ВСЕСОЮЗНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ИНСТИТУТ МЕТРОЛОГИИ
им. Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

# ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ МАГНИТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

ТРУДЫ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ СССР

Выпуск 113 (173)

ВСЕСОЮЗНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
МЕТРОЛОГИИ им. Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

# ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ МАГНИТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

ТРУДЫ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ СССР

Выпуск 113 (173)

*Под редакцией*
*Проф. д. т. н. Е. Г. ШРАМКОВА*



«ЭНЕРГИЯ»
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1971

1б

*125101

*Ответственный редактор*
*Доктор технических наук профессор*
*В. О. АРУТЮНОВ*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Одним из перспективных научных направлений в метрологических исследованиях является использование таких физических явлений, которые позволяли бы создать эталоны тех или иных единиц на основе физических констант.

В ряде статей настоящего сборника приведены результаты работ, выполненных во ВНИИМ в указанном направлении. В статье С. В. Горбацевича, Т. Н. Маляревской, С. А. Спектора и Н. В. Студенцова «К воспроизведению абсолютного ампера через частоту прецессии протонов» показано, что с помощью ядерного магнитного резонанса при определенных условиях можно воспроизвести абсолютный ампер методом, существенно отличающимся от применяемого в настоящее время метода токовых весов.

Статьи Л. Д. Чечелашвили «Согласование основных физических констант» и «О наиболее вероятном значении постоянной тонкой структуры», а также Л. П. Губина, В. В. Жукова и К. А. Краснова «Об измерении отношения постоянной Планка к заряду электрона» посвящены теоретическим исследованиям по использованию физических констант для решения метрологических задач.

Основной метрологической задачей в области магнитных измерений является совершенствование эталонов магнитных единиц и средств передачи значений этих единиц образцовым и рабочим мерам и приборам. В статье В. А. Караваевой, Е. А. Соколовой, В. Н. Хорева и Е. Г. Шрамкова «Создание эталона единицы магнитного потока» приведены результаты исследований последних лет по созданию нового эталона единицы магнитного потока. Точность воспроизведения этой единицы новым эталоном на порядок превышает точность прежнего эталона.

В метрологической практике измерений магнитных величин в последнее время широко используется метод ядерного магнитного резонанса, существенно повышающий точность поддержания единства этих измерений. Одной из основных погрешностей метода является погрешность определения частоты свободной прецессии ядер, анализу которой посвящена статья Н. В. Студенцова и В. Я. Шифрина «Погрешности измерения частоты свободной прецессии протонов».

Для аттестации магнитных мер и магнитоизмерительной аппаратуры необходимы различного рода источники магнитных полей, а также измерительные катушки. Вопросы расчета и выбора параметров этой аппаратуры рассмотрены в статьях Н. В. Студенцова «Выбор размеров цилиндрических измерительных катушек для определения постоянной катушек Гельмгольца и создания мер магнитного потока», Т. Н. Маляревской и Н. В. Студенцова «Система квадратных катушек для создания высокооднородного поля», Н. В. Студенцова и В. Я. Шифрина «Расчет напряженности магнитного поля прямоугольного соленоида», В. А. Караваевой «Расчет постоянной измерительных катушек малых размеров с однослойной обмоткой».

При измерении магнитных величин все большее практическое применение находят атомные и внутриатомные процессы главным образом потому, что аппаратура, основанная на этих явлениях, отличается высокой точностью и чувствительностью. В частности, для измерения малых значений напряженности поля эффективным является метод оптической ориентации атомов. Вопросам разработки образцовой аппаратуры, основанной на указанном явлении, посвящены статьи В. Д. Ломаного «Некоторые характеристики парорубидиевого магнитометра при измерении магнитной индукции в диапазоне $5\,(10^{-7}-10^{-6})$ *тл*», А. П. Наумова «Автоматическая подстройка частоты в парощелочном магнитометре» и «Системы контроля температуры и интенсивности света в парощелочном магнитометре».

Для измерения магнитной индукции в последние годы широко применяют преобразователи Холла, которые, однако, имеют существенный недостаток — резкую зависимость параметров от температуры. Создание температуростабильных преобразователей — важная метрологическая задача, решению которой посвящены статьи А. П. Щелкина «Повышение температурной стабильности преобразователей Холла из антимонида индия» и В. Г. Савенко и А. П. Щелкина «О температурном дрейфе нулевого сигнала преобразователей Холла».

Одной из задач метрологических институтов СССР является обеспечение организаций-потребителей надежными характеристиками различных веществ и материалов, так называемыми стандартными справочными данными. Этому направлению посвящены статьи Е. А. Соколовой «Магнитострикция и ее температурные коэффициенты для некоторых ферромагнитных материалов» и Г. Г. Карбелашвили «К вопросу определения температурного коэффициента тангенса угла потерь магнитодиэлектриков на основе карбонильного железа».

*Редактор*

УДК 621.3.014.081.3 : 538

*С. В. ГОРБАЦЕВИЧ, Т. Н. МАЛЯРЕВСКАЯ*
*С. А. СПЕКТОР, Н. В. СТУДЕНЦОВ,*
ВНИИМ

# К ВОСПРОИЗВЕДЕНИЮ АБСОЛЮТНОГО АМПЕРА ЧЕРЕЗ ЧАСТОТУ ПРЕЦЕССИИ ПРОТОНОВ

В настоящее время метрологи все больше уделяют внимание проблеме замены эталона ампера гиромагнитным отношением протона $\gamma$. Однако этот вопрос в литературе освещен недостаточно ясно. Непонятно, идет ли речь о замене единицы силы тока или о пересмотре системы единиц. Часто вопрос поддержания ампера на основе постоянства гиромагнитного отношения протона смешивают с воспроизведением его через гиромагнитное отношение.

В связи с различием во взглядах на эту важную проблему попытаемся проанализировать ее и определить значение и роль гиромагнитного отношения протона при воспроизведении электрических и магнитных единиц. Для этой цели необходимо ответить на следующие вопросы:

1. Возможно ли определить гиромагнитное отношение протона независимо от размера единицы тока?
2. Влияет ли на значение $\gamma$ размер единицы тока в зависимости от метода определения (в слабых или сильных полях)?
3. Что значит правильный абсолютный ампер?
4. Возможно ли по гиромагнитному отношению установить размер единицы тока, или, что то же самое, воспроизвести ее?

Чтобы ответить на эти вопросы, рассмотрим, как изменится значение $\gamma$ в зависимости от размера единицы тока.

При определении в слабых магнитных полях

$$\gamma_1 = \omega_1/\mu_0 K I_1 \tag{1}$$

где $\omega_1$ — частота прецессии протона; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ *н/а*$^2$ — магнитная постоянная; $K$ — постоянная катушки (напряженность магнитного поля, рассчитанная на единицу тока); $I_1$ — сила тока, протекающего через катушку.

В сильных магнитных полях индукция $B$ между полюсами магнита определяется действием поля на рамку с током $I_2$:

$$lBI_2 = F, \tag{2}$$

где $l$ и $F$ — длина рамки и сила, действующая на нее.

В этом случае

$$\gamma_2 = \omega_2/B = \omega_2 I_2 l/F. \tag{3}$$

Из формул (2) и (3) видно, что ток $I_2$ носит вспомогательный характер и служит лишь для измерения индукции $B$. С изменением его значения $\omega_2$ не изменяется, а $F \sim I_2$. В то же время $I_1$ непосредственно влияет на $\omega_1$, так как $\omega_1 \sim I_1$.

Умножив $\gamma_1$ на $\gamma_2$, получим

$$\gamma_1\gamma_2 = \frac{\omega_1\omega_2 l}{K\mu_0 F} \cdot \frac{I_2}{I_1}. \tag{4}$$

На основании формулы (4) приходим к выводу, что значение $\gamma_1\gamma_2$, а следовательно, и $\sqrt{\gamma_1\gamma_2}$ не зависит от того, в каких единицах измерялись токи $I_1$ и $I_2$; необходимо лишь, чтобы эти единицы были одинаковыми.

Действительно, при изменении размера единицы тока значения токов будут $I_1'$ и $I_2'$ и, следовательно,

$$\gamma_1\gamma_2 = \gamma_1'\gamma_2' = \text{const}. \tag{5}$$

В частности условие (5) имеет место, когда размер единицы тока равен абсолютному амперу, при котором $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$.

Таким образом,

$$\gamma_1'\gamma_2' = \gamma_1\gamma_2 = \gamma^2 \tag{6}$$

и, следовательно,

$$\gamma = \sqrt{\frac{\omega_1\omega_2 l}{K\mu_0 F}\cdot\frac{I_2}{I_1}}. \tag{7}$$

Нетрудно интерпретировать полученный результат, рассматривая в отдельности изменение $\gamma_1$ и $\gamma_2$ в зависимости от размера единицы тока.

При изменении абсолютного ампера $[a]$ на $\delta_a$ получим размер $[a + \delta_a] = [a(1 + \delta_a/a)] = [a_1]$.

Очевидно, значения $I_1$ и $I_2$, соответствовавшие $[a]$, станут

$$I_1' = \frac{I_1}{1+\delta_a/a} \text{ и } I_2' = \frac{I_2}{1+\delta_a/a}.$$

Действительно, $I_1 = I_1\,[a] = I_1'\left[a\left(1 + \delta_a/a\right)\right]$, откуда $I_1' = \dfrac{I_1}{1+\delta_a/a}$.

В случае слабых полей гиромагнитное отношение протона при изменении размера единицы тока будет равно

$$\gamma_1' = \frac{A_1}{\mu_0 I_1'} = \frac{A_1\,(1+\delta_a/a)}{\mu_0 I_1} > \gamma \text{ (при } \delta_a > 0),$$

где $A_1 = \omega_1/K$.

Следовательно,

$$\gamma_1' = \gamma\left(1 + \delta_a/a\right). \tag{8}$$

Аналогичные рассуждения для метода измерения в сильных полях приводят к выражению

$$\gamma_2' = \frac{A_2 I_2'}{F} = \frac{A_2 I_2}{F\,(1+\delta_a/a)} < \gamma, \tag{9}$$

где $A_2 = \omega_2 l/F$.

Из выражения (9) следует:

$$\gamma_2' = \frac{\gamma}{1+\delta_a/a}. \tag{10}$$

Таким образом, можно заключить: $\gamma_1'\gamma_2' = \gamma^2$.

Необходимо заметить, что вопрос о размере единицы тока возник в связи с наличием некоторой погрешности в воспроизводимой единице — в данном случае ампере. В приведенных рассуждениях остальные погрешности определения $\gamma_1$ и $\gamma_2$ предполагаются пренебрежимо малыми.

До сих пор речь шла об определении $\gamma$ в установленных единицах килограмма, секунды и ампера и было выяснено, что, используя результаты измерений двумя методами (в слабых и сильных полях), можно исключить ошибку в размере единицы измеренных токов.

При отсутствии систематических погрешностей значения $\gamma_1$ и $\gamma_2$ должны быть одинаковыми. Это условие позволяет поставить перед метрологами задачу воспроизведения ампера с помощью явления ядерного магнитного резонанса. Наиболее целесообразным представляется использование результатов обоих методов для случая, когда $I_1 = I_2 = I$ (что может быть обеспечено последовательным включением катушки и вспомогательной рамки).

Действительно, если $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, то разделив уравнение (3) на (1), получим

$$\frac{K_1}{K_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \frac{F}{\mu_0} I^2 = 1,$$

откуда

$$I = \sqrt{\frac{K_2}{K_1} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{F}{\mu_0}}. \tag{11}$$

Таким образом, две установки для измерения гиромагнитного отношения протона в сильном магнитном поле электромагнита и в слабом поле расчетной катушки могут быть использованы как единая установка для воспроизведения ампера, если рамка и катушка соединены последовательно.

Интересно отметить, что для воспроизведения ампера (11) не обязательно знать значение $\gamma$. Напомним, что воспроизвести размер единицы физической величины — значит измерить ее в этой единице. Естественно, что при этом должно быть дано определение единицы. Это метрологически ясное положение, к сожалению, иногда игнорируется, из-за чего возникают научные дискуссии.

Необходимо различать теоретическое определение единицы и ее практическое воспроизведение. Они не обязательно должны быть адекватными, однако размер единицы по определению и при воспроизведении должен быть один и тот же. Именно в этом смысле ампер, воспроизводимый с помощью явления ядерного резонанса, имеет размер, соответствующий его теоретическому определению. Нельзя лишь упускать из виду, что все систематические погрешности, связанные с расчетами постоянных катушки и рамки, а также с измерениями частоты, должны быть учтены.

Вопрос о том, какой метод воспроизведения ампера предпочтительнее (токовые весы или устройства с использованием явления прецессии протонов), следует решать с учетом сложности, точности и стоимости реализации каждого из методов.

Поступила в редакцию
1.VII 1968 г.

УДК 621.3.013.089.68

*В. А. КАРАВАЕВА, Е. А. СОКОЛОВА,*
*В. Н. ХОРЕВ, Е. Г. ШРАМКОВ*

ВНИИМ

## СОЗДАНИЕ ЭТАЛОНА ЕДИНИЦЫ МАГНИТНОГО ПОТОКА

Новый первичный эталон обеспечивает передачу значения единицы магнитного потока вторичным эталонам и образцовым мерам, имеющим, как правило, постоянную 0,01 *вб/а*.

По принятой во ВНИИМ методике образцовые меры сличают с эталоном потока разностным методом. Для большей точности постоянные сравниваемых мер не должны существенно отличаться. Это обусловило выбор номинального значения постоянной эталона 0,01 *вб/а*.

Эталон создан по типу катушки взаимной индуктивности Кемпбелла [1, 2, 3], коэффициент взаимной индуктивности которой рассчитывают на основании измеренных ее геометрических размеров.

Эталон представляет собой сочетание коаксиальных первичной однослойной и вторичной многослойной катушек и имеет жесткую конструкцию.

Первичная обмотка состоит из двух одинаковых однослойных цилиндрических поясов (по сто витков в каждом), соединенных последовательно; вторичная, с бо́льшим радиусом и малым поперечным сечением, расположена в плоскости симметрии этих поясов соосно с ними.

Радиус $A$ вторичной обмотки при остальных фиксированных размерах выбирался таким, чтобы коэффициент взаимной индуктивности $M$ был максимальным, что соответствует условию Кемпбелла $\partial M/\partial A = 0$.

При соблюдении данного условия $M$ не очень сильно зависит от радиуса и сечения вторичной обмотки. Это позволило сделать ее многослойной.

Размеры первичной обмотки предусмотрены достаточно большими для обеспечения требуемого коэффициента взаимной индуктивности и малых относительных погрешностей изготовления катушки и измерения ее размеров. Число витков вторичной обмотки (436) выбирали в соответствии с номинальным значением 0,01 *вб/а* (0,01 *гн*).

При создании эталона единицы магнитного потока преследовалась цель — повысить точность его воспроизведения не менее чем на порядок, т. е. до тысячных долей процента.

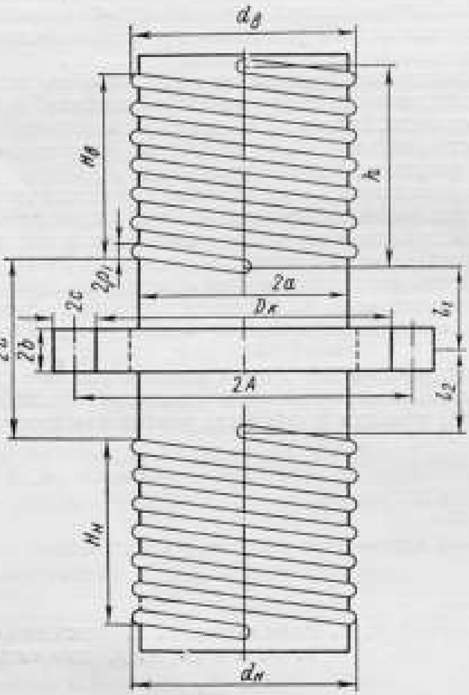


Рис. 1. Схема эталонной катушки.

### Изготовление эталона

К а р к а с и п е р в и ч н а я к а т у ш к а. Конструкция изготовленной эталонной катушки и ее основные размеры, подлежащие измерению и являющиеся исходными для расчета коэффициента взаимной индуктивности, показаны на рис. 1. Каркас эталона представляет единое целое и состоит из двух склеенных между собой каркасов первичной и вторичной катушек. Он выполнен из непрозрачного плавленого кварца, имеющего малый температурный коэффициент линейного расширения и являющегося диамагнетиком. Каркас первичной катушки представляет собой полый цилиндр длиной 500 *мм*, толщина стенок которого порядка 25 *мм*.

Предварительно был исследован песок для плавленого кварца, определен его химический состав ($SiO_2$ — 99,63; $Fe_2O_3$ — 0,012; $Al_2O_3$ — 0,11; $MgO$ — 0,034 и $CaO$ — 0,014%) и объемная магнитная восприимчивость ($\varkappa_b = -6{,}33 \cdot 10^{-6}$).

Заготовки каркасов изготовлены по специально разработанной технологии. Из них вырезали образцы для определения объемной магнитной восприимчивости методом взвешивания в однородном магнитном поле, которая составляла для цилиндра $-6{,}33 \cdot 10^{-6}$, а для каркаса вторичной катушки $-10{,}6 \cdot 10^{-6}$. Затем заготовки обрабатывали на круглошлифовальном станке: производили обдирку цилиндра (снятие рубашки), шлифовку и подрезку торцов, не снимая цилиндра с центров. Далее на станке «Ex-Cell-o» выполняли следующие операции: чистовую шлифовку наружной окружности цилиндра, шлифовку по диаметру выступающего пояска под каркас вторичной катушки в центральной части цилиндра, а также подрезку его торцов и пояска. После чистовой шлифовки на цилиндр наносили резьбу (с номинальным шагом 1,2 *мм*) под доводку, не снимая его с центров станка.

Для крепления ввода и вывода поясов обмоток высверливали отверстия карборундом (пятиминутка) на одной из образующих цилиндра, на которой витки нарезки расположены симметрично центральной плоскости. По окончании этих операций цилиндр промывали дистиллированной водой и спиртом.

Доводку цилиндра (притирку нарезки) до нужного диаметра производили притирочными кольцами из оргстекла, используя абразивный порошок КЗ-М-14, протравленный в плавиковой кислоте для устранения магнитных загрязнений. Магнитная восприимчивость порошка составляла $-4{,}09\cdot10^{-6}$. После каждой доводки каркас промывали спиртом и измеряли его диаметр.

П р о в о л о к а д л я п е р в и ч н о й о б м о т к и с малой магнитной восприимчивостью была изготовлена из электролитической меди с чистотой 99,995%, которую переплавляли в графитовых тиглях при пониженном давлении и в вакууме. Разработанная во ВНИИМ технология обеспечила получение проволоки с требуемыми свойствами.

Обработанные в стальных матрицах с промежуточным травлением слитки обжигали в течение 2 *ч* в электропечи при 600° С, а затем протравливали в течение 3 *ч* в 5—12%-ном растворе серной кислоты и промывали в холодной и горячей воде. Далее слитки проковывали и прессовали. Полученную таким образом проволоку диаметром 14 *мм* волочили в победитовых волоках до диаметра 2,8 *мм*. Тонкое волочение проволоки до диаметра 0,8 *мм* проводили на шестнадцатизаходном волочильном стане в карбидвольфрамовых волоках без дополнительной обработки. После протяжки для устранения нагартовки проволоку обжигали в вакуумной печи при 500° С.

Изготовленная описанным выше способом проволока имела заусенцы и цвета побежалости. Эти дефекты были устранены электрополировкой ее поверхности и осветлением в подогретой ортофосфорной кислоте (плотность $1{,}4\cdot10^{-3}$ *кг/м³*). Объемная магнитная восприимчивость проволоки составляла $-5{,}14\cdot10^{-6}$.

