в работе [6] используется лагранжиан второго рода [18], в котором варьируется независимо импульс, координаты и специфические для этой теории их комбинации. Полученные таким образом уравнения поля и уравнения движения имеют вид:

$$\frac{c^4}{8\pi k} [\alpha \square h_{ik} + f \delta_{ik} \square h_m^m] = -\frac{1}{2} T_{ik} - k \delta_{ik} \sum mbc^2 \delta(x - x(t)), \quad (18)$$

$$\frac{dp_i}{ds} = \frac{1}{2} a^i p^m \frac{\partial h_{em}}{\partial x^i} + kmc^2 b \frac{\partial h_m^m}{\partial x^i}, \quad \frac{dx^i}{ds} = c \left[ a^i - \frac{1}{2} h^{ik} a_k \right], \\ mca_i \left[ 1 - kh_m^m \right] = b \left[ p_i - \frac{1}{2} p_m h_i^m \right]. \quad (19)$$

Здесь  $\alpha$ ,  $f$ ,  $k$  — числовые константы, которые в теории подбираются так, чтобы все три «критических» эффекта совпадали с известными значениями,  $p_i$  — импульс,  $b = \sqrt{-a_i a^i}$ , где  $a^i$  — скорость, определение которой содержится в системе (19).

В линейном приближении по гравитационным потенциалам система (19) будет:

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial x^i}{dt} \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^\mu} + kc^2 b^2 \frac{\partial h_m^m}{\partial x^\mu}. \quad (20)$$

Решения уравнений поля (18) для случая сферически симметричного центрального тела имеют вид [6, 8]:

$$h_{\alpha\beta} = c, \quad \varphi \delta_{\alpha\beta}, \quad h_{00} = c_0 \varphi, \quad h_i^i = -c_i \varphi, \quad (21) \\ h_{0a} = \frac{\kappa M t^2}{5ac^2 R^3} [\Omega_0 \mathbf{R}]_a.$$

Умножая уравнение (20) слева векторно на  $r$  и интегрируя по объему гироскопа, после несложных вычислений получим:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = -\frac{1}{2} (c_1 + kc_T) \frac{\kappa M}{c^2 R^3} \{ [\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}_0 \mathbf{R}_0] + R_0 (\mathbf{S} \mathbf{v}_0) \} + \\ + \frac{3\kappa}{4ac^2 R^3} [\mathbf{R}_0 \mathbf{M}] (\mathbf{R}_0 \mathbf{S}) - \frac{\kappa}{4ac^2 R_0^3} [\mathbf{S} \mathbf{M}]. \quad (22)$$

Выражение (22) показывает, что независимо от значения констант  $c_1, c_2, k$  движение гироскопа в теории Беллифанте—Свихарта носит совершенно иной характер, чем в общей теории относительности. Вектор угловой скорости вращения волчка, например, согласно (22) будет не только прецессировать, но изменяться по величине.

Таким образом, чистая прецессия, как это видно из сравнения формул (17), (22) и (10), характерна только для общей теории относительности.

Трудности наблюдения прецессии оси гироскопа как на спутнике, так и в лабораторных условиях весьма значительны. Тем не менее, наблюдения этого эффекта в лабораторных условиях являются, несомненно, более простой задачей, чем генерация и прием гравитационных волн [19]. Действительно, за излучение гравитационных волн ответственны члены  $(v/c)^5$  в функции Лагранжа, а за прецессию гироскопа — члены порядка  $(v/c)^4$ .

В заключение приносим глубокую благодарность проф. В. Л. Гинзбургу за предложенную тему и руководство.