Н а л о ж е н и е п е р в и ч н о й о б м о т к и н а к а р к а с. Специально изготовленную медную голую проволоку предварительно наматывали на вспомогательный кварцевый цилиндр того же диаметра, что и диаметр каркаса катушки, с тем же шагом намотки. Со вспомогательного цилиндра ее перематывали на каркас катушки, пропуская через два алмазных волока. В качестве смазочного материала использовали полиорганосиликатовую жидкость. После прохождения через второй волок проволоку протирали спиртом, при этом ее диаметр был 0,781 *мм*. Скорость вращения каркаса катушки при наложении обмотки составляла 1,7 *об/мин*, а нагрузка на проволоку 40 *н*. В помещении, где производили намотку, поддерживалась температура 25° С.

В т о р и ч н а я м н о г о с л о й н а я к а т у ш к а. В связи с тем что не удалось получить цельной заготовки размером 500×500×600 *мм³* для каркаса вторичной катушки, она была склеена эпоксидной смолой из шести пластин непрозрачного плавленого кварца размером 250×500×20 *мм³*. Смолу предварительно смешивали с порошком из того же плавленого непрозрачного кварца, что и пластины, и выдерживали их более суток при нормальной температуре до полного затвердевания смолы. Затем вырезали кольца-фланцы катушки и внутреннее кольцо, образующее ее паз. После этого оптическим методом шлифовали наружные поверхности пластин, вырезали паз и подрезали торец с одной стороны. Последней операцией была сверловка отверстий под выводы обмотки.

Готовый каркас промывали бензином и спиртом и измеряли его геометрические размеры. Затем каркас устанавливали на станке для наложения многослойной вторичной обмотки (изолированной медной проволоки).

С б о р к а э т а л о н а. При сочленении первичной и вторичной катушек последнюю необходимо было установить так, чтобы ее центральная плоскость совпала с плоскостью симметрии поясов первичной катушки, а также совпадали оси катушек.

При сборке эталона цилиндр устанавливали шлифованным торцом на доведенную до 1 *мкм* установочную плиту. Затем подбирали три блока мер длины, размеры которых определялись: расстоянием от основания цилиндра до вершины первого витка нижнего пояса $B$, расстоянием между поясами $2L$ первичной обмотки, толщиной фланца каркаса со шлифованным краем $\eta$ и высотой паза $\xi$ вторичной катушки. Блоки мер размещали вертикально на плите под углом 120°, и на них опускали вторичную многослойную катушку, которую надевали на выступающий поясок в центральной части цилиндра. Допуск по радиусу между наружным диаметром пояска и диаметром внутреннего отверстия каркаса вторичной катушки составлял 0,02 *мм*. Катушки в собранном виде, блоки мер и установочную плиту выдерживали в течение суток в термостатной при температуре 20° С. Далее оба каркаса склеивали эпоксидной смолой сначала сверху, а затем снизу (при установке эталона на другой торец). При этом их каждый раз выдерживали не менее суток до полного затвердевания смолы.

Для уменьшения влияния неполного витка на коэффициент взаимной индуктивности выводы в первичной обмотке выполнены в виде двух проводов по одной образующей цилиндра, один из которых проходит внутри другого. Отводы от начала и конца каждого из поясов осуществлены также по одной образующей в виде точечного отпая. Чтобы не было сдвига витков, концы обмотки закреплены плоскими прижимами на кварцевом цилиндре, в канавку которых входит провод.

## Измерение геометрических размеров эталона

Все измерения геометрических размеров эталона были произведены во ВНИИМ. Изменения температуры в термостате обычно не превышали в течение часа 0,1—0,2° С.

Размеры первичной катушки. Диаметр резьбы каркаса $d_к$ определяли сличением с образцовыми концевыми мерами первого разряда на стационарно установленном в термостатном помещении устройстве (рис. 2).

Не менее чем за сутки до измерений каркас *4* располагали на специальном столе. Перед началом измерений его приподнимали вместе со столом непосредственно над устройством. Блок из плоскопараллельных концевых мер с номинальной длиной, равной номинальному среднему диаметру первичной катушки, закрепляли на средней свободно перемещающейся (плавающей) части каретки стола между пинолем *2* и оптиметром *6*. На измерительные штифты оптиметра и пиноля надевали плоские ножевидные наконечники и закрепляли их. Отклонение измерительных поверхностей наконечников от плоскостности не превышало 0,0003 *мм*.

Перемещая далее оптиметр и пиноль в кронштейнах, их регулировали так, чтобы при наблюдении в окуляр отсчет по шкале оптиметра был равен нулю. Правильность установки шкалы на нуль проверяли после повторного арретирования наконечника *5* оптиметра. Поворотом винта *1* пиноля наконечник *3* отводили влево и снимали каретку с блоком концевых мер. После этого каркас *4* первичной катушки вместе со столом опускали на линию измерения.

Средний диаметр резьбы каркаса измеряли методом трех проволочек в четырех сечениях, через каждые 10 *мм*. Диаметр этих проволочек 0,795 *мм* нулевого класса точности был близким к диаметру проволоки обмотки.

Вращением маховика *7* стол с каркасом перемещали по направлению к наблюдателю и обратно, фиксируя максимальное показание по шкале оптиметра. Вращая винт наклона стола, находили положение, соответствующее минимальному показанию, т. е. отклонению измеряемого диаметра от размера блока концевых мер.

Наружный диаметр обмотки $d$ измеряли с помощью тех же концевых мер и ножевидных наконечников, что и диаметр резьбы каркаса, но повернутых на 90°. Предварительно катушку выдерживали в течение 36 *ч* на специальном устройстве (рис. 2), чтобы ее температура была 20° С, как и в термостатной.

Измерения производили три наблюдателя по восьми сечениям каждого из 200 витков по восемь раз, затем вычисляли среднее значение $d$.

Шаг обмотки $\tau$ определяли на двух универсальных микроскопах. Один из них (рис. 3) снабжен удлиненной основной колонкой. Благодаря изготовленным во ВНИИМ кронштейнам с кареткой для шкалы продольная шкала этого микроскопа оставалась на одном уровне с обмоткой.

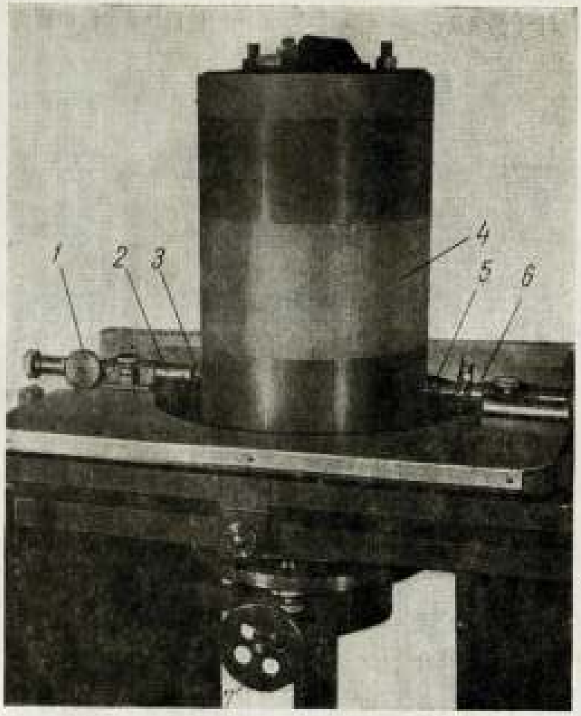


Рис. 2. Устройство для измерения диаметров первичной обмотки.

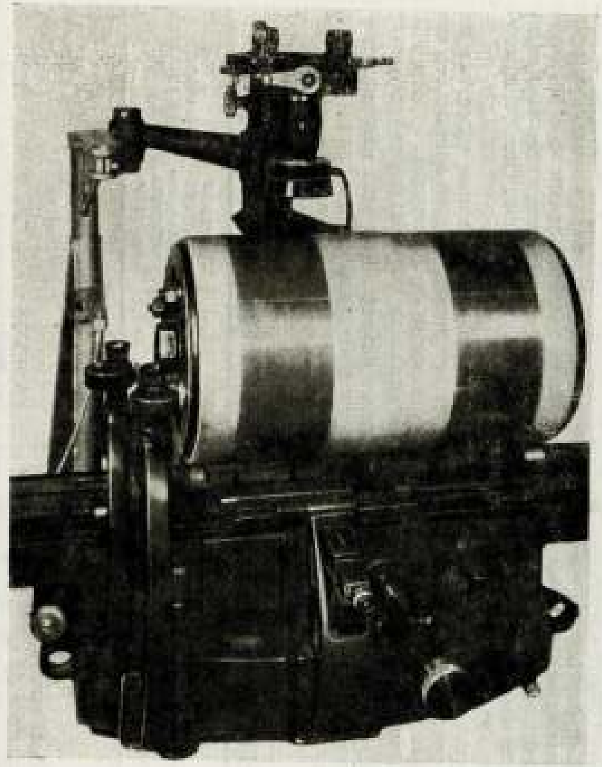

Рис. 3. Установка катушки при измерении шага первичной обмотки на универсальном измерительном микроскопе.

На универсальном микроскопе типа УИМ-24 с пределами измерений 0—200 и 0—500 *мм* $\tau$ определяли проекционным методом. Катушку, помещенную на две специальные подставки (лодочки) с регулируемыми призмами, устанавливали по уровню в горизонтальной плоскости, избегая перекоса ее оси по отношению к направлению перемещения каретки микроскопа. Перекрестие сетки визирного микроскопа наводили на край изображения проволоки обмотки. Отсчеты по окулярному микрометру производили по продольной шкале.

Значение $\tau$ определялось разностью отсчетов по шкале при наведении на соседние витки. За действительное значение принимали среднее арифметическое из семи измерений по восьми образующим каждого из 200 витков.

Диаметр проволоки обмотки $2\rho_1$ определяли на горизонтальном оптиметре методом сравнения с концевой мерой первого разряда. При этом измеряли диаметры двух отрезков (в 15 точках) проволоки длиной около 1 *м* — до начала и по окончании намотки на каркас.

*Таблица 1*

**Результаты измерений геометрических размеров эталонной катушки**

| Измеряемая величина: наименование | Измеряемая величина: среднее значение, *см* | Средняя квадратическая погрешность, *см*, $\times 10^4$ | Максимальный разброс, *см* $\times 10^4$ |
|---|---|---|---|
| **Первичная обмотка** | | | |
| Наружный диаметр поясов: | | | |
| верхнего $d_в$ | 30,05577 | 1 | 11 * |
| нижнего $d_н$ | 30,05631 | 1 | 8 * |
| Диаметр резьбы каркаса поясов: | | | |
| верхнего $d_{к. в}$ | 29,92989 | 1 | 4 * |
| нижнего $d_{к. н}$ | 29,92992 | 1 | 6 * |
| Диаметр проволоки поясов: | | | |
| верхнего $2\rho_в$ | 0,0782 | 1 | — |
| нижнего $2\rho_н$ | 0,0781 | 1 | — |
| Расстояние между поясами $2L$ | 16,12278 | 2 | 4 ** |
| Высота поясов: | | | |
| верхнего $H_в$ | 11,96005 | 2 | 10 ** |
| нижнего $H_н$ | 11,95849 | 2 | 5 ** |
| Расстояние от основания цилиндра до вершины первого витка нижнего пояса $B$ | 16,7807 | 2 | 15 |
| Шаг (измеренный) обмотки поясов: | | | |
| верхнего $\tau_{изм. в}$ | 0,120030 | 1 | 1 * |
| нижнего $\tau_{изм. н}$ | 0,120022 | 1 | 1 * |
| Избыточная часть витка, обусловленная отступлением выводов поясов от одной образующей: | | | |
| верхнего $\delta_в$ | 0,066 | ±50 | — |
| нижнего $\delta_н$ | 0,052 | ±50 | — |
| **Вторичная обмотка** | | | |
| Диаметр каркаса $D_к$ | 47,354 | 10 | — |
| Наружный диаметр $D$ | 49,341 | 10 | — |
| Высота паза $\zeta = 2b$ | 1,081 | 10 | — |
| Толщина фланца $\eta$ | 1,790 | 10 | — |

* Разброс между средними значениями диаметров отдельных витков.

** Разброс по образующим.

Линейные размеры первичной катушки (рис. 1) измеряли по 16 образующим на универсальном микроскопе УИМ-24. Измеряемую катушку устанавливали цилиндрическими поверхностями без нарезки на специальных призмах. Визирная система вместе с каретками перемещалась в горизонтальной плоскости в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Центральную штриховую линию сетки визирной системы наводили на край витка при соответствующих перемещениях измерительных кареток продольного и попереч-

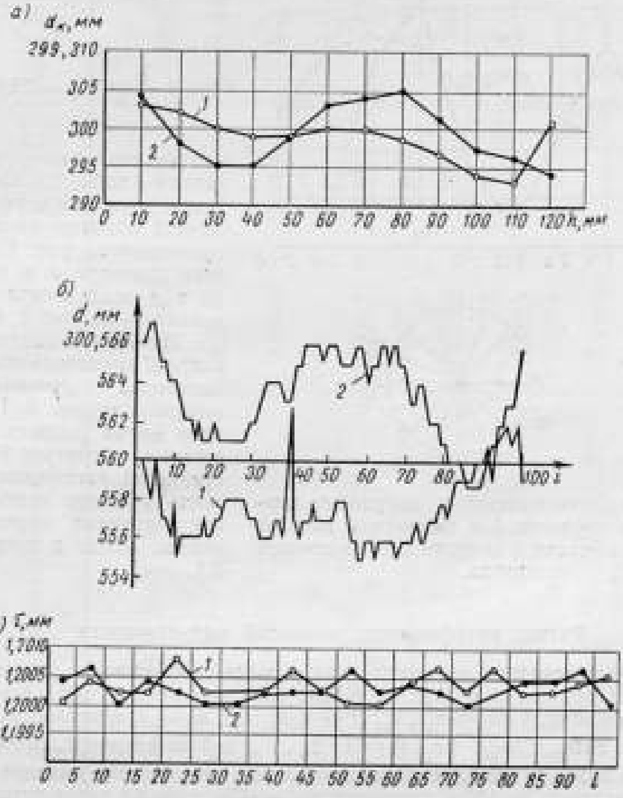


Рис. 4. Графики изменения: *а* — диаметра каркаса первичной обмотки по ее длине; *б* — наружного диаметра и *в* — шага обмотки в зависимости от номера витка для верхнего *1* и нижнего *2* поясов.

ного ходов. На экране проектора или в поле зрения визирного микроскопа наблюдали изображение измеряемой катушки.

Высоту верхнего $H_в$ и нижнего $H_н$ поясов обмотки определяли пятнадцатикратно по каждой из образующих, а расстояние $B$ от основания цилиндра до вершины первого витка нижнего пояса — десятикратно. Расстояние между поясами $2L$ — от нижней точки последнего витка верхнего пояса до вершины первого витка нижнего пояса — измеряли двадцатипятикратно по каждой из образующих.

Размеры вторичной катушки были измерены на шестиметровой машине. Диаметр каркаса $D_к$ и наружный диаметр $D$ обмотки определяли троекратно в восьми сечениях. Было выполнено четыре серии измерений $D$;

при этом каждый раз заново устанавливали катушку. Толщину фланца $\eta$ каркаса со шлифованной плоскостью измеряли также в восьми сечениях по десять раз.

Длину блока концевых мер для установки вторичной катушки на цилиндр (в центральную плоскость симметрии, между верхним и нижним поясами первичной обмотки) определяли по формуле

$$l_{бл} = B + \frac{2L - 2\rho_1}{2} - \left(\frac{\xi}{2} + \eta\right) = 22{,}5077\ см.$$

Результаты измерений приведены в табл. 1. Графики изменения диаметра каркаса $d_к$ первичной обмотки по ее длине $h$ приведены на рис. 4, *а*, наружного диаметра $d$ и шага обмотки $\tau$ в зависимости от номера витка $i$ — на рис. 4, *б* и *в*.

Изменение наружного диаметра $d$ первичной обмотки в зависимости от сечения витка $S$ показано на рис. 5. Для отдельного витка разброс по восьми сечениям достигает 28—35 *мкм*; среднеквадратическая погрешность среднего диаметра витка, обусловленная неточностью его формы, лежит в пределах 2,8—3,1 *мкм*.

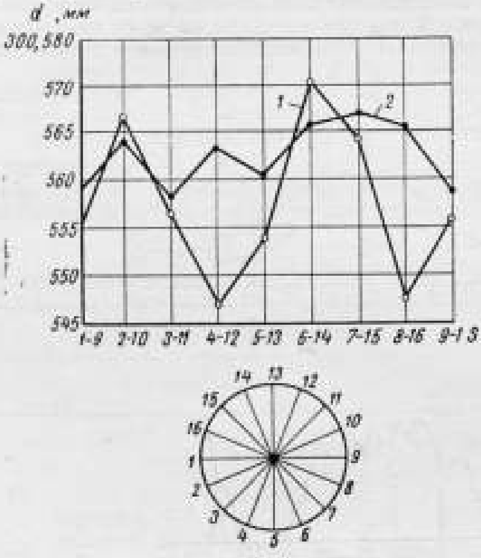


Рис. 5. Графики изменения наружного диаметра (для верхнего *1* и нижнего *2* поясов) первичной обмотки в зависимости от сечения витка.

### Расчет коэффициента взаимной индуктивности

Основные исходные параметры для расчета коэффициента взаимной индуктивности $M$ приведены в табл. 2. Кроме этих параметров, были использованы: значения единичных шагов $\tau_{вi}$, $\tau_{нi}$ ($i = 1, 2, \ldots, w_I - 1$) и отклонения радиусов единичных витков $\Delta a_{вi}$, $\Delta a_{нi}$ ($i = 1, 2, \ldots, w_I$) от среднего значения $a$ для верхнего и нижнего поясов первичной обмотки, число витков каждого пояса первичной обмотки $w_I = 100$ и вторичной $w_{II} = 436$, а также число витков, снятых с наружного слоя вторичной обмотки $w'_{II} = 4$ (для получения номинального значения $M$).

Для удобства расчета величина $M$ была представлена в виде

$$M = M_0(a, A, l, h, w_I, w_{II}) + \sum \Delta, \tag{1}$$

где $M_0$ — коэффициент взаимной индуктивности идеализированной катушки с реальными значениями $a$, $A$, $l$, $h$, $w_I$, $w_{II}$ (см. рис. 1 и табл. 2); $\sum \Delta$ — сумма поправок, учитывающих поперечное сечение вторичной обмотки; сечение проволоки, неравномерность диаметра $2a$ и шага $\tau$ по длине первичной обмотки; смещение выводов от одной образующей и эллиптичность первичной обмотки; несоосность катушек; магнитную восприимчивость и расширение материала каркаса (при температуре, отличной от 20° С).