#### Литература

1. Гинзбург В. Л. Experimental verification of the general Theory of Relativity. Статья в сб. Recent Development in General Relativity Perg. Press-PWN 1962.
2. Гинзбург В. Л. ЖЭТФ, 30, 213, 1956; УФН, 59, 11, 1956; 63, 119, 1957; Fortschritt. der Physik (Berlin) 5, 16, 1957.
3. Schiff L. I. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 46, 871, 1960.
4. Schiff L. I. Phys. Rev. Lett. 4, 215, 1960.
5. Birkhoff I. D. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 29, 231, 1943; 30, 324, 1944.
6. Belinfante F. J., Swihard I. Ann. of Phys. 1, 166, 198, 1957; 2, 88, 1957.
7. Moshinsky M. Phys. Rev. 80, 514, 1950.
8. Пустовойт В. И. ЖЭТФ, 37, 870, 1959; Изв. вузов, «Физика», № 3, 63, 1960.
9. Parafretou A. Proc. Roy. Soc. A—209, 251, 1951.
10. Фок В. А. Journal of Phys. USSR 1, 61, 1939.
11. Lense J., Thirring H. Phys. Zeitsch. 19, 156, 1918.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля, Физматгиз, 1960.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика, Физматгиз, 1957.
14. Thomas L. H. Nature, 117, 514, 1926.
15. Weyl H., Math. Ann. L. 66, 591, 1944.
16. Belinfante F. J. Phys. Rev. 98, 1175, 1955; 95, 630, 1953.
17. Barajas A. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 30, 54, 1944.
18. Belinfante F. J. Physika 7, 449, 1940.
19. Брагинский В. Б. ЖЭТФ, 44, 1962, 1963.

Статья поступила 30 ноября 1964 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие . . . . .	3
-----------------------	---

### I. Физика твердого тела

В. И. Пустовойт. Теория усиления упругих волн в полупроводниках . . . . .	48
В. И. Пустовойт, Ю. В. Гуляев. Усиление поверхностных акустических волн в слоистой системе полупроводник-пьезоэлектрик . . . . .	57
В. И. Пустовойт, М. Е. Герценштейн. О возможности усиления изгибных волн . . . . .	66
В. И. Пустовойт. Об измерении констант полупроводников на больших частотах . . . . .	71
М. Я. Азбель, Е. Г. Скроцкая. Магнитная восприимчивость в сильных магнитных полях . . . . .	79
Ю. Ф. Верховых. Распространение электромагнитных волн в кристаллах при наличии магнитоэлектрического эффекта . . . . .	83
М. Ш. Гитерман. Теплоемкость вещества вблизи критической точки жидкости и газа . . . . .	9

### II. Радиофизика

Б. Е. Кинбер, А. Д. Гондра. Лучевая асимптотика собственных решений волнового уравнения в координатах параболического цилиндра . . . . .	89
Ф. Н. Петросян, Л. М. Питигорский. Исследование быстродействия болометров . . . . .	100
Г. А. Югова. Электродинамика тонкопленочных волноводных элементов . . . . .	108
Г. А. Югова. О согласовании нитяного болометра с прямоугольным волноводом . . . . .	127
М. Е. Герценштейн, Н. П. Верховых. Об искажениях импульса, вносимых отклоняющей системой осциллографа бегущей волны . . . . .	136

### III. Физика атомного ядра

В. А. Беликов, С. В. Худяков. Квадрупольные моменты околофермических ядер . . . . .	142
В. А. Беляков. Изомерный сдвиг и структура метастабильных состояний ядер . . . . .	153
И. В. Гордеев. Единая теория резонансных ядерных реакций. Сечения парциальных реакций . . . . .	162
Б. Г. Земсков, В. Г. Лабушкин, Н. М. Полев, Л. С. Рузер. Изучение свойств радиоактивных аэрозолей на примере дочерних продуктов радона . . . . .	171

### IV. Общая теория относительности

В. И. Пустовойт, А. В. Баутин. Движение гироскопа в теориях гравитации . . . . .	182
--	-----

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ ФИЗИКИ

### Труды институтов комитета

Выпуск 80 (140)