Обозначив через $N(a, A, z)$ коэффициент взаимной индуктивности между сплошным цилиндрическим слоем первичной катушки радиусом $a$ и длиной $z$

*Таблица 2*

**Основные исходные параметры для расчета коэффициента взаимной индуктивности $M$ катушки и влияние их изменения на $M$**

| Параметры, *см* | Расчетные формулы | Значения, *см* | Средняя квадратическая погрешность, *см* | Изменение параметров, *мкм* | Относительное изменение $M \cdot 10^{6}$, % |
|---|---|---|---|---|---|
| Средние радиусы обмоток: | | | | | |
| первичной | $a = \dfrac{(d_в - 2\rho_в) + (d_н - 2\rho_н)}{4}$ | 14,98897 | 0,0001 * | ±1 | ±12,5 |
| вторичной | $A = \dfrac{D + D_к}{4}$ | 24,174 | 0,001 | +200 | −2,3 |
| Расстояние от плоскости симметрии вторичной обмотки до начала первичной | $l = \dfrac{2L - \tau + \rho_в + \rho_н}{2}$ | 8,04043 | 0,0001 | ±1 | ±6,5<br><0,05 ** |
| Среднее расстояние между началом и концом пояса | $h = \dfrac{(H_в - 2\rho_в) + (H_н - 2\rho_н)}{2} + \tau$ | 12,0012 | 0,0002 | ±1 *** | ∓2,9 |
| Полувысота вторичной обмотки | $b = \xi/2$ | 0,540 | 0,001 | ±50 | ±3,0 |
| Полуширина вторичной обмотки | $c = \dfrac{D - D_к}{2}$ | 0,497 | 0,001 | ±50 | ∓2,8 |
| Диаметры проволоки обмоток: | | | | | |
| первичной | $2\rho_I = \rho_в + \rho_н$ | 0,0781 | 0,0001 | — | — |
| вторичной (с изоляцией) | $2\rho_{II}$ | 0,047 | — | — | — |
| Шаг первичной обмотки | $\tau = \dfrac{(H_в - 2\rho_в) + (H_н - 2\rho)}{2(w_I - 1)}$ | 0,120012 | — | — | — |

* Для каждого из значений $a_i$.

** При одновременном увеличении $l_1$ и уменьшении $l_2$ на 200 *мкм* (см. рис. 1).

*** При неизменных $l$ и $w_I$.

и витком вторичной катушки радиусом $A$, лежащим в плоскости основания первичной катушки соосно с ним, можно записать [3, 4 и 5]:

$$M_0 = 2w_1 w_{II} \left[ \frac{l+h}{h} N(a, A, l+h) - \frac{l}{h} N(a, A, l) \right]. \qquad (2)$$

Значение $N$ определяли по формуле Джонса

$$N(a, A, z) = \frac{\mu_0}{2} pk(a+A) \left\{ \frac{K(k)-E(k)}{k^2} - \frac{1-p^2}{p^2} \left[ \prod(k, p^2) - K(k) \right] \right\}, \qquad (3)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ *гн/м* — магнитная постоянная; $K(k)$, $E(k)$, $\prod(k, p^2)$ — полные эллиптические интегралы I, II и III рода модуля $k = \frac{2\sqrt{aA}}{\sqrt{(a+A)^2 + z^2}}$; $p^2 = 4aA/(a+A)^2$ — параметр эллиптического интеграла III рода.

Производные от $M_0$ определяли через эллиптические интегралы по формулам:

$$\left.\begin{gathered}
N = \frac{1}{z} \int_0^z m(a, A, x)\, dx; \\
m(a, A, z) = A \frac{\partial m}{\partial a} + z \frac{\partial m}{\partial z} + a \frac{\partial m}{\partial a}; \\
\frac{\partial^2 m}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial a^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial m}{\partial a}; \\
m(a, A, z) = \mu_0 \sqrt{aA} \frac{1}{k} [(2-k^2) K - 2E]; \\
\frac{\partial m}{\partial z} = \frac{\mu_0 kz}{4\sqrt{aA}} \left[ 2(K-E) - \frac{k^2}{1-k^2} E \right]; \\
\frac{\partial m}{\partial a} = \frac{\mu_0 k}{4\sqrt{aA}} \left[ 2a(K-E) + (A-a) \frac{k^2}{1-k^2} E \right]; \\
\frac{\partial^2 m}{\partial z^2} = \frac{\mu_0 k}{4\sqrt{aA}} \cdot \frac{k^2}{(1-k^2) p^2} \times \\
\times \left[ (2-k^2-p^2)(K-E) - (1+k^2-2p^2) \frac{k^2}{1-k^2} E \right]; \\
\frac{\partial^2 m}{\partial a\, \partial z} = \frac{\mu_0 k^3 z}{16aA\sqrt{aA}} \left[ \left( \frac{A-a}{1-k^2} - A - a \right)(K-E) - \right. \\
\left. - \left( 2\frac{A-a}{1-k^2} + A + a \right) \frac{k^2}{1-k^2} E \right]; \\
\frac{\partial^3 m}{\partial z^3} = \frac{\mu_0 k^3}{16\sqrt{aA}} \cdot \frac{z}{4aAp^2} \left( \frac{k^2}{1-k^2} \right)^2 \times \\
\times \left[ (-6 + 3p^2 + 6k^2 + k^2p^2 - 4k^4)(K-E) + \right. \\
\left. + (3 - 9p^2 + 9k^2 + k^2p^2 - 4k^4) \frac{k^2}{1-k^2} E \right]; \\
\frac{\partial N}{\partial a} = \frac{\mu_0}{2} pk \left[ K + \frac{A-a}{2A} \left( \prod - K \right) \right],
\end{gathered}\right\} \qquad (4)$$

где $m(a, A, z)$ — коэффициент взаимной индуктивности между двумя соосными окружностями радиусами $a$ и $A$, расположенными одна от другой на расстоянии $z$.

На основании выражений (4) путем разложения $M_в$ в ряд по малым приращениям с последующим интегрированием были выведены формулы для поправок, приведенные в табл. 3.

В результате дифференцирования уравнения (1) получена зависимость приращения $M$ от приращений параметров:

$$\Delta M \cdot 10^8 = 1249\,\Delta a - 651\,\Delta l - 288\,\Delta h - 0{,}83\,\Delta A + 6{,}1\Delta b - 5{,}7\,\Delta c + \cdots \quad (5)$$

Коэффициенты при линейных членах в правой части формулы (5) имеют размерность генри на метр. Наличие в выражении (5) члена с $\Delta A$ указывает на то, что при изготовлении обмоток условие Кемпбелла выполнено неточно ($\partial M/\partial A \neq 0$).

Кроме расчета по формуле Джонса, $M$ вычисляли и другим способом — с помощью ряда, при выводе которого исходили из следующих рассуждений.

Пусть по контуру окружности радиусом $A$ протекает ток $I$. Введем полярную систему координат ($r$, $\vartheta$) с полюсом $r = 0$ на оси окружности, отстоящим на расстоянии $z$ от ее центра, и полуосью $\vartheta = 0$, направленной по вектору напряженности поля, создаваемого током $I$. В такой системе скалярный потенциал магнитного поля имеет вид

$$U(r, \vartheta) = -\frac{I}{2}\left\{1 - \cos\psi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{\sqrt{A^2+z^2}} \times \right.$$
$$\left. \times\, [P_{n-1}(\cos\psi) - \cos\psi\, P_n(\cos\psi)]\, P_n(\cos\vartheta)\right\} =$$
$$= -\frac{I}{2}\sum_{n=0}^{\infty} B_n(\alpha)\frac{r^n}{A^n} P_n(\cos\vartheta), \quad (6)$$

где $P_n$ — полиномы Лежандра степени $n$; $\cos\psi = z/\sqrt{A^2+z^2}$;

$$\alpha = \frac{z}{A};\quad B_n(\alpha) = \frac{P_{n-1}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right) - \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\, P_n\left(\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)}{\sqrt{1+\alpha^2}^{\,n}}.$$

Ряд (6) сходится при $r^2 < A^2 + z^2$. Используя известные соотношения между полиномами Лежандра, легко установить соотношения между $B_n(\alpha)$ и их производными ($n = 0, 1, 2, \ldots$):

$$B_n(\alpha) = \frac{1}{n\sqrt{1+\alpha^2}^{\,n+2}} \cdot P_n'(\alpha/\sqrt{1+\alpha^2});$$

$$\partial B_n(\alpha)/\partial\alpha = -(n+1)\, B_{n+1}(\alpha);$$

$$B_{n+2}(\alpha) = \frac{2n+3}{n+2}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\, B_{n+1}(\alpha) - \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{1+\alpha^2}\, B_n(\alpha);$$

$$B_0(\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}};\quad B_1(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}^{\,3}}.$$

Пусть на расстоянии $z$ от первой окружности помещена соосно с ней вторая окружность радиусом $a$. Тогда коэффициент взаимной индуктивности $m$ этих двух контуров будет связан с магнитным полем, создаваемым током $I$ в точках второй окружности [6]:

$$\frac{\partial m(a, A, z)}{\partial a} = 2\pi\mu_0 \cdot \frac{a}{I}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\bigg|_{r=a},\quad \vartheta = \frac{\pi}{2}.$$

*Таблица 3*

**Поправки, принятые при расчете коэффициента взаимной индуктивности $M$, и их погрешности**

| Наименование | Поправки | | Средние квадратические погрешности | |
|---|---|---|---|---|
| | расчетные формулы | значения *мкгн* | расчетные формулы | значения *мкгн* |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Поперечное сечение вторичной обмотки | $\Delta = \frac{\partial M_0}{\partial A}\left(\delta c + \frac{c^2}{6A}\right) + \frac{\partial^2 M_0}{\partial l^2}\left[\frac{b^2 - c^2}{6} \times (1 + 2\delta) - \delta b w'_{11} \rho_{11}\right]$, $\delta = -\frac{w'_{11}}{w_{11}}$ | 0,26 | $\sigma = \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial^2 M_0}{\partial l^2} \sqrt{b^2 + c^2}\sigma_{b,c}$, $\sigma_{b,c}$ — погрешность определения $b$ и $c$ | 0,008 |
| Распределение тока по сечению провода первичной обмотки | $\Delta = -\frac{3}{8} \cdot \frac{\partial M_0}{\partial a} \cdot \frac{\rho_1^2}{a}$ | —0,05 | $\sigma = 0{,}13\Delta$ | 0,006 |
| Неравномерность диаметра первичной обмотки | $\Delta = w_{11} \sum_{i=1}^{w_1} \frac{\partial m(z_i)}{\partial a} \times (\Delta a_{\text{в}i} + \Delta a_{\text{н}i})$ | —0,02 | $\sigma = w_{11} \times \sqrt{2 \sum_{i=1}^{w_1} \left(\frac{\partial m}{\partial a}\right)^2} \sigma_a$, $\sigma_a$ — погрешность определения $a$ | 0,018 |

*Продолжение табл. 3*

| Наименование | Поправки | | Средние квадратические погрешности | |
|---|---|---|---|---|
| | расчетные формулы | значения *мкгн* | расчетные формулы | значения *мкгн* |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Неравномерность шага первичной обмотки | $\Delta = w_{II} \sum_{i=1}^{w_I} \frac{\partial m(z_i)}{\partial z} \times (\Delta_{ai} + \Delta_{ui})$ | —0,06 | $\sigma = \sqrt{\left(\frac{\partial M_0}{\partial l}\right)^2 \sigma_l^2 + \left(\frac{\partial M_0}{\partial h}\right)^2 \sigma_h^2}$ | 0,087 |
| Магнитная восприимчивость объема $V$ кварцевого цилиндра | $\Delta = \mu_0 \frac{\varkappa_k}{I_I I_{II}} \times \int_V (\mathbf{H}_I, \mathbf{H}_{II})\, dV$, $I_I$, $I_{II}$, $\mathbf{H}_I$, $\mathbf{H}_{II}$ — силы тока и векторы напряженностей магнитных полей первичной и вторичной обмоток | —0,02 | — | 0,005 |
| Смещение выводов первичной обмотки | $\Delta = w_{II} \frac{m(a, A, l+h)}{2\pi a} \times (\delta_в + \delta_н)$ | 0,04 | $\sigma = \frac{m}{2\pi a} \sqrt{2}\sigma_\delta$, $\sigma_\delta$ — погрешность определения $\delta$ | 0,003 |

*Продолжение табл. 3*

| Наименование | Поправки | | Средние квадратические погрешности | |
|---|---|---|---|---|
| | расчетные формулы | значения *мкгн* | расчетные формулы | значения *мкгн* |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Эллиптичность первичной обмотки | $\Delta = -\left(0{,}12\frac{1}{a}\cdot\frac{\partial M_0}{\partial a} + 0{,}06\frac{\partial^2 M_0}{\partial l^2}\right)\nu^2$, $\nu$ — разность полуосей эллипса | <0,005 | — | — |
| Несоосность первичной и вторичной катушек | $\Delta = -\frac{\partial^2 M_0}{\partial l^2}\cdot\frac{\varepsilon^2}{4}$, $\varepsilon$ — расстояние между осями | <0,002 | — | — |
| Температурное расширение кварца | $\Delta = M_0\alpha(t-20^\circ)$, $\alpha$ — температурный коэффициент | 0,006 $(t-20^\circ)$ | — | — |
| Сумма поправок | $\sum\Delta$ | 0,15 | — | 0,090 |

* Линейные размеры в *см*, индуктивности — в *мкгн*.

Так как $P_{2n+1}(0) = 0$, то

$$m = 2\pi\mu_0 \frac{1}{l} \int_0^a \frac{\partial U}{\partial z}\bigg|_{\theta=\frac{\pi}{2}} r\,dr =$$

$$= \pi\mu_0 \frac{a^2}{A} \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1}(\alpha) P_{2n}(0) \frac{2n+1}{2n+2} \left(\frac{a}{A}\right)^{2n}.$$

Для $M_0$ имеем

$$M_0 = \frac{2w_1 w_{11}}{h} \int_l^{l+h} m\,dz =$$

$$= 2\pi\mu_0 w_1 w_{11} \frac{a^2}{h} \times \sum_{n=0}^{\infty} [B_{2n}(\alpha_1) -$$

$$- B_{2n}(\alpha_2)] \frac{P_{2n}(0)}{2n+2} \left(\frac{a}{A}\right)^{2n}, \quad (7)$$

где $\alpha_1 = \frac{l}{A}$; $\alpha_2 = \frac{l+h}{A}$;

$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

По формуле (7) были вычислены 10 членов ряда.

Вычисление $M_0$ обоими способами дало одно и то же значение 10017,405 *мкгн*.

Далее были рассчитаны поправки, приведенные в гр. 1 табл. 3. При расчете поправки на распределение плотности тока по поперечному сечению проволоки первичной обмотки это распределение предполагалось обратно пропорциональным квадрату расстояния от оси цилиндра [7, 8].

Поправки на неравномерность диаметра и шага первичной обмотки были рассчитаны с помощью графиков (рис. 6), построенных на основании формул (4) для $\partial m/\partial z$ и $\partial m/\partial a$ с использованием таблиц М. Самойловой-Яхонтовой [9].

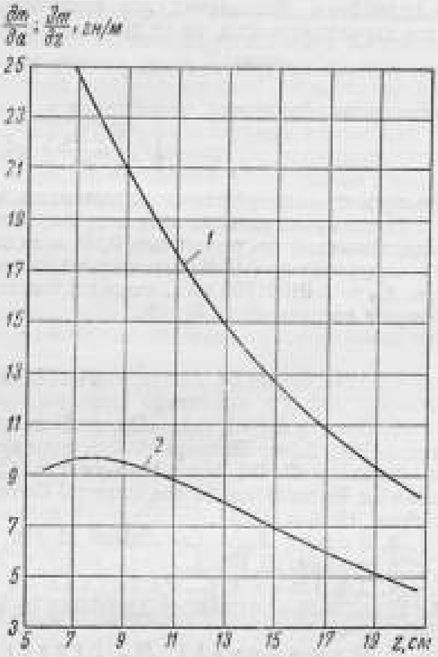


Рис. 6. Зависимости $\frac{\partial m}{\partial a}$ (*1*) и $\frac{\partial m}{\partial z}$ (*2*) от $z$.

Для вычисления поправки на неравномерность шага первичной обмотки необходимо знать отклонения $\Delta_{вi}$ и $\Delta_{нi}$ (смещения вдоль оси цилиндра) каждого $i$-го витка верхнего и нижнего поясов от идеального положения, которое занимал бы виток при абсолютно равномерном шаге. В этом случае погрешность поправки на неравномерность шага следовало бы рассчитывать по формуле

$$\sigma = w_{11} \sqrt{2 \sum_{i=1}^{w_1} \left[\frac{\partial m(a, A, z_i)}{\partial z}\right]^2 \sigma_0}, \quad (8)$$

где $z_i = l + \tau\left(i - \frac{1}{2}\right)$ — среднее расстояние между $i$-тым витком и плоскостью симметрии катушки; $\sigma_0$ — погрешность определения $\Delta_{вi}$ и $\Delta_{нi}$.

Однако для исследуемой катушки вместо $\Delta_{\text{в}i}$ и $\Delta_{\text{н}i}$ были измерены значения отдельных шагов $\tau_{\text{в}i}$ и $\tau_{\text{н}i}$. Измерения же $\Delta_{\text{в}i}$ и $\Delta_{\text{н}i}$ после сборки катушки невозможны, поэтому их определяли косвенным путем:

$$\Delta_{\text{в}i} + \Delta_{\text{н}i} = \sum_{k=1}^{i-1} (\tau_{\text{в}k} + \tau_{\text{н}k}) - 2(i-1)\,\tau_{\text{изм}}, \tag{9}$$

где $i = 1, 2, \ldots, w_{\text{I}}$.

Последним обстоятельством объясняется тот факт, что сумма измеренных шагов, равная 12,0026 *см*, не совпадает с измеренной длиной обмотки $h =$ $= 12{,}0012$ *см*. Это значит, что измерения шага дают некоторую информацию о его неравномерности, но не дают достаточной информации о его среднем значении, которое следует принять равным $\tau = \dfrac{h}{w_{\text{I}}}$. Поэтому погрешность была вычислена по формуле

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\partial M_0}{\partial h}\right)^2 \sigma_h^2 + \left(\frac{\partial M_0}{\partial l}\right)^2 \sigma_l^2},$$

где $\sigma_h$ и $\sigma_l$ — погрешности определения $h$ и $l$.

После суммирования всех поправок получено $M = 10017{,}56$ *мкгн* со средней квадратической погрешностью 0,09 *мкгн* при температуре $t = 20°$ С.

Созданная во ВНИИМ эталонная катушка магнитного потока имеет постоянную $K_\Phi = 0{,}01001756$ *вб/а*, относительная средняя квадратическая погрешность которой составляет $9 \cdot 10^{-4}$%.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Campbell, A. «On a Standard of Mutual Inductance. «Proc. roy soc»., 1907, A. v. 79.
2. Dye D. W., Hartshorn L. On a Primary Standard of Mutual Inductance for Presentation to the Imperial Government of Japan. «NPL Collected Researches», 1929, v. XXI.
3. Jones J. V. Calculation of the Coefficient of Mutual Induction of a Circle and Coaxial Helix. «Phys. society», 1888, November.
4. Thomas I. L., PeterssonCh., Cooter J. L., Kotter F. R. An absolute Measurement of Resistance by the Wenner Method. «J. Research NBS», 1949, v. 43.
5. Romanovski M., Fraser P. A. Considerations on the Primary Winding of the Campbell Standard. «J. Research NBS», 1949, v. 43.
6. Foelsch K. Magnetfeld und Induktivität einer zylindrischen Schpule. «Arch. Elektronik,» 1936, Bd., XXX, H. 3.
7. Henderson I. T., Romanovski M. A Standard of Mutual Inductance. «Canadian J. Phys», 1955, v. 33, № 12.
8. Harrison P. W., Rayner G. H. A Primary Standard of Mutual Inductance. «Metrologia», 1967, v. 3, № 1.
9. Самойлова-Яхонтова М. Таблицы эллиптических интегралов. ОНТИ, 1935.

Поступила в редакцию 26/I 1968 г.