Редактор изд-ва Э. И. Заблзаева

Техн. редактор Л. Я. Медведев

Корректор Г. М. Галенкова

Сдано в набор 20/VII 1965 г. Подп. к печати 7/IV 1966 г. Т-04649. Формат 70×108<sup>1/16</sup>.  
11,75 физ. п. л. 16,45 усл. п. л. 13,16 уч.-изд. л. Тир. 2000 экз. Цена 92 коп. Зах. № 633

Ленинградская типография № 6 Главполиграфпрома  
Комитета по печати при Совете Министров СССР  
Ленинград, ул. Моисеенко, 10

Стр.

9

11

11

20

21

27

28

29

31

61

68

183

184

185

186

Труды

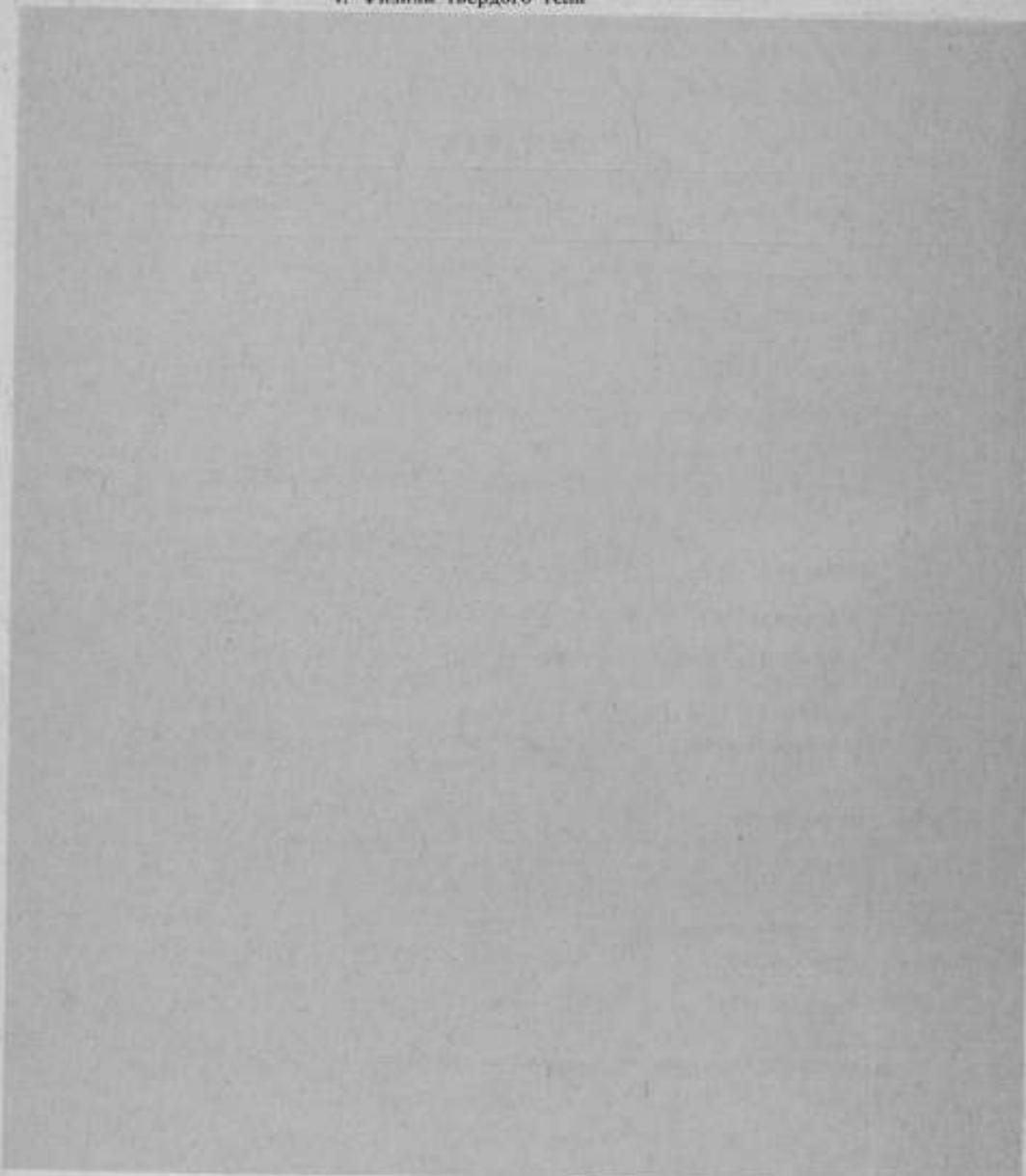
ОПЕЧАТКИ

Стр.	В каком месте	Напечатано	Должно быть
9	1-я строка снизу	$\Lambda_{(k)}$	$\Lambda_{(R)}$
11	Формулы (1. 14), (1. 18), (1. 21)	$\dots \sigma \nabla_z \dots$	$\dots \sigma \nabla_r \dots$
11	Формула (1. 17)	$\dots \operatorname{div}_z f_1$	$\dots \operatorname{div}_r f_1 \dots$
20	1-я формула снизу	$a_{ij} \sim ie^2 \int_{\Omega} \dots$	$a_{ij} \sim ie^2 \int_{\dots}$
21	7-я строка снизу	$F = e(E + E_{\infty}) + \frac{e}{c} [vH],$ где $H$	$F = e(E + E_{\infty}) + \frac{e}{c} [vH].$ где $H$
27	Формула (1. 93)	$\hat{H}_{\infty} = -\frac{e}{rc} \{ \dots$	$\hat{H}_{\infty} = -\frac{e}{2c} \{ \dots$
28	Формула (1. 99)	$\dots \sum (-1)^f = \dots$	$\dots \sum (-1)^f \dots$
29	Формула (1. 106a)	$\dots = -i\Omega \delta \dots$ $q_y q_y + y \dots$	$\dots = -i\Omega \delta \dots$ $q_y q_y + y_y \dots$
31	Формула (1. 115)	$th$	$th$
61	14-я строка сверху	$v \approx 10^{14} \text{ сек}^{-1},$ $\approx c_{\perp} \approx 2 \cdot 10^5 \text{ см/сек}$	$v \approx 10^{14} \text{ сек}^{-1},$ $c_{\perp} \approx 2 \cdot 10^5 \text{ см/сек}$
68	Формула (6)	$E(x, t) = E_{\infty} e^{i\omega t - ikx} \dots$	$E(x, t) = E_{\infty} e^{i\omega t - ikx} \dots$
183	Формула (4)	$z = \int \frac{dL}{(v)}$	$L = \int \frac{dL}{(v)}$
184	3-я строка снизу	$\dots \text{ силы } j.$	$\dots \text{ силы } f.$
185	Формула (15)	$dz = dmc \{ \dots$	$dL = dmc \{ \dots$
186	Формула (17)	$\frac{ds}{dt} = \dots$	$\frac{dS}{dt} = \dots$