УДК 53.081.7 : 539.12

*Л. Д. ЧЕЧЕЛАШВИЛИ*

Тбилисский филиал ВНИИМ

# СОГЛАСОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ КОНСТАНТ

Определение отношения заряда электрона к постоянной Планка $e/h$ на основе эффекта Джозефсона [1] и новые измерения лэмбовского сдвига и интервала $2^2P_{3/2}-2^2S_{1/2}$ методом точки пересечения уровней в магнитном поле [2] вызвали, как отметил в 1966 г. Дюмонд [3], сомнение в достоверности значения постоянной тонкой структуры $\alpha = 0{,}00729720$ (погрешность $\sigma_\alpha = 0{,}00003$). Это значение, полученное экспериментально Лэмбом, принято при последнем согласовании констант в 1963 г. Дюмондом и Коэном как единственно надежное значение [4]. Кроме того, был определен магнитный момент протона в ядерных магнетонах [5] и пересчитаны с учетом новых стандартных линий результаты некоторых экспериментов по измерению переводного коэффициента Зигбана $\Lambda$ от $x$ единиц к миллиангстремам и по определению числа Авогадро $N$ методом дифракции рентгеновских лучей на кристалле. Все это позволило автору провести новое согласование констант методом Дюмонда и Коэна [4, 6].

Результаты опытов по определению некоторых констант, а также уравнения связи между ними приведены в таблице *.

Выберем из гр. 2 таблицы константы $\alpha$, $e$, $\Lambda$ и $N$, которые назовем неизвестными, с тем чтобы найти их наиболее достоверные значения путем решения всей системы.

Для того чтобы в левых частях равенств находились лишь неизвестные константы, подлежащие согласованию, преобразуем уравнения (1), (6), (12)—(21) с помощью существующих зависимостей, в которые входят наиболее точно известные константы: скорость света $c$, магнитный момент протона в магнетонах Бора $\mu_p/\mu_e$, постоянная Ридберга $R_\infty$ и др. Преобразованная система представлена в гр. 5 таблицы, а вес каждого уравнения $P_i = \frac{1}{\sigma^2}\cdot 10$ — в гр. 6.

Способ наименьших квадратов позволяет найти такие значения $\alpha$, $e$, $\Lambda$ и $N$, которые наилучшим образом удовлетворяют всей системе уравнений. Так как приведенные в гр. 5 уравнения нелинейны, то систему пришлось предварительно линеаризовать, а затем обработать способом наименьших квадратов. В результате получено:

$$\alpha = 0{,}00729734; \qquad \sigma_\alpha = 4{,}6\cdot 10^{-6};$$

$$e = 4{,}80322\cdot 10^{-10}; \qquad \sigma_e = 13{,}2\cdot 10^{-6};$$

$$\Lambda = 1{,}002095; \qquad \sigma_\Lambda = 10{,}2\cdot 10^{-6}$$

$$N = 6{,}02216\cdot 10^{23}; \qquad \sigma_N = 16{,}9\cdot 10^{-6},$$

где $\sigma_\alpha$, $\sigma_e$, $\sigma_\Lambda$, $\sigma_N$ — относительные средние квадратические погрешности определения $\alpha$, $l$, $\Lambda$, $N$ соответственно.

Однако для этой системы с $21 - 4 = 17$ степенями свободы $\chi^2 = 69{,}87$. Следовательно, можно заключить, что в данной системе имеются уравнения с систематическими погрешностями.

Подставим найденные значения $\alpha$, $e$, $\Lambda$ и $N$ в левые части уравнений гр. 5 таблицы и вычтем результат из правых частей. Этими разностями определяется степень согласованности экспериментальных данных. Большие разности указывают на наличие систематических погрешностей некоторых уравнений, что и принимаем во внимание при исключении из системы уравнений (2), (12), (18) и (19).

---

* Значения констант даны в единицах СГС.

| № уравнения | Измеренные константы | Относительная средняя квадратическая погрешность $\sigma \cdot 10^6$ | Исследователи и содержание опытов | Уравнения связи между неизвестными константами | Вес $P_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $2e/h = 1{,}449770 \cdot 10^{17}$ | 6,2 | Тэйлор и др. Определение кванта магнитного потока [1] | $\alpha/e = 1{,}5192466 \cdot 10^{7}$ | 2,63 |
| 2 | $\alpha^{-1} = 137{,}0388$ | 4,6 | Лэмб и др. Расщепление тонкой структуры [2] | $\alpha^{-1} = 137{,}0388$ | 4,76 |
| 3 | $\alpha^{-1} = 137{,}0359$ | 4,9 | Рамзей и др. Измерение частоты водородного мазера [2] | $\alpha^{-1} = 137{,}0359$ | 4,17 |
| 4 | $\alpha^{-1} = 137{,}0359$ | 9,0 | Робеско и др. Определение $\alpha$ методом точки пересечения уровней в магнитном поле [2] | $\alpha^{-1} = 137{,}0359$ | 1,23 |
| 5 | $\alpha^{-1} = 137{,}0384$ | 23,4 | Уилкинсон и Крейн. Определение аномального магнитного момента электрона [4] | $\alpha^{-1} = 137{,}0384$ | 0,18 |
| 6 | $F = 2{,}8926025 \cdot 10^{14}$ | 8,0 | Крейг, Лоу и др. Электрохимическое определение числа Фарадея [4] | $Ne = 2{,}8926025 \cdot 10^{14}$ | 1,56 |
| 7 | $N\Lambda^3 = 6{,}06008 \cdot 10^{23}$ | 39,6 | Бирден. Определение числа Авогадро дифракцией рентгеновских лучей на кристалле [3] | $N\Lambda^3 = 6{,}06018 \cdot 10^{23}$ | 0,06 |
| 8 | $N\Lambda^3 = 6{,}06013 \cdot 10^{23}$ | 24,8 | Хеннигс и Бирден. То же | $N\Lambda^3 = 6{,}06013 \cdot 10^{23}$ | 0,16 |
| 9 | $N\Lambda^3 = 6{,}06038 \cdot 10^{23}$ | 18,2 | Смакула. То же | $N\Lambda^3 = 6{,}06038 \cdot 10^{23}$ | 0,30 |
| 10 | $\Lambda = 1{,}002050$ | 29,0 | Идлен, Свенсон. Определение $\Lambda$ методом дифракции рентгеновских лучей на искусственной дифракционной решетке [3] | $\Lambda = 1{,}0025050$ | 0,12 |
| 11 | $\Lambda = 1{,}002050$ | 45,0 | Бирден. То же | $\Lambda = 1{,}002050$ | 0,05 |
| 12 | $\alpha^2/2R_\infty\Lambda = 24{,}21373 \cdot 10^{-11}$ | 14,0 | Ноулесс. Измерение длины волны аннигиляционного излучения [3] | $\alpha^2/\Lambda = 53{,}14299 \cdot 10^{-6}$ | 0,51 |
| 13 | $\alpha^2/2R_\infty\Lambda = 24{,}21216 \cdot 10^{-11}$ | 39,0 | То же | $\alpha^2/\Lambda = 53{,}13954 \cdot 10^{-6}$ | 0,07 |
| 14 | $hc^2/e\Lambda = 12373{,}09$ | 23,0 | Спикерман. Измерение коротковолнового предела непрерывного рентгеновского спектра [3] | $e/\alpha\Lambda = 0{,}6568671 \cdot 10^{-7}$ | 0,19 |
| 15 | $\gamma_p = 2{,}675195 \cdot 10^4$ | 6,0 | Ягола и др. Определение гиромагнитного отношения $\gamma_p$ [4] | $\alpha^3/e = 809{,}02206$ | 2,78 |
| 16 | $\gamma_p = 2{,}675193 \cdot 10^4$ | 6,0 | Бендер и Дрисколл. То же | $\alpha^3/e = 809{,}02146$ | 2,78 |
| 17 | $\gamma_p = 2{,}675195 \cdot 10^4$ | 6,0 | Вигуро. То же | $\alpha^3/e = 809{,}02206$ | 2,78 |
| 18 | $\mu_p/\mu_n = 2{,}792870$ | 7,2 | Мамырин и Французов. Определение магнитного момента протона в ядерных магнетона $\mu_p/\mu_n$ [4] | $\alpha^3/Ne^2 = 2{,}796969 \cdot 10^{-12}$ | 1,92 |
| 19 | $\mu_p/\mu_n = 2{,}792906$ | 20,0 | Бойн и Франкен. То же | $\alpha^3/Ne^2 = 2{,}796995 \cdot 10^{-12}$ | 0,25 |
| 20 | $\mu_p/\mu_n = 2{,}792757$ | 9,0 | Соммер и др. То же | $\alpha^3/Ne^2 = 2{,}796846 \cdot 10^{-12}$ | 1,23 |
| 21 | $\mu_p/\mu_n = 2{,}792770$ | 25,1 | Сандерс и др. То же | $\alpha^3/Ne^2 = 2{,}796859 \cdot 10^{-12}$ | 0,16 |

После исключения каждого из этих уравнений оставшуюся систему вновь обрабатываем способом наименьших квадратов, так что в конечном итоге она содержит семнадцать уравнений. В результате получаем:

$$\alpha = 0{,}00729736; \qquad \sigma_\alpha = 2{,}5\cdot 10^{-6};$$
$$e = 4{,}80327\cdot 10^{-10}; \qquad \sigma_e = 7{,}0\cdot 10^{-6};$$
$$\Lambda = 1{,}002100; \qquad \sigma_\Lambda = 5{,}1\cdot 10^{-6};$$
$$N = 6{,}02218\cdot 10^{23}; \qquad \sigma_N = 9{,}0\cdot 10^{-6}.$$

Для системы из 17 уравнений с четырьмя неизвестными $\chi^2 = 12{,}32$, что в случае 13 степеней свободы свидетельствует о хорошей согласованности системы.

Матрица, с помощью которой получены погрешности $\sigma_\alpha$, $\sigma_e$, $\sigma_\Lambda$ и $\sigma_N$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} 6{,}2 & 15{,}8 & 5{,}0 & -14{,}6 \\ 15{,}8 & 47{,}7 & 16{,}2 & -47{,}9 \\ 5{,}0 & 16{,}2 & 25{,}6 & -25{,}8 \\ -14{,}6 & -47{,}9 & -25{,}8 & 79{,}3 \end{vmatrix},$$

где диагональные элементы $d_{ii}$ являются дисперсиями неизвестных, умноженными на $10^{-12}$, а внедиагональные $d_{ij}$ — корреляционными моментами.

Так как матрица симметрична, вычислим коэффициенты корреляции для каждой пары констант и расположим их в правом углу над диагональю, а корреляционные моменты — под диагональю:

$$\begin{array}{c} \\ \alpha \\ e \\ \Lambda \\ N \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha \quad & \quad e \quad & \quad \Lambda \quad & \quad N \end{array} \\
\begin{vmatrix} 6{,}2 & 0{,}903 & 0{,}391 & -0{,}649 \\ 15{,}8 & 47{,}700 & 0{,}454 & -0{,}760 \\ 5{,}0 & 16{,}200 & 25{,}600 & -0{,}562 \\ -14{,}6 & -47{,}900 & -25{,}800 & 79{,}300 \end{vmatrix} \end{array}.$$

Приведем для сравнения результаты последнего согласования Дюмондом и Коэном и полученные автором соответственно:

$$\alpha^{-1} = 137{,}0388 \text{ и } 137{,}0359;$$
$$e = 4{,}80298\cdot 10^{-10} \text{ и } 4{,}80327\cdot 10^{-10};$$
$$N = 6{,}02252\cdot 10^{-23} \text{ и } 6{,}02218\cdot 10^{23}.$$

Полученные значения $\alpha$, $e$, $\Lambda$ и $N$ позволяют вычислить любую константу, которая является их функцией. Однако при определении дисперсии функции необходимо учитывать, что эти константы — коррелированные величины.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Taylor B., Parker W., Langenberg D., Denenstein A. On the Use of the AC Josephson Effect to Maintain Standarts of Electromotive Force. «Metrologia», 1967, v. 3, № 4.

2. Cohen E. A Review of Recent Work in the Determination of Fundamental Physical Constants. North American Aviation Science Center, June, 1966.

3. Dumond J. Present Key Importance of Fine Structure Constant α, to a Better Knowledge of All the Fundamental Constants. «Zs. Naturf»., 1966, Bd. 21a, H1/2.

4. Cohen E., Dumond J. Our Knowledge of the Fundamental Constants of Physics and Chemistry in 1965. «Rev. mod. phys»., 1965, v. 38, № 4.

5. Мамырин Б. А., Французов А. А. Измерение магнитного момента протона в ядерных магнетонах, ЖЭТФ, 1965, т. 48.

6. Cohen E., Crowe K., Dumond J. Interscience Publishers. New Jork, 1957.

Поступила в редакцию 11.IV 1968 г.

УДК 539.184.25 : 538

Л. Д. ЧЕЧЕЛАШВИЛИ

Тбилисский филиал ВНИИМ

# О НАИБОЛЕЕ ВЕРОЯТНОМ ЗНАЧЕНИИ ПОСТОЯННОЙ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ

В настоящее время принято считать наиболее вероятным значение постоянной тонкой структуры $\alpha = 0{,}00729720$ (погрешность $\sigma = 0{,}00003$), полученное экспериментально Лэмбом при исследовании тонкой структуры атомов водорода и действия и рекомендованное Дюмондом и Коэном после согласования констант [1].

Однако уже в трех точных экспериментах разными методами определено значение $\alpha^{-1} = 137{,}0359$ с достаточно малой погрешностью, что вызвало у Дюмонда [2] сомнения в достоверности значения $\alpha$, полученного Лэмбом.

Рассмотрим кратко эти эксперименты.

В опыте Лэмба [3] часть атомного пучка дейтерия возбуждалась электронной бомбардировкой до уровня $2^2S_{1/2}$. Соответствующее этому уровню состояние является метастабильным, и переход в основное состояние $1S_{1/2}$ происходил через промежуточные уровни $2P$. Попадая на металлический детектор, возбужденные метастабильные атомы за счет своей избыточной энергии вырывали электроны с его поверхности. Коллектор регистрировал электронный ток, пропорциональный числу метастабильных атомов, достигших детектора. На пути к детектору имелась область, где действовало радиочастотное поле. При частоте поля, равной частоте перехода между энергетическими уровнями, метастабильные атомы практически мгновенно переходили через уровни $2P$ в основное состояние, а ток коллектора резко падал. Таким образом был измерен лэмбовский сдвиг, интервал $2^2P_{3/2}$—$2^2S_{1/2}$ и вычислен интервал $2^2P_{3/2}$—$2^2P_{1/2}$. Затем было определено значение $\alpha = 0{,}00729726$ по формуле

$$\Delta\nu = \frac{\alpha^2}{16} R_\infty c \left(\frac{M}{M+m}\right)\left[1 + \frac{5}{8}\alpha^2 + 2\left(\frac{M}{M+m}\right)\left(\frac{\mu_e}{\mu_B} - 1 - \frac{\alpha^3}{2\pi}\log\frac{1}{\alpha}\right)\right],$$

где $\Delta\nu$ — разность частот между уровнями; $R_\infty$ — постоянная Ридберга; $M$ и $m$ — массы протона и электрона; $c$ — скорость света; $\mu_e/\mu_B$ — магнитный момент электрона в магнетонах Бора.

Разработанный Робеско [4] метод определения $\alpha$ (метод точки пересечения уровней в магнитном поле) заключается в следующем. В магнитном поле уровни $2S$ и $2P$ пересекаются. С помощью ядерного магнитного резонанса очень точно измеряют магнитную индукцию в различных точках пересечения уровней. Используя теоретическую связь между уровнями, разделенными в магнитном поле, и его индукцией, определяют лэмбовский интервал $2^2P_{3/2}$—$2^2S_{1/2}$. Затем вычисляют интервал $2^2P_{3/2}$—$2^2P_{1/2}$ и находят значение $\alpha$. В опыте Робеско $\alpha^{-1} = 137{,}0359$ (погрешность $\sigma = 0{,}0012$).

Рамзей [5] измерил частоту водородного мазера с очень большой точностью (погрешность порядка $10^{-11}$), использовав при генерации колебаний переход между уровнями сверхтонкой структуры основного состояния. В эксперименте были применены два водородных мазера и цезиевый эталон частоты. Каждые полчаса в течение суток частоту опорного мазера сравнивали с частотой эталона. Выделявшийся при этом сигнал поступал на осциллограф, где по фигурам Лиссажу измеряли его частоту, равную разности частот исследуемого и опорного мазеров, с точностью до долей герца.

По частоте перехода определяли постоянную тонкой структуры, которая оказалась равной $\alpha^{-1} = 137{,}0359$ ($\sigma = 0{,}0007$).

Эксперимент Тейлора [6] по определению отношения $2e/h$ ($e$ — заряд электрона, $h$ — постоянная Планка) основан на нестационарном эффекте Джозеф-

сона. Этот эффект заключается в том, что при приложении к узлу Джозефсона * постоянного напряжения $U$ возникает переменный ток частотой $\nu = \frac{2e}{h} U$.
Скачки постоянного тока, протекавшего через узел, возбуждались микроволновым облучением. При облучении частотой $\nu$ они имели вид ступеней на вольтамперной характеристике узла Джозефсона. Напряжение $U_n$, при котором возникали ступени, связано с частотой облучения соотношением $2eU_n = nh\nu$ ($n$ — номер ступени).

Таким образом, для определения отношения $2e/h$ достаточно было измерять частоту микроволнового излучения $\nu$ и напряжение $U_n$. Погрешность измерения $\nu$ составляла $1 \cdot 10^{-8}$, так что точность определения $2e/h$ ограничивалась точностью измерения напряжения. В результате получено $2e/h = 483{,}5912$ *Мгц/мкв* (погрешность 0,0030). После подстановки этого значения в уравнение

$$\alpha^{-1} = \left(\frac{c}{4R_\infty \gamma_p} \cdot \frac{\mu_p}{\mu_B} \cdot \frac{2e}{h}\right)^{1/2}$$

$\alpha^{-1} = 137{,}0359$ ($\sigma = 0{,}0004$).

Во время последнего согласования констант Дюмондом и Коэном, не были еще завершены эксперименты Тэйлора и Робеско, а также не была опубликована и работа [7] Б. А. Мамырина и А. А. Французова.

В связи с этим автором проведено новое согласование констант методом Дюмонда и Коэна [8], в результате которого получена система из семнадцати уравнений с четырьмя неизвестными $\alpha$, $e$, $\Lambda$ (переводной коэффициент Зигбана от $x$ единиц к миллиангстремам) и $N$ (число Авогадро)**. После обработки системы способом наименьших квадратов найдено $\alpha^{-1} = 137{,}0359$ с погрешностью $2{,}5 \cdot 10^{-6}$.

Для данной системы с 13 ступенями свободы $\chi^2 = 12{,}32$, что свидетельствует о хорошей ее согласованности. Поэтому при выборе значения $\alpha$ следует отдать предпочтение $\alpha^{-1} = 137{,}0359$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Cohen E., Dumond J. Our Knowledge oh the Fundamental Constants of Physics and Chemistry in 1965. «Rev. mod. phys», 1965, v. 37, № 4.
2. Dumond J. Present Key Importance of the Feine Structure Constant $\alpha$, to a Better Knowledge of All the Fundamental Constants. «Zs. Naturf», 1966, Bd. 21a, H1/2.
3. Triebwasser S., Dayhoff E., Lamb E., Fine Structure of the Hydrogen Atom. «Phys. rev», 1953, v. 89.
4. Robiscol R. Observation of Level Crossing in H, $n$-2. «Phys. rev», 1965, v. 138, № 1A.
5. Cohen E. A Review of Recent Work in the Determination of Fundamental Physical Constants. North American Aviation Science Center, 1966, June.
6. Taylor B., Parker W., Langenberg D., Denenstein A., on the. Use of the A. C. Josephson Effect to Maintain Standarts of Electromotive Force. «Metrologia», 1967, v. 3, № 4.
7. Мамырин Б. А., Французов А. А. Измерение магнитного момента протона в ядерных магнетонах. ЖЭТФ, 1965, т. 48.
8. Cohen E., Crowe K., Dumond J. The Fundamental Constants of Physics. Interscience Publishers. New Jork, 1957.


Поступила в редакцию 11/IV 1968 г.

---

* Два сверхпроводника, разделенных тонким изолирующим слоем.

** См. стр. 24.

УДК 530.145.5.08 : 539.12

Л. П. ГУБИН, В. В. ЖУКОВ, К. А. КРАСНОВ
ВНИИМ

# ОБ ИЗМЕРЕНИИ ОТНОШЕНИЯ ПОСТОЯННОЙ ПЛАНКА К ЗАРЯДУ ЭЛЕКТРОНА (ОБЗОР)

В связи с исключительной важностью для физики получения надежных значений физических констант, начиная с 1929 г. Бердж, а затем Дюмонд и Коэн периодически проводят согласования констант [1—6].

Так как многие физические константы связаны между собой различными зависимостями, то, приняв несколько из них за основные, можно выразить через них все остальные. При согласованиях 1963 и 1965 гг. за основные константы были приняты: скорость света в пустоте $c$, постоянная Ридберга для бесконечной массы ядра $R_\infty$, атомная масса протона $M_p$, магнитные моменты протона $\mu_p/\mu_Б$ и электрона $\mu_e/\mu_Б$ в магнетонах Бора, постоянная тонкой структуры $\alpha$, элементарный электрический заряд $e$, число Авогадро $N$. Первые четыре из этих величин в настоящее время определены с высокой точностью (погрешность $10^{-6}$ и меньше). Для согласованного определения трех последних констант Дюмонд и Коэн изучили большое количество экспериментов различных исследователей. Результаты наиболее надежных, по мнению Дюмонда и Коэна, шести экспериментов позволили им составить систему из шести условных уравнений, для решения которой был применен метод наименьших квадратов [2]:

$$\left.\begin{aligned} \alpha^{-1} &= 137{,}0388; \\ Ne^2/\alpha^3 &= 3{,}978227\cdot10^{-5}\ \kappa^2/\text{кмоль}; \\ Ne^2/\alpha^3 &= 3{,}978208\cdot10^{-5}\ \kappa^2/\text{кмоль}; \\ Ne &= 9{,}648682\cdot10^{7}\ \kappa/\text{кмоль}; \\ \alpha^3/e &= 24{,}253845\cdot10^{11}\ \kappa^{-1}; \\ \alpha^3/e &= 24{,}253809\cdot10^{11}\ \kappa^{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Первое уравнение системы (1) зависит только от $\alpha$. Остальные уравнения определяют две различные зависимости между тремя переменными, что недостаточно для однозначного определения $e$, $N$ и $\alpha$. Поэтому одну из переменных, а именно $\alpha$, находят из дополнительного условия, в данном случае из первого уравнения системы (1). Следовательно, для согласования фундаментальных физических констант решающее значение имеют точные эксперименты по измерению $\alpha$. В связи с этим в ряде лабораторий проводятся работы по устранению существующих расхождений в определении $\alpha$.

Другой путь согласования констант состоит в дополнении системы (1) новыми независимыми уравнениями. Такие уравнения могли бы быть получены в результате измерений коэффициента Зигбана, однако, как указывается в работе [5], пока еще не достигнута нужная точность этих экспериментов.

Возможность получения новой зависимости между $e$ и $\alpha$ открывает предсказанное Ф. Лондоном [7] явление квантования магнитного потока, которое состоит в том, что значения магнитного потока внутри многосвязного сверхпроводника должны быть кратными

$$\Phi_0 = h/2e, \tag{2}$$

где $h$ — постоянная Планка.

Эффект квантования магнитного потока подтверждается современной микроскопической теорией сверхпроводимости. В феноменологической теории Гинзбурга—Ландау [8] сверхпроводящее состояние описывается параметром упорядочения $\psi = \rho e^{i\gamma}$, где $\rho$ — плотность сверхпроводящих электронов, а $\gamma$ — фаза. Разность фаз между двумя точками сверхпроводника можно записать в виде квантовомеханического уравнения

$$\gamma_2 - \gamma_1 = \frac{2e}{h}\, 2\pi \int\limits_1^2 (\mu_0 \lambda^2 \mathbf{j} + \mathbf{A})\, d\mathbf{l},$$

где $\mu_0$ — магнитная постоянная; $\lambda = m\,(\mu_0 N_s e^2)^{-1/2}$ — глубина проникновения по Ф. Лондону ($N_s$ — число сверхпроводящих электронов); $\mathbf{j}$ — плотность тока сверхпроводимости; $\mathbf{A}$ — векторный потенциал; $m$ — масса электрона; $\mathbf{l}$ — длина контура интегрирования.

При интегрировании по замкнутому контуру вследствие однозначности $\psi$ выполняется условие $\Delta\gamma = 2\pi n$ ($n$ — целое число), из которого видно, что определенный Ф. Лондоном [7] флюксоид

$$\Phi' = \oint (\mu_0 \lambda^2 \mathbf{j} + \mathbf{A})\, d\mathbf{l}$$

является кратным $n\,(h/2e)$; иными словами, имеет место квантование магнитного потока.

Уравнение Ф. Лондона для сверхпроводимости в односвязном сверхпроводнике имеет вид

$$\Delta \mu_0 \lambda^2 \mathbf{j} = -\mathbf{B},$$

где $\mathbf{B}$ — магнитная индукция.

Наличие между $\alpha$, $h$ и $e$ связи $\alpha = \mu_0 c e^2/2h$ позволяет при точном измерении кванта магнитного потока ввести в систему (1) новое независимое уравнение, объединяющее обе ее части,

$$\frac{e}{\alpha} = \frac{h}{2e} \cdot \frac{4}{\mu_0 C}.$$

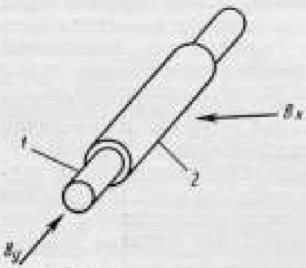


Рис. 1. Схема для определения кванта магнитного потока в эксперименте Долла и Нейбауэра.

В 1961 г. Долл и Нейбауэр [9], Дивер и Фербенк [10] в независимых экспериментах подтвердили существование явления квантования магнитного потока в маленьких сверхпроводящих образцах, имеющих форму полых цилиндров. Было обнаружено, что захваченный поток

$$\Phi = \frac{B\pi d^2}{4},$$

где $B$ — индукция поля, направленного по оси образца; $d$ — внутренний диаметр образца, при непрерывном изменении напряженности поля изменяется скачками, равными кванту магнитного потока.

Образец *2* (рис. 1) диаметром около 10 *мкм* и длиной порядка 1 *мм*, изготовленный методом испарения металла на тонкий кварцевый цилиндр *1*, Долл и Нейбауэр подвешивали на упругой нити. Ось вращения образца была перпендикулярна к осям двух катушек, создававших магнитные поля с индукциями $B_y$ и $B_x$. Индукцию $B_y$, направленную по оси образца, «вмораживали» в него: при температуре выше температуры сверхпроводящего перехода образец помещали в магнитное поле с индукцией $B_y$ и охлаждали до сверхпроводящего состояния. После снятия поля внутри образца сохранялся «вмороженный» поток. Индукция $B_x$ была направлена перпендикулярно к оси цилиндра. Возникавший в системе механический крутящий момент был пропорционален индукции $B_x$ и «вмороженному» потоку. Резонансную амплитуду колебаний системы, обусловленных крутящим моментом, поддерживали постоянной, периодически изменяя поле фотоэлектрическим устройством, и измеряли авторезонансным методом [11].

На рис. 2 показана экспериментальная зависимость отношения $k$ резонансной амплитуды к известной индукции поля $B_x$ от индукции $B_y$. Погрешность измерения кванта магнитного потока при этом составляла 60%.

Дивер и Фербенк измеряли захваченный поток при продольных колебаниях сверхпроводящего образца *2* (рис. 3) между двумя измерительными катушками *1*. Образцы в виде полых цилиндров (наружный диаметр около $1{,}64\cdot10^{-3}$ и внутренний $1{,}35\cdot10^{-3}$ *см*), изготовленные электролитическим осаждением олова на медную проволоку, покрывали сверху слоем меди для защиты от внешних воздействий и повышения механической прочности. Цилиндр приводили в колебательное движение диффузорным устройством [12]. С помощью трех ортогональных катушек Гельмгольца компенсировали постороннее внешнее поле до $\pm10^{-7}$ *тл*. Образец помещали в свободную от внешних магнитных полей область и охлаждали ниже температуры сверхпроводящего перехода в присутствии известного поля с индукцией $B$, приложенного вдоль его оси. Затем определяли наводимую в катушках э. д. с. по «вмороженному» в цилиндр магнитному потоку.

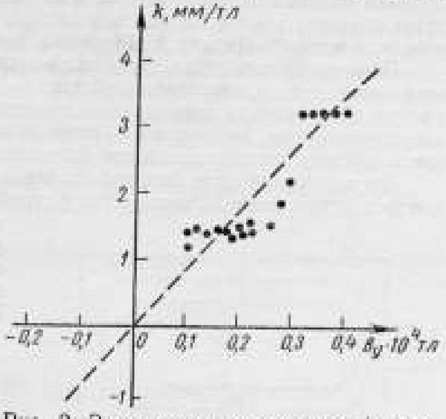


Рис. 2. Зависимость отношения $k$ резонансной амплитуды к известной индукции $B_x$ от индукции $B_y$.

Результаты этого опыта проиллюстрированы на рис. 4.

При нормальном (несверхпроводящем) состоянии цилиндра зависимость Ф от $B$ (в относительных единицах) показывает большая диагональная линия в нижней части графика. С понижением температуры за точку сверхпроводящего перехода магнитный поток в цилиндре изменяется скачкообразно при непрерывном изменении индукции поля, что иллюстрируют короткие диагональные линии. Горизонтальные линии в верхней части графика отражают значения

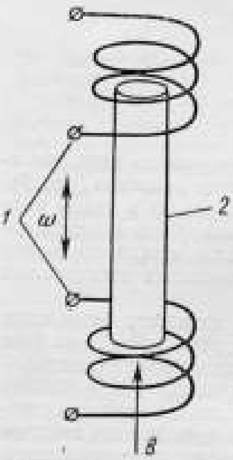


Рис. 3. Схема для определения кванта магнитного потока в эксперименте Дивера и Фербенка.

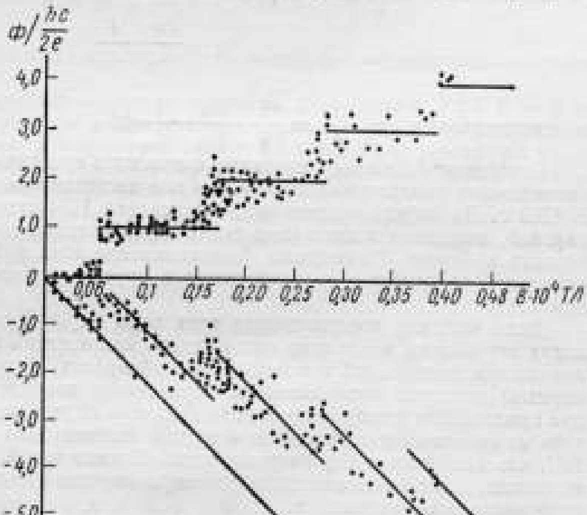


Рис. 4. Зависимость потока Ф от индукции магнитного поля $B$ (в относительных единицах).

«вмороженного» потока, т. е. потока, сохраняющегося в цилиндре при выключении поля. Как видно из рис. 4, этот поток изменяется скачками, значения которых равны в пределах погрешности эксперимента разностям ординат между любыми близлежащими линиями в верхней части графика. Эти скачки одинаковы и равны кванту магнитного потока, погрешность измерения которого составляла в опыте Дивера и Фербенка примерно 40%.

Повышение точности определения поперечных сечений полых сверхпроводящих цилиндров на несколько порядков — что вполне возможно при современном уровне изготовления полированных кварцевых или стеклянных цилиндров со сверхпроводящим покрытием — позволило бы значительно уменьшить погрешность прямых измерений кванта магнитного потока.

Другим источником большой погрешности в описанных экспериментах могло явиться применение механических устройств для измерения индукции магнитного поля. Эту погрешность можно уменьшить, если измерять индукцию магнитного поля, используя ее связь с частотой прецессии протонов $\omega_p$. В этом случае экспериментальное уравнение будет иметь вид

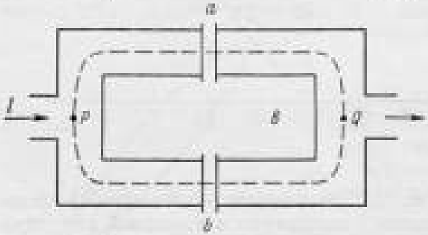


Рис. 5. Параллельное соединение туннельных узлов.

$$\omega_p \frac{S}{n} = \gamma_p \frac{h}{2e},$$

где $S$ — площадь сверхпроводящей цепи; $n$ — число квантов магнитного потока; $\gamma_p$ — гиромагнитное отношение протона.

Кроме того, измерение отношения частоты прецессии протона к кванту магнитного потока позволяет определить постоянную тонкой структуры, так как

$$\gamma_p = \frac{\mu_p}{\mu_B} \cdot \frac{l}{m}$$

и, следовательно, $$\omega_p \frac{S}{n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\mu_p}{\mu_B} \cdot \frac{1}{R_\infty} \alpha^2.$$

Отношение $h/2e$ измеряют также с помощью туннельного узла из двух сверхпроводников, разделенных изолятором или несверхпроводящим металлом (рис. 5). В 1962 г. Джозефсон теоретически предсказал [13] существование в таком узле явлений, известных в настоящее время под названием стационарного и нестационарного эффектов Джозефсона. Возникновение этих эффектов можно объяснить переходом из одного сверхпроводника в другой коррелированных электронных пар [14].

Если толщина изолирующего слоя мала ($<10^{-7}$ *см*), то электронные пары могут переходить через него при нулевом напряжении на узле, вследствие чего появляется постоянный ток (стационарный эффект). Другим эффектом (нестационарным) является возникновение переменного сверхтока частотой $\nu = 2eU/nh$ при приложении к узлу напряжения $U$. В этом случае электронная пара при переходе из одного сверхпроводника в другой должна была бы приобретать энергию $2eU$, что невозможно без разрыва пары. Однако такой переход связанной пары возможен, когда она отдает приобретенную энергию в виде квантов электромагнитного излучения частотой $\nu$.

Согласно Фейнману [15] эффекты Джозефсона описывает следующая система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} ih\,(1/2\pi)\,\partial\psi_1/\partial t &= u_1\psi_1 + K\psi_2; \\ ih\,(1/2\pi)\,\partial\psi_2/\partial t &= u_2\psi_2 + K\psi_1, \end{aligned} \right\} \qquad (8)$$

где $i$ — мнимая единица; $\psi_1$ и $\psi_2$ — волновые функции сверхпроводников; $u_1$ и $u_2$ — энергетические члены, играющие роль гамильтонианов отдельных сверхпроводников; $K$ — матричный элемент, обеспечивающий связь между волновыми функциями системы.

Эти уравнения записаны в форме уравнений Шредингера для связанной квантовомеханической системы с двумя состояниями.

Пусть между сверхпроводниками имеется некоторая разность потенциалов $U$, так что $u_1 - u_2 = qU$ ($q$ — заряд переносчиков токов). Выбрав соответствующим образом нулевую точку отсчета энергии, запишем систему (8) в виде:

$$\left.\begin{aligned} ih\left(\frac{1}{2\pi}\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial t} &= \frac{qU}{2}\psi_1 + K\psi_2; \\ ih\left(\frac{1}{2\pi}\right)\frac{\partial\psi_2}{\partial t} &= -\frac{qU}{2}\psi_2 + K\psi_1. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Представив $\psi_{1,2}$ как $\sqrt{\rho_{1,2}}e^{i\gamma_{1,2}}$ и обозначив $\gamma_1 - \gamma_2$ через $\varphi$, получим из (9) уравнения для $\rho_1$, $\rho_2$ и $\gamma_1$, $\gamma_2$:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\rho}_1 = -\dot{\rho}_2 &= \frac{2}{h}2\pi K\sqrt{\rho_1\rho_2}\sin\varphi; \\ \dot{\gamma}_{1,2} &= \frac{2\pi K}{h}\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}\cos\varphi \pm \frac{qU}{2h}2\pi. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Так как ток Джозефсона $j$ протекающий из одного сверхпроводника в другой, равен $+\dot{\rho}_1$ или $-\dot{\rho}_2$ и $\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2 = \dot{\varphi}$, из (10) имеем:

$$\left.\begin{aligned} j = j_{max}\sin\varphi;\ j_{max} &= \frac{4\pi K}{h}\sqrt{\rho_1\rho_2}; \\ \varphi &= \varphi_0 + \frac{2\pi q}{h}\int U(t)\,dt, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где $j_{max}$ — максимальное значение тока Джозефсона; $\varphi_0$ — некоторая начальная разность фаз; $t$ — время.

Формулы (11) описывают сущность эффектов Джозефсона. При $U = 0$ величина $j$ связана с $\varphi_0$, которая в свою очередь зависит от внешних условий (материала сверхпроводника, магнитного поля и т. д.). Поскольку всегда $|\sin\varphi_0| \leqslant 1$, из (11) следует, что ток Джозефсона ограничен некоторым значением $j_{max}$. Однако, не зная $K$, нельзя вычислить $j_{max}$.

При постоянной разности потенциалов между сверхпроводниками фаза $\varphi$ линейно, а ток $j$ периодически зависят от времени $t$, так что среднее значение $j_{ср} = 0$. Предположим, что

$$U(t) = U_0 + u\cos\omega t, \tag{12}$$

где $U_0$ — постоянный компонент напряжения на туннельном узле; $u\cos\omega t$ — дополнительное периодическое электрическое поле (например, поле внешней электромагнитной волны).

Считая $u \ll U_0$ и имея в виду, что при $\alpha \ll 1$

$$\sin(x + \alpha) \approx \sin x + \alpha\cos x,$$

получим

$$j = j_{max}\left[\sin\left(\varphi_0 + \frac{2\pi q}{h}U_0 t\right) + \frac{2\pi q}{h}\cdot\frac{u}{\omega}\sin\omega t\cos\left(\varphi_0 + \frac{2\pi q}{h}U_0 t\right)\right].$$

При усреднении по времени первый член уравнения (12) равен нулю, а второй имеет конечный результат при соблюдении резонансного условия $\hbar\omega = qU_0$, соответствующего обмену энергией между сверхпроводником и внешним электромагнитным полем. Это означает, что при подаче на образец внешнего излучения частотой $\nu = \omega/2\pi$ должно наблюдаться отличное от нуля значение тока при напряжении на туннельном узле $U = n\hbar\omega/4\pi e$.

В настоящее время эффекты Джозефсона подтверждены многими экспериментами. Так, Жаклевич и Лэмб [16] изучали ток Джозефсона, протекающий через параллельно соединенные туннельные узлы, в зависимости от приложенного внешнего магнитного поля с индукцией $B$.

Допустим, что поперечные сечения туннельных узлов $a$ и $b$ (рис. 5) малы по сравнению с поперечным сечением всего сверхпроводящего кольца. Это предположение позволяет пренебречь пространственным изменением фазы волновой функции в изолирующем слое. Будем также считать, что поперечные размеры узлов малы по сравнению с размером электронной пары $\lambda$. Это значит, что плотность тока, протекающего через узел, однородна. Предположим далее, что оба изолирующих слоя одинаковы и симметрично расположены, магнитное поле с индукцией $B$ направлено перпендикулярно к плоскости рисунка и образец достаточно массивен, чтобы можно было выбрать непрерывный контур внутри кольца (штриховая линия), в котором сверхпроводящий ток $j = 0$. При этом согласно формуле (7) внутри кольца может находиться целое число квантов магнитного потока.