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие . . . . . 3

### I. Физика твердого тела



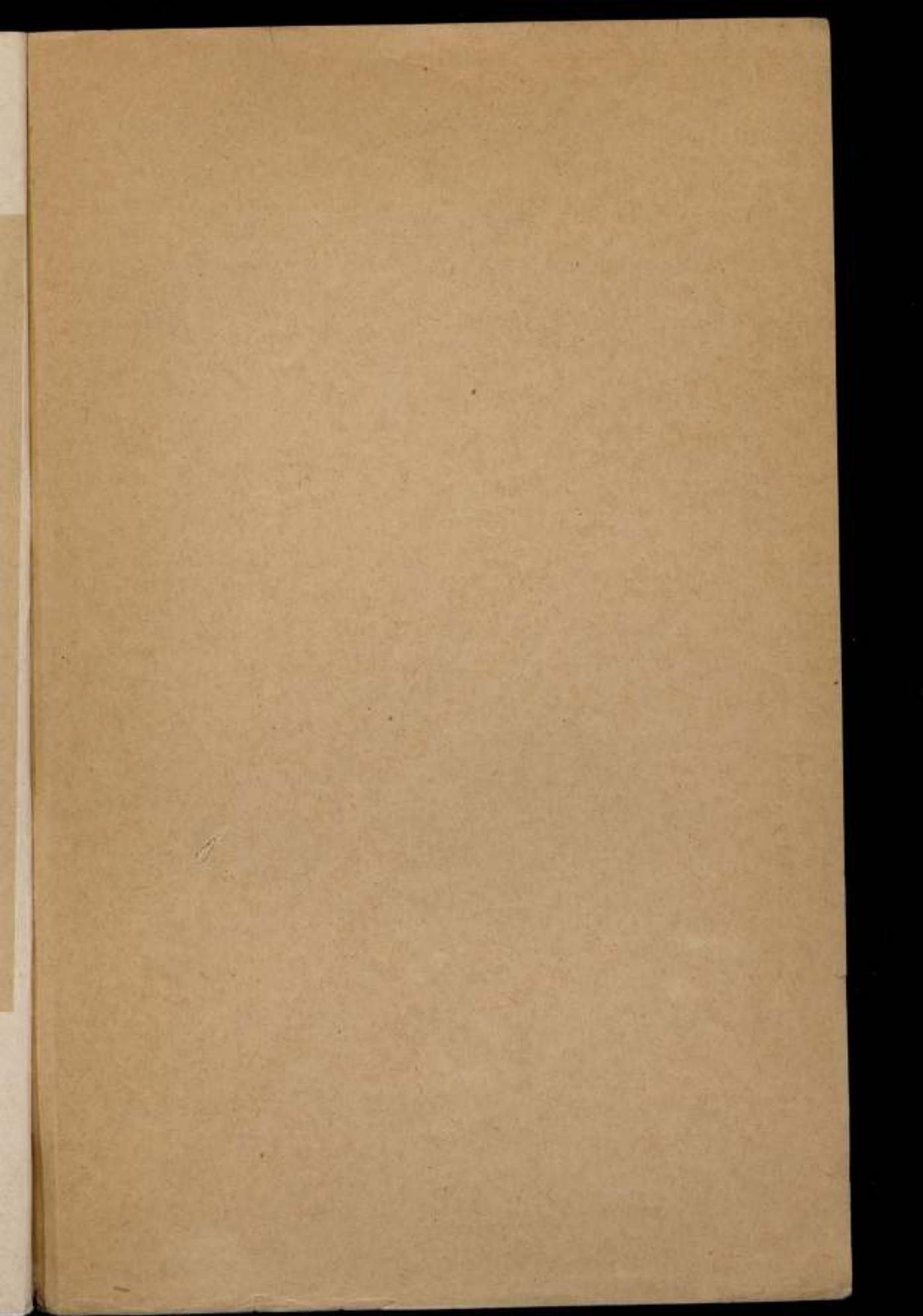
Редактор изд-ва *Э. И. Забзуга*

Техн. редактор *Л. Я. Медведев*

Корректор *Г. М. Галенкова*

Сдано в набор 20/VII 1965 г. Подп. к печати 7/IV 1966 г. Т-04649. Формат 70×108<sup>2</sup>/<sub>32</sub>.  
11,75 физ. л., 16,45 усл. л., 13,16 уч.-изд. л. Тир. 2000 экз. Цена 92 коп. Зах. № 633

Ленинградская типография № 6 Главполиграфпрома  
Комитета по печати при Совете Министров СССР  
Ленинград, ул. Моисеенко, 10



Цена 92 коп.