Ток, протекающий через каждый из туннельных узлов $a$ и $b$, равен:

$$j_a = j_{\max} \sin \varphi_a;$$

$$j_b = j_{\max} \sin \varphi_b,$$

где $\varphi_a$ и $\varphi_b$ — скачки фаз на узлах $a$ и $b$.

Внешний ток $I$, проходящий через систему, есть сумма токов, идущих через каждый из узлов. Волновая функция системы должна быть однозначна при обходе вокруг кольца. Следовательно, разность фаз при переходе из точки $P$ в точку $Q$ по контуру $PaQ$ должна быть равна (с точностью до слагаемого $2\pi n$) разности фаз по контуру $PbQ$. Иными словами,

$$\varphi_a + \frac{4\pi e}{hc} \int\limits_a A\, dS = \varphi_b + \frac{4\pi e}{hc} \int\limits_b A\, dS + 2\pi n$$

или $\varphi_a - \varphi_b = \dfrac{4\pi e}{hc} \oint A\, dS + 2\pi n,$

где

$$\varphi_a = \varphi_0 + \frac{2\pi e}{hc}\Phi + n\pi; \quad \varphi_b = \varphi_0 - \frac{2\pi e}{hc}\Phi + n\pi;$$

$\Phi = \oint A\, dS$ — магнитный поток в кольце.

Тогда при $0 \leqslant \varphi_0 \leqslant \pi$

$$I = j_a + j_b = j \sin\left(\varphi_0 + \frac{2\pi e}{hc}\Phi + n\pi\right) + j \sin\left(\varphi_0 - \frac{2\pi e}{hc}\Phi - n\pi\right) =$$

$$= 2j \sin \varphi_0 \left|\cos \frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right|; \tag{13}$$

здесь $\Phi_0$ — квант магнитного потока.

Если поперечные размеры (по отношению к полю) узлов сравнимы с площадью кольца, что наиболее соответствует экспериментальным условиям, то формулу (13) придется несколько изменить. При этом следует суммировать токи в различных частях узла в соответствии с локальной разностью фаз.

Для двух одинаковых симметричных узлов получим формулу зависимости максимального тока от магнитного поля, аналогичную формуле интерференционной модулированной дифракции в оптике:

$$I = 2j \sin \varphi_0 \left|\frac{\sin \dfrac{\pi B}{B_0}}{\pi B/B_0}\right| \cdot \left|\cos \frac{\pi B}{B_0}\right|,$$

где $B_0$ — индукция поля, соответствующая одному кванту потока внутри контура, проходящего через центры туннельных узлов; $B$ — индукция поля, соответствующая одному кванту потока в каждом из узлов, с учетом глубины проникновения поля.

Жаклевич и Лэмб использовали нестационарный эффект Джозефсона для определения кванта магнитного потока. В своих экспериментах они применяли сверхпроводящий интерферометр, представляющий собой параллельное соединение туннельных узлов (олово—оксид олово—олово), которые изготовлялись следующим образом.

Основную пленку *1* (рис. 6) толщиной около $10^{-4}$ *мм* напыляли испарением олова при давлении $10^{-6}$ *мм рт. ст.* на подложку *5* из полированного стекла или плавленого кварца, охлажденного до температуры жидкого азота. После напыления подложку *5* нагревали в вакууме до комнатной температуры. Затем основную пленку покрывали пленкой *4* из формвара, чтобы очертить площадь туннельных узлов *3*. После сушки формваровой пленки *4* в течение нескольких часов, на открытую область узла термически наращивали слой окисла олова, заполняя объем кислородом на 1 *ч* при 110° С. Затем при комнатной температуре в вакууме напыляли верхнюю пленку *2*. Полученные таким путем образцы имели форму кольца площадью порядка 0,1—0,3 $мм^2$.

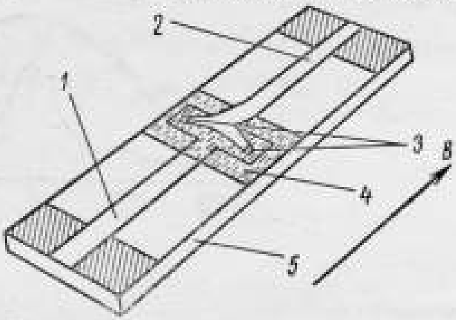

Рис. 6. Сверхпроводящий интерферометр.

Сверхпроводящий интерферометр во время эксперимента помещали в жидкий гелий и окружали свинцовым цилиндром для экранирования от паразитных магнитных полей. Криостат дополнительно экранировали цилиндром с двойными стенками из μ-металла.

Во всех исследованных образцах период интерференции тока Джозефсона оставался в пределах погрешности эксперимента таким, что изменение индукции внешнего поля, необходимое для изменения магнитного потока, охватываемого интерферометром, было кратно единице потока. В одном из экспериментов расстояние между двумя соседними малыми максимумами тока составляло приблизительно $3 \cdot 10^{-8}$ *тл.* На рис. 7, *а* схематически изображена периодическая зависимость $I$ от $B$.

Наибольшая погрешность эксперимента была связана с определением площади, охватываемой кольцом. Это обусловлено неоднородностью по толщине формваровой пленки, измеряемой в лучшем случае с погрешностью 10—50%, что ограничивало точность измерения кванта магнитного потока. Основная трудность таких экспериментов в изготовлении туннельных образцов больших размеров. Однако, как отмечает Фейнман [15], для образца с площадью кольца 1 $см^2$ разрешающая способность $\Delta B = \Phi_0/S \approx 10^{-11}$ *тл.*

Интерес представляет и другой эксперимент Жаклевича и Лэмба [16], который состоял в том, что магнитный поток вводили внутрь кольца (рис. 6) с помощью узкого длинного соленоида, при этом магнитное поле вне соленоида было пренебрежимо мало. Несмотря на то что магнитное поле в сверхпроводящих подводах и туннельных узлах оставалось равным нулю, ток Джозефсона, проходящий через систему, зависел периодически от потока $\Phi = \oint A\, dS$ внутри кольца. Другими словами, значение тока определялось значением векторного потенциала на контуре.

Наблюдать интерференцию от векторного потенциала (без проникновения поля в сверхпроводник) весьма сложно из-за эффекта самоэкранирования. На рис. 7, *б* показана модуляция, вызываемая векторным потенциалом А соленоида. Периодичность потока, измеренного током возбуждения соленоида, составляла

16,9 *мка/пер*, а единица потока $(2,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-15}$ *вб*. Погрешность эксперимента была 5%.

В 1966 г. американские физики Тейлор, Паркер и Лангенберг сообщили в печати об измерении отношения $h/e$ с помощью нестационарного эффекта Джозефсона тремя различными методами [17]: 1) к туннельному узлу прикладывали калиброванное напряжение и измеряли частоту излучения в диапазоне около 10 *Гги*; 2) подавая излучение с частотой 10 *Гги* на туннельный узел, определяли индуцированное напряжение; 3) подавая излучение с частотой 10 и 70 *Гги* на туннельный узел, определяли напряжение, при котором возникали ступеньки на вольт-амперной характеристике узла. Эти методы дали одинаковое отношение $h/e$ =

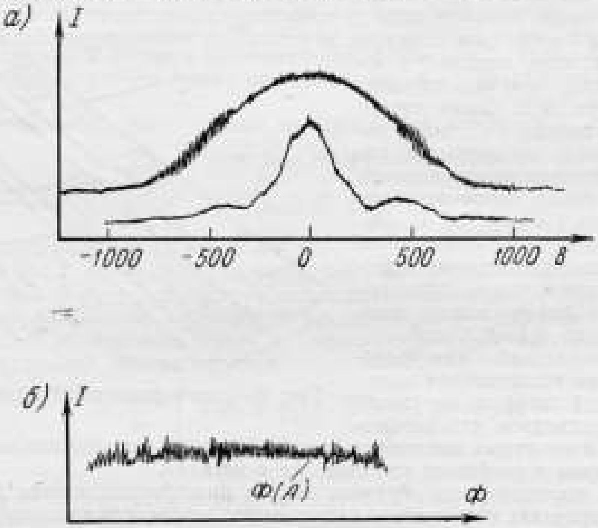


Рис. 7. Зависимости тока Джозефсона $I$ от магнитной индукции: (*а*) и магнитного потока (*б*) для двух параллельно соединенных туннельных узлов.

$= 4,135725 \pm 0,000026$ *вб* с погрешностью 0,01%, которая в настоящее время уменьшена до 0,0005% [18].

В заключение следует отметить, что исследование свойств сверхпроводников имеет не только общефизическое значение, но и играет важную роль в метрологической практике. В настоящее время уже известно о создании сверхпроводящего гальванометра [19], чувствительность которого достигает $10^{-15}$ *в*, магнетометра для измерения изменений магнитного потока с чувствительностью $10^{-13}$ *тл* [20] и других приборов, использующих свойства сверхпроводников.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Birge R. T. «Rev. mod. phys.» 1929, v. 1, No. 1.
2. Suppl. al vol. V, serie X del «Nuovo Cimento», 1957, No. 1.
3. Du Mond I.» Q R E Frans.», 1965, v. 1, No. 7, p. 136.
4. Cohen E., Du Mond I. «Rev. mod. phys.», 1965, vol. 3, No. 7, p. 537.
5. Du Mond I. «Zs. Naturf.», 1966, No. 21a, S. 70.
6. Горбацевич С. В., Залуцкая Т. Л. Важнейшие физические константы. Методы определения и числовые значения. «Измерительная техника», 1967, № 1.

7. London F. «Supperfluids». New York, 1950, vol. 1.
8. Гинзбург В. Л. Ландау. Л. Д. К теории сверхпроводимости. ЖЭТФ, 1950, № 20.
9. Doll R., Nabauer H. «Phys. rev. letts»., 1961, vol. 7, No. 7, p. 51.
10. Diver I., Fairbank W. «Phys. rev. letts.», 1961, vol. 7, No. 2, p. 43.
11. Finsten A., de Haas W. I. «Verhandl. dent. Physic. Ges.», 1915, No. 17, S. 152.
12. Foner S. «Rev. sci. instrum.», 1959, No. 3, p.548.
13. Josephson B. D. «Phys. letts.», 1962, vol. 2, No. 1, p. 251.
14. Josephson B. D. «Rev. mod. phys.», 1964, vol. 36, No. 1, p. 216.
15. Feynman R. Lectures on physic, 1964, vol. 3, § 21.
16. Jaklevic R., Lamb I. «Phys. rev.», 1965, vol. A 140, p. 1628.
17. Zimmerman I., Silver A. «Phys. rev.». 1966, vol. 14, No. 1, p. 56.
18. Taylor B. N., Parker W. H., Langenbery B. K. «Metrologia», 1967, vol. 3, No. 4, p. 90.
19. Clarke I. «The Philosophical mag.», 1966, vol. 13, No. 121, p. 115.
20. Forgaes R. L., Warnike A. «IEEE Inter. Convection Record», 1966, pt. 10, p. 99.

Поступила в редакцию 1. VII 1968 г.

**УДК 621.317.441.001.24 : 621.3.013**

*И. В. СТУДЕНЦОВ*

ВНИИМ

# ВЫБОР РАЗМЕРОВ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ КАТУШЕК ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОСТОЯННОЙ КАТУШЕК ГЕЛЬМГОЛЬЦА И СОЗДАНИЯ МЕР МАГНИТНОГО ПОТОКА

Измерительные катушки применяют для определения напряженности магнитного поля и создания мер магнитного потока в сочетании с катушками (кольцами) Гельмгольца, соленоидом и др. В поверочной практике постоянные мер напряженности магнитного поля (соленоидов, колец Гельмгольца и пр.) начинает внедряться метод ядерного магнитного резонанса. Однако для измерения этих постоянных в диапазоне 500—5000 *а/м* еще не разработана аппаратура, основанная на ядерном магнитном резонансе. Поэтому для данного диапазона используют индукционный метод с баллистическим гальванометром, который будет применяться, по-видимому, и в дальнейшем в тех случаях, когда не требуется высокая точность измерений или нельзя применять другой, более точный метод.

Цель данной работы — обосновать выбор оптимального отношения длины цилиндрической измерительной катушки к ее диаметру.

Вычислим значение магнитного потока, сцепляющегося с витками цилиндрической катушки, расположенной в центре колец Гельмгольца.

Осевая составляющая напряженности магнитного поля двух круговых контуров с током, расположенных на произвольном расстоянии друг от друга, выражается соотношением

$$H_x = \frac{w_1 I P_0}{R}\left[1 + \frac{P_2}{R^2}(2x^2 - y^2) + \frac{P_4}{R^4}(8x^4 - 24x^2y^2 + 3y^4) + \right.$$

$$\left. + \frac{P_6}{R^6}(16x^6 - 120x^4y^2 + 90x^2y^4 - 5y^6) + \frac{P_8}{R^8}g_8 + \cdots\right], \qquad (1)$$

где $w_1$ — число витков в одной секции колец; $I$ — сила тока в обмотке колец; $P_0$, $P_2$, $P_4$, $P_6$, $P_8$ — коэффициенты, определяемые отношением $\beta = a/R$ ($2a$ — расстояние между кольцами); $R$ — радиус колец; $x$ и $y$ — координаты точки, в которой вычисляем значение $H_x$, отсчитываемые от центра колец параллельно и перпендикулярно к их оси; $g_8$ — полином восьмой степени координат $x$ и $y$.

Для колец Гельмгольца выбираем $\beta = 0{,}5$, при этом $P_0 = 1{,}6/\sqrt{5}$; $P_2 = 0$; $P_4 = -0{,}144$; $P_6 = 0{,}077$; $P_8 = -0{,}3834$.

Если однослойная цилиндрическая катушка, помещенная в центре колец Гельмгольца, имеет длину $2l$ и радиус $r$, то поток магнитной индукции, сцепляющийся с ее витками

$$\Phi = 2\pi w \mu_0 \int_0^r \int_l^l H_x y \, dy \, dx, \tag{2}$$

где $w = w_s/2l$ — число витков на единицу длины измерительной катушки ($w_s$ — число витков в катушке); $\mu_0$ — магнитная постоянная.

Подставив значение $H_x$ в формулу (2) и произведя интегрирование, получим

$$\Phi = \mu_0 H_0 S w_s \left[1 - \frac{0{,}144 r^4}{R^4}(1{,}6\gamma^4 - 4\gamma^2 + 1) + 0{,}077\frac{r^6}{R^6} \times \right.$$
$$\times \left(\frac{16}{7}\gamma^6 - 12\gamma^4 + 10\gamma^2 - \frac{5}{4}\right) - 0{,}3834\frac{r^8}{R^8}\left(\frac{\gamma^8}{9} - \gamma^6 + \frac{7}{4}\gamma^4 - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{35}{48}\gamma^2 + \frac{7}{128}\right) + \cdots\right] \equiv C\,[1 + \delta_4 + \delta_6 + \delta_8 + \cdots], \tag{3}$$

здесь $S$ — сечение измерительной катушки; $H_0 = \dfrac{1{,}6 w_1 I}{R\sqrt{5}}$ — напряженность магнитного поля в центре колец Гельмгольца; $\gamma \equiv l/r$.

Заметим, если бы поправочные члены $\delta_4$, $\delta_6$, $\delta_8$, . . . отсутствовали, то это означало бы, что витки измерительной катушки сцепляются с потоком однородной магнитной индукции, равной индукции в центре колец Гельмгольца.

Поскольку $\delta_4 > \delta_6 > \delta_8$, необходимо ликвидировать наибольший из поправочных членов $\delta_4$, приравняв его к нулю.

Решив уравнение

$$(1{,}6\gamma^4 - 4\gamma^2 + 1) = 0, \tag{4}$$

найдем: $\gamma_1 = 1{,}489$; $\gamma_2 = 0{,}5308$.

Если параметры измерительной катушки удовлетворяют одному из значений $\gamma_1$ или $\gamma_2$, то магнитный поток, сцепляющийся с ее витками, вычисляем по формуле

$$\Phi = \mu_0 H_0 S w_s \left[1 + 0{,}077\frac{r^6}{R^6}\left(\frac{1{,}6}{7}\gamma^6 - 12\gamma^4 + 10\gamma^2 - \frac{5}{4}\right) - \right.$$
$$\left. - 0{,}3834\frac{r^8}{R^8}\left(\frac{\gamma^8}{9} - \gamma^6 + \frac{7}{4}\gamma^4 - \frac{35}{48}\gamma^2 + \frac{7}{128}\right) + \cdots\right] \equiv$$
$$\equiv C\,[1 + \delta_6 + \delta_8 + \cdots]. \tag{5}$$

Возникает вопрос, какое же из двух значений $\gamma_1$ или $\gamma_2$ целесообразно рекомендовать. Для этого вычислим поправочный член $\delta_6$ и выберем значение $\gamma$, которое приводит к меньшему значению $\delta_6$. Подстановка $\gamma_1$ и $\gamma_2$ дает:

$$\delta_{61} = -1{,}06\frac{r^6}{R^6}; \quad \delta_{62} = 0{,}05\frac{r^6}{R^6}. \tag{6}$$

Прежде чем выбрать $\gamma_2$, определим поправку $\delta_2$ для случая, когда кольца Гельмгольца не идеальные, т. е. когда коэффициент $P_2 \neq 0$.

Если отклонение от идеальности невелико, т. е. $2a - R = \Delta$, то $P_2 = -0{,}6\,\frac{\Delta}{R}$. При этом квадратичный поправочный член будет

$$\delta_2 = 0{,}6\,\frac{\Delta r^2}{R^3}\left(\frac{2}{3}\gamma^2 - \frac{1}{2}\right). \qquad (7)$$

Подставив в формулу (7) значения $\gamma_1$ и $\gamma_2$, получим:

$$\delta_{21} = -0{,}59\,\frac{\Delta r^2}{R^3};\quad \delta_{22} = -0{,}187\,\frac{\Delta r^2}{R^3}. \qquad (8)$$

Таким образом, предпочтение следует отдать катушке длиной $l = 0{,}5308r$. На основании формул (3) и (7)

$$\Phi = \mu_0 H_0 S w_2\left(1 + 0{,}187\,\frac{\Delta r^2}{R^3} - 0{,}051\,\frac{r^6}{R^6} + 0{,}0128\,\frac{r^8}{R^8} + \cdots\right). \qquad (9)$$

Оценим допустимый радиус измерительной катушки, исходя из заданной погрешности измерений. Прежде всего сделаем это для расчетных измерительных катушек, предназначенных для воспроизведения магнитного потока в абсолютных единицах. Отметим, что расчетные измерительные катушки с большим диаметром $2r$ выгоднее, чем с малым, так как погрешность расчета площади сечения для первых меньше, чем для вторых.

Диаметр измерительной катушки должен лимитироваться погрешностями определения $H_0$ и $S$. Если допустить, что суммарная погрешность для этих величин составляет 0,01%, что часто бывает на практике, то не учтенные в выражении (5) поправочные члены (выше восьмой степени) * не должны превосходить $1\cdot10^{-4}$. Оценим значение допустимого радиуса измерительной катушки, предположив, что коэффициент при неучтенном члене десятого порядка равен 0,1 (практически он должен быть меньше). Тогда

$$0{,}1\,\frac{r^{10}}{R^{10}} \leqslant 10^{-4};\quad r \leqslant 0{,}5R.$$

Наибольший поправочный член шестого порядка в этом случае составит всего 0,078%, а восьмого порядка 0,005%.

Оценим погрешность, связанную с поправочным членом $\delta_2$, который для идеальных колец Гельмгольца должен быть равен нулю. Например, для многослойной обмотки образцовой меры I разряда магнитного потока значение $\Delta$ известно с погрешностью, во всяком случае не превышающей 0,1 *мм* при радиусе колец Гельмгольца 250 *мм*. Погрешность, вносимая квадратичным поправочным членом из-за неточности $\Delta$, будет $7{,}5\cdot10^{-5}\,r^2/R^2$, или при $r = 0{,}5R$ она равна $1{,}9\cdot10^{-5}$.

Если допустить, что $\Delta$ неизвестно, но не превосходит 0,5 *мм*, то и тогда погрешность будет меньше 0,01%. Таким образом, при создании образцовой меры магнитного потока в виде колец Гельмгольца с измерительной катушкой внутри целесообразно выбирать диаметр последней равным примерно половине радиуса колец. Следовательно, возможно создание многопредельной меры магнитного потока, постоянная которой может быть определена расчетом с погрешностью 0,003—0,006% по геометрическим размерам сменных однослойных измерительных катушек и постоянной для центра колец Гельмгольца. Действительно, при диаметре колец 40 *см* диаметр измерительной катушки — около 20 *см*.

Погрешность определения суммы площадей сечений всех витков катушки $\Delta S/S = 2\Delta r/r$ при $\Delta r = 2$ *мкм* составит 0,002%. Погрешность измерения постоянной колец Гельмгольца методом ядерного магнитного резонанса 0,003%.

---

* Учет последующих членов разложения не представляет трудностей.

До сих пор речь шла об однослойной измерительной цилиндрической катушке. Чтобы вычислить потокосцепление для многослойной катушки, проинтегрируем выражение (3) по $r$ в пределах толщины обмотки $2\xi$:

$$\Phi = \mu_0 H_0 \pi r_{\text{cp}}^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{3}\right) \left[1 + \frac{P_2 r_{\text{cp}}^2}{R^2} \left(A_2 - \frac{5}{6}\alpha^2 + \frac{14}{90}\alpha^4\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{0{,}144 r_{\text{cp}}^4}{R^4} (A_4 + 2{,}78\alpha^2) + 0{,}077 \frac{r_{\text{cp}}^6}{R^6} A_6 + \cdots \right], \qquad (10)$$

где $r_{\text{cp}}$ — средний радиус измерительной катушки; $\alpha = \xi / r_{\text{cp}}$; $A_4$, $A_6$ — обозначения в формуле (5) выражений в круглых скобках; $A_2 = {}^2/_3\gamma^2 - {}^1/_2$.

Поправка за счет $\xi$ будет пренебрежимо мала, если $\xi \ll r_{\text{cp}}$. Кроме того, из формулы (10) можно найти соотношение между $r_{\text{cp}}$, $l$ и $\xi$, при выполнении которого член четвертой степени этих величин обращался бы в нуль. Однако это целесообразно в том случае, когда $\xi$ сравнимо с $r_{\text{cp}}$. Заметим, что на выбор наибольшего радиуса измерительной катушки $\xi$ почти не влияет.

Остановимся теперь на выборе радиуса измерительной катушки при поверке рабочих мер напряженности магнитного поля индукционным методом с баллистическим гальванометром. Если принять погрешность поверки 0,5%, то погрешность, вносимая конечными размерами измерительной катушки( которая должна быть в два-три раза меньше погрешности поверки) составит 0,2%. При этом наибольшей будет погрешность, связанная с квадратичным членом. Поскольку неизвестно, с какой точностью были изготовлены поверяемые кольца Гельмгольца, иначе говоря, неизвестно значение $\Delta$, естественно предположить, что при изготовлении колец условия Гельмгольца выполнялись по возможности точно (это подтверждает практика). Ориентировочно будем считать, что для колец радиусом 10 *см* $\Delta = 0{,}3$ *мм*, для другого радиуса примем отношение $\Delta/R = 0{,}003$. Тогда, исходя из требования $\delta_2 \leqslant 2 \cdot 10^{-3}$, найдем допустимое значение радиуса измерительной катушки, которое оказывается больше радиуса колец Гельмгольца. Следовательно, поправка $\delta_2$ будет меньше 0,2% даже при $r = R$.

Исходя из выражения (7), определим допустимую погрешность изготовления поверяемых колец Гельмгольца, если $r = 0{,}5R$. Так как $\delta_2 = 0{,}187 \frac{\Delta r^2}{r^3} \leqslant 2 \cdot 10^{-3}$, то $\Delta/R \leqslant 0{,}043$, т. е. погрешность изготовления и измерения геометрических размеров колец может составлять около 4%. Если же применять измерительную катушку радиусом $r = 0{,}25R$, то отношение $\Delta/R$ может достигать 17%.

Проведенный анализ показывает, что кольца Гельмгольца даже при низкой точности их изготовления можно поверять индукционным методом с применением измерительных катушек радиусом, близким к радиусу поверяемых колец, без опасения внести погрешность, большую 0,2%. Обратим внимание на то обстоятельство, что поправки $\delta$ можно не вносить, когда $r \leqslant 0{,}6R$. Действительно, наибольший поправочный член

$$\delta_6 = 0{,}51 (0{,}6)^6 \approx 2 \cdot 10^{-3}.$$

В данной статье не рассмотрены погрешности, связанные с неточностью установки измерительной катушки в центре колец Гельмгольца. Теоретически возможно строгое рассмотрение влияния на результат измерений перекоса, параллельного или перпендикулярного смещения центра измерительной катушки относительно оси колец Гельмгольца. Однако этот вопрос связан со сложными вычислениями и должен быть изучен отдельно.

Предварительный анализ показал, что неточность ориентации измерительной катушки не приводит к заметным погрешностям. Так, параллельное смещение катушки относительно оси колец Гельмгольца на малую величину $\varepsilon$ с $\Delta = 0$ приводит к относительному изменению потока

$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi} = 3{,}46 \frac{\varepsilon^2 r^2}{R^4} \left(\frac{2}{3}\gamma^2 - \frac{1}{2}\right),$$

что, например при $r = 0{,}5R$, $R = 200$ *мм* и $\varepsilon = 1$ *мм*, дает поправку $< 0{,}001\%$. Примерно такие же поправки (погрешности) будут и при перпендикулярном перемещении измерительной катушки.

Если же оси измерительной катушки и колец Гельмгольца образуют малый угол $\varphi$, то это вызывает погрешность (в первом приближении), равную $\varphi^2/2$.

Таким образом, применение измерительных цилиндрических катушек большого диаметра $D$ и длиной $0{,}5308D$ позволяет, с одной стороны, увеличить потокосцепление при измерении постоянных колец Гельмгольца (что важно при поверке мер слабой напряженности магнитного поля), а с другой, открывает возможность создания расчетных многопредельных мер магнитного потока.

Поступила в редакцию
25.V 1967 г.

УДК 621.317.42.001.24 : 621.318.371

*И. В. СТУДЕНЦОВ, В. Я. ШИФРИН*
ВНИИМ

# РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СОЛЕНОИДА

В настоящее время имеется хорошо разработанная методика расчета мер напряженности магнитного поля в виде цилиндрических катушек [1]. Эти катушки широко применяют при магнитных и других измерениях во многих областях науки и техники. В метрологических работах, а также при постановке некоторых научных экспериментов или решении технических задач часто более выгодным оказывается применение катушек прямоугольного сечения. Например, в поверочной практике в качестве образцовых мер напряженности магнитного поля используют прямоугольные соленоиды *. Постоянную таких мер (напряженность магнитного поля меры при силе тока в обмотке катушки 1 *а*) определяют только экспериментальным путем, так как методика их расчета неизвестна.

Отсутствие расчетных формул делает невозможным конструирование мер напряженности с заданным значением их постоянной.

В работе [2] получены формулы для расчета напряженности магнитного поля прямоугольного соленоида с бесконечно тонкой обмоткой, но из-за своей громоздкости они не представляют практического интереса.

Ниже дается вывод достаточно простых соотношений для расчета напряженности магнитного поля однослойного и многослойного соленоидов.

Вычислим напряженность поля, создаваемую бесконечно тонким прямоугольным витком в точке $P$ (рис. 1), имеющей координаты $x$, $y$ ($z = 0$) в системе координат, начало которой удалено от его плоскости на расстояние $l$. При этом направление $z$ совпадает с осью витка. Для удобства рассмотрения разделим прямоугольный виток на четыре части ($I$, $II$, $III$, $IV$), так, чтобы линии раздела были параллельны его сторонам, а точка их пересечения являлась проекцией точки $P$ на плоскость витка. Основываясь на законе Био—Саварра, выразим составляющие напряженности магнитного поля через параметры прямоугольного витка $a$ и $в$, координаты $x$, $y$ и расстояние $l$:

$$\left.\begin{aligned} H_{zI} &= \varphi(a-x,\ b-y,\ l) + \varphi(b-y,\ a-x,\ l);\\ H_{zII} &= \varphi(a-x,\ b+y,\ l) + \varphi(b+y,\ a-x,\ l);\\ H_{zIII} &= \varphi(a+x,\ b+y,\ l) + \varphi(b+y,\ a+x,\ l);\\ H_{zIV} &= \varphi(a+x,\ b-y,\ l) + \varphi(b-y,\ a+x,\ l);\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

* Прямоугольным соленоидом будем называть длинную катушку с прямоугольными витками и равномерной плотностью обмотки.

$$\left.\begin{aligned} H_{xI} = f(a-x,\ b-y,\ l);\ H_{xII} = f(a-x,\ b+y,\ l); \\ H_{xIII} = -f(a+x,\ b+y,\ l);\ H_{xIV} = -f(a+x,\ b-y,\ l); \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} H_{yI} = -f(b-y,\ a-y,\ l);\ H_{yII} = f(b+y,\ a-x,\ l); \\ H_{yIII} = f(b+y,\ a+x,\ l);\ H_{yIV} = -f(b-y,\ a+x,\ l), \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

где $H_{zI} - H_{zIV}$ — осевые составляющие напряженности магнитного поля $I$—$IV$ частей витка; $\varphi$ и $f$ — функции произвольных переменных $u$, $v$, $l$ соответствующего вида:

$$\varphi(u,\ v,\ l) = \frac{I}{4\pi}\cdot\frac{uv}{(u^2+l^2)\sqrt{u^2+v^2+l^2}};$$

$$f(u,\ v,\ l) = \frac{I}{4\pi}\cdot\frac{vl}{(u^2+l^2)\sqrt{u^2+v^2+l^2}};$$

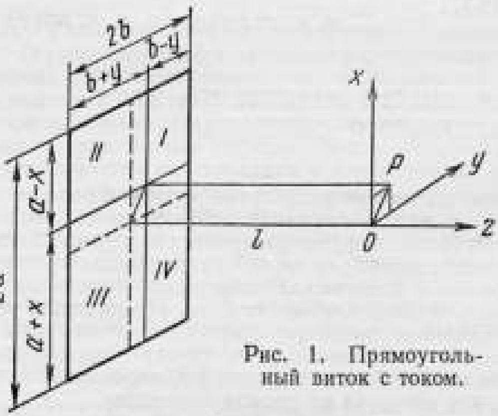


Рис. 1. Прямоугольный виток с током.

$H_{yI} - H_{yIV}$, $H_{xI} - H_{xIV}$ — поперечные составляющие напряженности поля;

$I$ — сила тока.

Каждая из составляющих $H_z$, $H_x$ и $H_y$ может быть найдена как сумма четырех слагаемых $H_{zI} - H_{zIV}$, $H_{xI} - H_{xIV}$ и $H_{yI} - H_{yIV}$.

Для вычисления напряженности магнитного поля прямоугольного соленоида с $w$ витками и длиной $2L$ необходимо проинтегрировать выражения (1)—(3) по всей длине обмотки.

Пусть точка, в которой вычисляется напряженность, имеет координаты $x$, $y$ и $z$, т. е. расположена на расстоянии $z$ от плоскости $xy$, проходящей через центр симметрии соленоида. В этом случае будем интегрировать в пределах от $-(L-z)$ до $+(L+z)$. Таким образом получим соотношения для каждой из составляющих напряженности магнитного поля в любой точке пространства, имеющей координаты $x$, $y$, $z$, начало которых расположено в центре соленоида:

$$H_z = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{Iw}{2L}\int\limits_{-(L-z)}^{L+z}\sum_{i=I}^{IV} H_{zi}\,dl \equiv \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{Iw}{2L}\Phi(a,\ b,\ x,\ y,\ l)\Bigg|_{-(L-z)}^{L+z}; \quad (4)$$

$$H_x = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{Iw}{2L}\int\limits_{-(L-z)}^{L+z}\sum_{i=I}^{IV} H_{xi}\,dl \equiv \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{Iw}{2L}F(a,\ b,\ x,\ y,\ l)\Bigg|_{-(L-z)}^{L+z}; \quad (5)$$

$$H_y = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{Iw}{2L}\int\limits_{-(L-z)}^{L+z}\sum_{i=I}^{IV} H_{yi}\,dl \equiv \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{Iw}{2L}F(b,\ a,\ x,\ y,\ l)\Bigg|_{-(L-z)}^{L+z}. \quad (6)$$

Так как наибольший интерес представляет распределение напряженности магнитного поля в центральной области соленоида, т. е. в точках, где $x, y, z < a, b, L$, то формулы (4)—(6) после интегрирования можно представить в виде быстро сходящихся степенных рядов $x$, $y$, $z$.

Для определения осевой составляющей напряженности магнитного поля соленоида достаточно написать функцию Ф в развернутом виде и подставить пределы интегрирования. При этом окажется, что все слагаемые имеют одинаковый вид и различаются лишь знаками при координатах $x$, $y$, $z$. Поэтому при разложении в ряд функции Ф воспользуемся производными только от одного из интегралов, например от $H_{z1}$ в выражении (1):

$$H_{z1} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{Iw}{2L} \left( \operatorname{arctg} \frac{L_1 b_1}{a_1 \sqrt{L_1^2 + a_1^2 + b_1^2}} + \operatorname{arctg} \frac{L_2 a_1}{b_1 \sqrt{L_2^2 + a_1^2 + b_1^2}} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{arctg} \frac{L_2 b_1}{a_1 \sqrt{L_2^2 + a_1^2 + b_1^2}} + \operatorname{arctg} \frac{L_1 a_1}{b_1 \sqrt{L_1^2 + a_1^2 + b_1^2}} \right), \tag{7}$$

где $L_1 = L - z$; $L_2 = L + z$.

Анализируя выражения (1), легко заметить, что в разложении будут присутствовать только члены с четными степенями координат, а получение вторых производных от функции Ф сводится к получению второй производной от первых двух членов (в круглых скобках формулы (7)]. При этом смешанные производные $\Phi''_{xz}\Phi''_{yz}$, $\Phi''_{xy}$, а также все члены с нечетными степенями $z$ обратятся в нуль.

Таким образом, осевая составляющая

$$H_z = \frac{wI}{\pi L} \left( A_0 + A_{zz} \frac{z^2}{L^2} + A_{xx} \frac{x^2}{L^2} + A_{yy} \frac{y^2}{L^2} + \cdots \right); \tag{8}$$

здесь

$$A_0 = \frac{\Phi(a, b, L, 0, 0, 0)}{8};$$

$$A_{xx} = \frac{\Phi''_{xx}(a, b, L, 0, 0, 0)}{2!\,8} L^2;$$

$$A_{zz} = \frac{\Phi''_{zz}(a, b, L, 0, 0, 0)}{2!\,8} L^2$$

$$A_{yy} = \frac{\Phi'_{yy}(a, b, l, 0, 0, 0)}{2!\,8} L^2.$$

Поскольку составляющие напряженности поля должны удовлетворять уравнению Лапласа, то

$$A_{zz} = -(A_{xx} + A_{yy}). \tag{9}$$

Тогда выражение (8) с учетом соотношения (9) примет вид

$$H_z = \frac{wI}{\pi L} \left( A_0 + A_{xx} \frac{x^2 - z^2}{L_2} + A_{yy} \frac{y^2 - z^2}{L^2} + \cdots \right). \tag{10}$$

При этом

$$A_0 = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}}{\alpha\beta}; \tag{11}$$

$$A_{xx} = \frac{\alpha\beta(3 + 3\alpha^2 + 2\beta^2)}{2(1 + \alpha^2 + \beta^2)^{3/2}(1 + \alpha^2)^2}; \tag{12}$$

$$A_{yy} = \frac{\alpha\beta(3 + 2\alpha^2 + 3\beta^2)}{2(1 + \alpha^2 + \beta^2)^{3/2}(1 + \beta^2)^2}, \tag{13}$$

где

$$\alpha = a/L; \quad \beta = b/L.$$

Формулы для расчета поперечных составляющих напряженности можно получить, взяв за основу функции $f$ в формулах (2) и (3), которые являются производными от функций $F$ в (5) и (6). Разложив одну из функций $F$ в степенной ряд по координатам $x$, $y$, $z$ и ограничившись членами разложения второго порядка (взяв по существу первые производные от $f$), получим:

$$H_x = \frac{16Iw}{\pi L} A_{xx} \frac{xz}{L^2} + \cdots; \tag{14}$$

$$H_y = \frac{16Iw}{\pi L} A_{yy} \frac{yz}{L^2} + \cdots \tag{15}$$

Коэффициенты $A_{xx}$ и $A_{yy}$ находим по формулам (12) и (13). Как видно из выражений (10), (14) и (15), однородность магнитного поля определяется $A_{xx}$ и $A_{yy}$, которые для квадратного соленоида становятся одинаковыми ($\alpha = \beta$).

На практике обычно применяют не однослойные, а многослойные соленоиды. При расчете напряженности магнитного поля такого соленоида необходимо учитывать толщину его обмотки. Если толщина значительно меньше его линейных размеров, то изменение коэффициентов $A_0$, $A_{xx}$ и $A_{yy}$ несущественно. Поэтому каждый из этих коэффициентов можно представить в виде суммы коэффициента для бесконечно тонкой обмотки и поправки, определяемой толщиной обмотки. Поскольку в формуле (10) члены, в которые входят множителями координаты $x$, $y$, $z$, малы, то изменением $A_{xx}$ и $A_{yy}$ можно пренебречь и учесть только изменение коэффициента $A_0$, определяющего напряженность магнитного поля в центре соленоида.

Формулу для осевой составляющей многослойного соленоида легко вывести, разложив функцию $A_0(a, b, L)$ в ряд Тейлора по приращению сторон $a$ и $b$ на некоторую величину $u$. Взяв интеграл от полученного ряда по сечению обмотки, найдем

$$\frac{w_1}{2h} \int\limits_{-h}^{+b} A(a+u,\ b+u,\ L)\, du = w_1 \left[ A_0 + (A_{xx} + A_{yy}) \frac{h^2}{3L^2} + \cdots \right], \tag{16}$$

где $w_1$ — число слоев обмотки соленоида; $2h$ — толщина обмотки.

С учетом выражения (16) осевая составляющая многослойного прямоугольного соленоида

$$H_x = \frac{wI}{\pi L} A_0 \left( 1 + \frac{A_{xx} + A_{yy}}{3A_0} \cdot \frac{h^2}{L^2} + \frac{A_{xx}}{A_0} \cdot \frac{x^2 - z^2}{L^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{A_{yy}}{A_0} \cdot \frac{y^2 - z^2}{L^2} + \cdots \right), \tag{17}$$

где $w$ — общее число витков соленоида.

Для квадратной катушки, когда $A_{xx} = A_{yy} = A$, $\alpha = \beta$,

$$H_z = \frac{wI}{\pi L} A_0 \left( 1 + \frac{2A}{3A_0} \cdot \frac{h^2}{L^2} - \frac{A}{A_0} \cdot \frac{2z^2 - \rho^2}{L^2} + \cdots \right), \tag{18}$$

здесь

$$A_0 = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 + 2\alpha^2}}{\alpha^2}; \quad A = \frac{\alpha^2 (5\alpha^2 + 3)}{2(1 + \alpha^2)^2 (2\alpha^2 + 1)^{3/2}}; \quad \rho = x^2 + y^2.$$

На рис. 2 представлены графики зависимостей коэффициентов $A_0$, $\frac{A_{xx}}{A_0}$, $\frac{A_{yy}}{A_0}$, $\frac{A_{xx} + A_{yy}}{3A_0}$ от параметров $\alpha$ и $\beta$. Такие графики удобны для быстрого определения параметров прямоугольного соленоида, обеспечивающего заданную однородность магнитного поля.

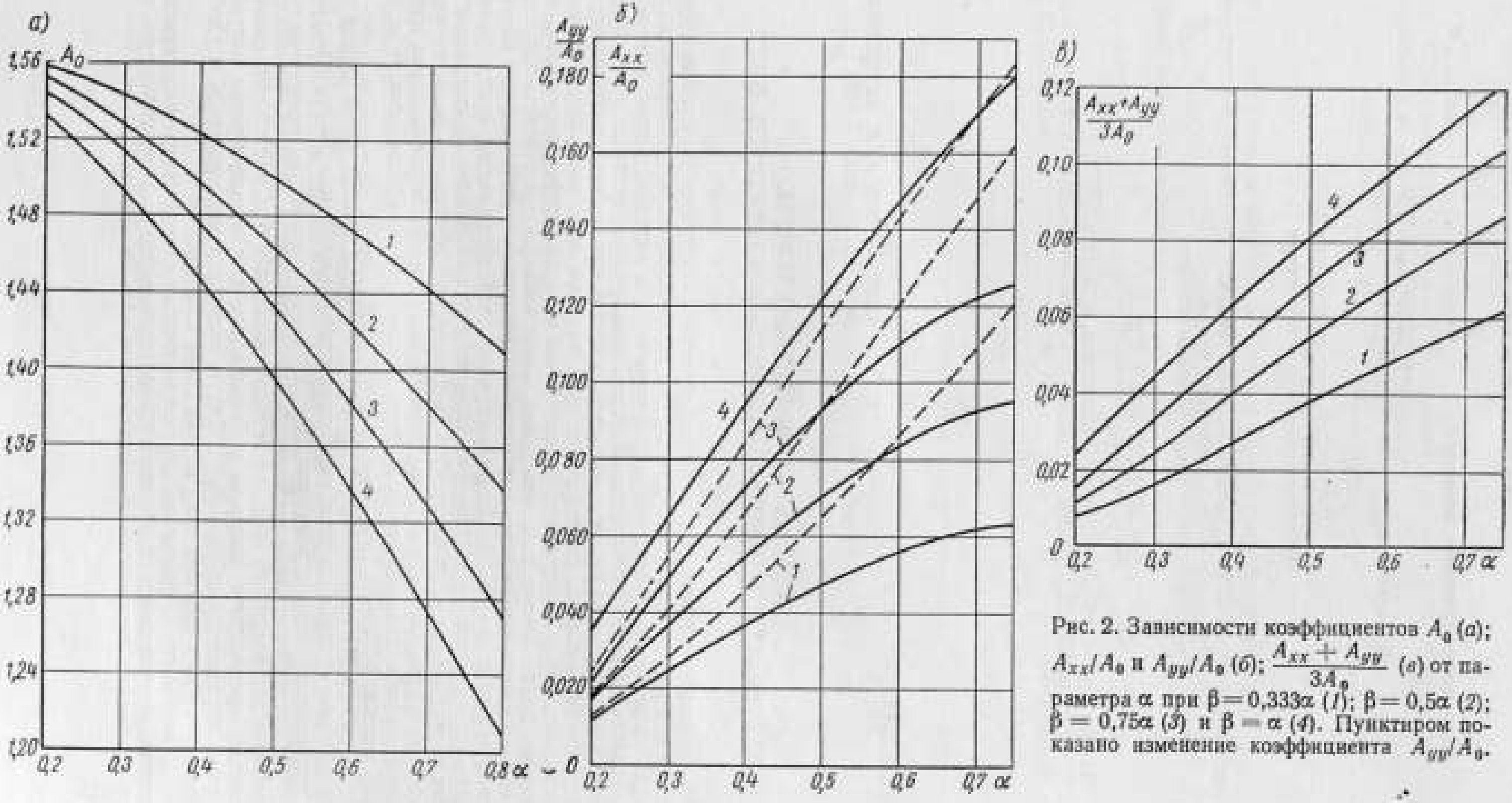


Рис. 2. Зависимости коэффициентов $A_0$ (*а*); $A_{xx}/A_0$ и $A_{yy}/A_0$ (*б*); $\frac{A_{xx}+A_{yy}}{3A_0}$ (*в*) от параметра α при β = 0,333α (*1*); β = 0,5α (*2*); β = 0,75α (*3*) и β = α (*4*). Пунктиром показано изменение коэффициента $A_{yy}/A_0$.

В заключение приведем формулу

$$H_z = \frac{Iw}{2\pi L}\left[\operatorname{arctg}\frac{(L-z)\sqrt{(L-z)^2+a^2+b^2}}{ab} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{arctg}\frac{(L+z)\sqrt{(L+z)^2+a^2+b^2}}{ab}\right],$$

которая позволяет рассчитать осевую составляющую напряженности магнитного поля однослойного соленоида в любой точке на его оси.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Я н о в с к и й Б. М. Земной магнетизм, ч. 2. Изд. ЛГУ, 1963.
2. П е к е р И. И. Применение аналитического метода для исследования однородности магнитного поля прямоугольной катушки. Известия вузов, 1958, № 6.

Поступила в редакцию 3. III 1967 г.

УДК 538.12 : 621.318.4

*Т. Н. МАЛЯРЕВСКАЯ, Н. В. СТУДЕНЦОВ*
ВНИИМ

# СИСТЕМА КВАДРАТНЫХ КАТУШЕК ДЛЯ СОЗДАНИЯ ВЫСОКООДНОРОДНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Наибольшую однородность магнитного поля обеспечивают катушки со сферической или эллипсоидальной обмоткой [1], однако они сложны в изготовлении и неудобны в эксплуатации, так как доступ внутрь катушки закрыт обмоткой. В практике обычно используют катушки, конструкция которых обеспечивает свободный доступ в их центральную область. Среди них особенно распространены катушки Гельмгольца, состоящие из двух круглых или квадратных секций, расстояние между которыми выбирают таким образом, чтобы однородность магнитного поля в центре была наилучшей. Более высокую однородность получают с помощью двух пар круглых или квадратных катушек с соответственно рассчитанными размерами [2, 3]. Частным случаем такой конструкции можно считать систему из трех катушек. Примером является катушка Максвелла, состоящая из трех колец, вписанных в сферу. Она дает высокую однородность поля, но изготовление и использование ее вследствие значительного различия размеров колец сложно. Кроме того, минимальное число витков в катушке Максвелла не может быть меньше 152.

В работе [4] предлагается более удобная с практической точки зрения система из трех круглых катушек, радиусы которых различаются меньше, чем на 2%, а минимальное число витков всего 5.

При разработке мер напряженности большого размера, которые необходимы, например для получения «бесполевого» пространства в большом объеме, следует отдавать предпочтение системам из квадратных или прямоугольных катушек с мало отличающимися размерами. Такую систему легко изготовить и удобно размещать вдоль стен или даже внутри стены комнаты.

В данной статье рассчитаны параметры системы из трех квадратных катушек, размеры которых почти одинаковы, а однородность магнитного поля такая же, что и у системы из двух пар квадратных катушек разного размера [3].

Магнитный потенциал в точке $P$ (рис. 1), создаваемый двумя квадратными катушками с бесконечно тонким сечением обмотки, выражается в цилиндрических координатах $\rho$, $\varphi$ и $z$ соотношением [3]

$$V = -\frac{Iw}{2\pi}\left(\frac{1}{a}Az + \frac{1}{3a^3}Bv_2 + \frac{1}{10a^5}C_1v_{41} + \frac{1}{6a^5}C_2v_{42} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{35a^7}D_1v_{61} + \frac{1}{105a^7}D_2v_{62} + \cdots\right), \qquad (1)$$

где $I$ — сила тока в обмотке; $w$ — число витков в катушке; $A$, $B$, $C$, $C_1$, $C_2$, $D_1$, $D_2$ — коэффициенты, определяемые геометрическими размерами катушки; $v_2$, $v_4$, $v_{41}$, $v_{61}$, $v_{62}$ — полиномы цилиндрических координат $\sigma$, $\varphi$ и $z$.

Если обозначить $2a$ сторону квадрата, образующего катушку, а $2d$ — расстояние между катушками, то

$$\left.\begin{aligned}
&A = \frac{8}{(1+\beta)(1+\beta)^{1/2}}; \quad B = \frac{4(10 - 22\beta - 36\beta^2 - 12\beta^3)}{(1+\beta^3)(2+\beta)^{5/2}};\\
&C_1 = -\frac{172 - 1408\beta - 2712\beta^2 - 1120\beta^3 + 580\beta^4 + 560\beta^5 + 120\beta^6}{(1+\beta)^3(2+\beta)^{9/2}};\\
&C_2 = -\frac{30(1-3\beta)}{(2+\beta)^{9/2}};\\
&D_1 = -\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{(1+\beta)(2+\beta)^{13/2}}\Big[(1 - 21\beta + 35\beta^2 - 7\beta^3)\times\\
&\times\Big(1890 + 8505\frac{1}{1+\beta} + 17\,010\frac{1}{(1+\beta)^2} + 19\,305\frac{1}{(1+\beta)^3} +\\
&+ 12\,870\frac{1}{(1+\beta)^4} + 4680\frac{1}{(1+\beta)^5} + 720\frac{1}{(1+\beta)^6}\Big) -\\
&- \frac{1}{(1+\beta)^2}100\beta + 4825\beta^2 - 9450\beta^3 - 4725\beta^4 + 1890\beta^5)\Big];\\
&D_2 = -\frac{5}{2}\cdot\frac{11 - 120\beta + 72\beta^2}{(2+\beta)^{13/2}},
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где $\beta = \frac{d^2}{a^2}$.

Полиномы координат будут:

$$\left.\begin{aligned}
&v_2 = z(3\rho^2 - z^2); \quad v_{41} = z[5\rho^4(0{,}5\sin^2 2\varphi - 1) + 10\rho^2z^2 - 2z^4];\\
&v_{42} = z\rho^4(2\sin^2 2\varphi - 1); \quad v_{61} = z[7\rho^6(0{,}75\sin^2 2\varphi - 1) -\\
&- 35\rho^4(0{,}5\sin^2 2\varphi - 1)z^2 - 21\rho^2z^4 + 2z^6];\\
&v_{62} = z[7\rho^6(4{,}5\sin^2 2\varphi - 1) - 105\sin^2 2\varphi\rho^4z^2 + 42\rho^2z^4 - 4z^6].
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Образуем систему из трех квадратных катушек (рис. 2): средней с числом витков $w_1$ и стороной квадрата $2a_1$ и двух одинаковых крайних, каждая из которых содержит по $w_2$ витков и имеет сторону квадрата $2a_2$; расстояние между крайними катушками $2d_2$. Поскольку для средней катушки $d = 0$, то магнитный потенциал при согласном направлении тока в обмотках всех трех катушек будет

$$V = -\frac{I}{2\pi}\left\{\left[\frac{w_1}{2a_1}A(0) + \frac{w_2}{a_2}A(\beta)\right]z + \frac{1}{3}\left[\frac{w_1}{2a_1^3}B(0) + \frac{w_2}{a_2^3}B(\beta)\right]v_2 + \right.$$
$$+ \frac{1}{10}\left[\frac{w_1}{2a_1^5}C_1(0) + \frac{w_2}{a_2^5}C_1(\beta)\right]v_{41} + \frac{1}{6}\left[\frac{w_1}{2a_1^5}C_2(0) + \frac{w_2}{1a_2^5}C_2(\beta)\right]v_{42} +$$

$$+\frac{1}{35}\left[\frac{w_1}{2a_1^7} D_1(0)+\frac{w_2}{2a_2^7} D_1(\beta)\right] v_{61}+$$

$$\left.+\frac{1}{105}\left[\frac{w_1}{2a_1^7} D_2(0)+\frac{w_2}{a_2^7} D_2(\beta)\right] v_{62}+\cdots\right\}. \qquad (4)$$

Согласно формулам (2) при $\beta = 0$ коэффициенты равны:

$$\left.\begin{array}{ll} A(0)=4\sqrt{2}; & C_2(0)=-\dfrac{15}{8\sqrt{2}}; \\ B(0)=5\sqrt{2}; & D_1(0)=-\dfrac{1805}{64\sqrt{2}}; \\ C_1(0)=-\dfrac{43}{4\sqrt{2}}; & D_2(0)=-\dfrac{55}{128\sqrt{2}}. \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Однородность магнитного поля будет наилучшей, если коэффициенты при полиномах координат $v_2$, $v_{41}$ и $v_{42}$ в выражении (4) равны нулю. Тогда разложение

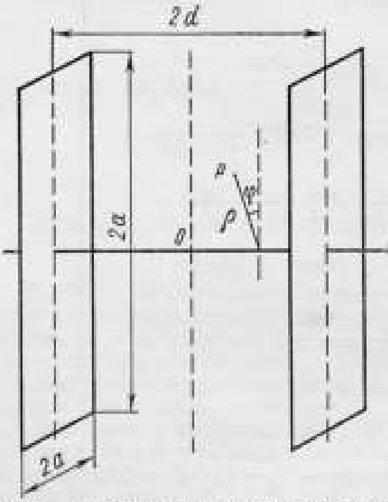


Рис. 1. Система из двух квадратных катушек.

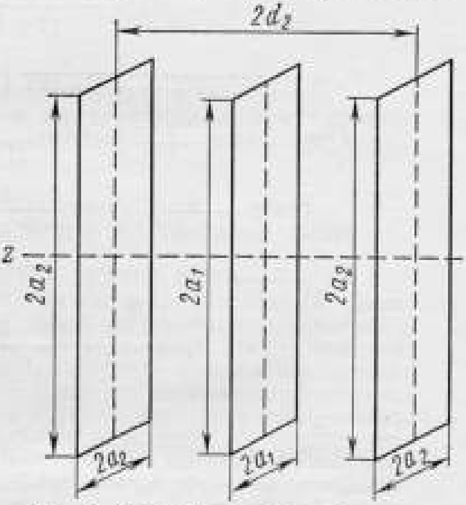


Рис. 2. Система из трех квадратных катушек.

по степеням координат начнется только с членов седьмого порядка, а условие однородности сведется к системе уравнений:

$$\frac{w_2}{w_1}\cdot\frac{1}{\gamma^3}\cdot\frac{10-22\beta-36\beta^2-12\beta^3}{(1+\beta)^3(2+\beta)^{5/2}}+\frac{5}{4\sqrt{2}}=0; \qquad (6)$$

$$\frac{w_2}{w_1}\cdot\frac{1}{\gamma^5}\cdot\frac{1-3\beta}{(2+\beta)^{9/2}}+\frac{1}{32\sqrt{2}}=0; \qquad (7)$$

$$\frac{w_2}{w_1}\cdot\frac{1}{\gamma^5}\cdot\frac{172-1408\beta-2712\beta^2-1120\beta^3+580\beta^4+560\beta^5+120\beta^6}{(1+\beta)^5(2+\beta)^{9/2}}+\frac{43}{8\sqrt{2}}=0, \qquad (8)$$

где $\gamma=\dfrac{a_2}{a_1}$.

Из выражений (7) и (8) следует, что $\beta$ должно удовлетворять уравнению

$$4{,}38 + 4{,}63\beta - 5{,}80\beta^2 - 12{,}20\beta^3 - 7{,}42\beta^4 - 1{,}59\beta^5 = 0, \qquad (9)$$

решение которого дает значение $\beta_0 = 0{,}65283244$ или

$$\frac{d_2}{a_2} = \sqrt{\beta_0} = 0{,}80798047.$$

Из уравнений (6) и (7) найдем выражение, связывающее $\gamma$ и $\beta$:

$$\gamma^2 = \frac{40\,(1+\beta)^3\,(1-3\beta)}{(10-22\beta-36\beta^2-12\beta^3)\,(2+\beta)^2}. \qquad (10)$$

Подставив в (10) значение $\beta_0$, получим $\gamma_0 = 1{,}03319095$. Используя формулы (6)—(8) и значения $\beta_0$ и $\gamma_0$, легко рассчитать соотношение витков средней и крайней катушек:

$$\frac{w_1}{w_2} = -\frac{2B\,(\beta_0)}{\gamma^3 B\,(0)} = 0{,}4567291. \qquad (11)$$

Полученное значение необходимо представить в виде отношения двух натуральных чисел, причем, чем меньше эти числа, тем удобнее будет система с точки зрения выбора наименьшего суммарного числа витков. Естественно, что выбранные числа не могут точно удовлетворять равенству (11). Однако, если это приближение в относительных единицах будет отличаться от значения 0,4567291 примерно на величину погрешности изготовления катушки, то оно несущественно скажется на однородности магнитного поля реальной катушки.

Приведем отношения, близкие к 0,4567291, некоторых натуральных чисел:

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= \frac{16}{35} = 0{,}4571425; & n_3 &= \frac{21}{46} = 0{,}4565217; \\ n_2 &= \frac{15}{33} = 0{,}4545455; & n_4 &= \frac{37}{81} = 0{,}4567901. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Последнее приближение отличается от требуемого (11) на 0,013%. Таким образом, если взять для средней катушки $37k$ витков, а для крайней $81k$ (где $k = 1, 2, 3\ldots$), то условие однородности будет выполнено с соответствующей степенью приближения.

Условия однородности можно выполнить более точно, пропуская по средней и крайним катушкам разные токи. Практически это легко осуществить, когда число витков в средней катушке несколько больше, чем требует условие (11).

Действительно, если при составлении уравнений однородности (6)—(8) не считать токи во всех трех катушках равными, то

$$\frac{I_1 w_1}{I_2 w_2} = 0{,}4567291 \equiv n_0, \qquad (13)$$

Взяв произвольное соотношение витков, можно вычислить необходимое соотношение токов. Когда число витков в средней катушке больше $0{,}4567291\,w_2$, необходимого соотношения токов добиваются шунтированием средней катушки высокоомным сопротивлением.

Для примера рассчитаем соотношение токов при $n_1 = 16/35$ и $n_4 = 37/81$. Представив соотношение витков как $n = n_0\,(1+x)$, где $x = \dfrac{n_0 - n}{n_0}$, согласно условию (13) получим

$$I_1 = \frac{I_2}{1+x}. \qquad (14)$$

С другой стороны, при шунтировании сопротивлением $r_ш$ средней обмотки, имеющей сопротивление $r$,

$$I_1 = \frac{I_1}{1 + r/r_ш}. \qquad (15)$$

Сопоставление формул (14) и (15) дает $r_{ш} = r/x$. Вычислив $x$, для соотношений витков $n_1$ и $n_2$ найдем: $x_1 = 9{,}06 \cdot 10^{-4}$ и $x_2 = 1{,}345 \cdot 10^{-4}$. Поскольку $x < 0{,}1\%$, то шунтирующее сопротивление достаточно подобрать с погрешностью 1%, чтобы реальное соотношение ампер-витков отличалось от идеального менее чем на 0,001%.

Составляющие напряженности магнитного поля в параллельном $H_z$ и перпендикулярном $H_\rho$ направлениях к оси катушки с параметрами $\gamma_0$, $\beta_0$, $n_0$ будут:

$$H_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{w_2}{a_2} \left[n_0\gamma_0 A(0) + 2A(\beta_0)\right] \times$$

$$\times \left\{1 + \frac{1}{35a_2^6}\left[\frac{n_0\gamma_0^7 D_1(0) + 2D_1(\beta_0)}{n_0\gamma_0 A(0) + 2A(\beta_0)} \cdot \frac{\partial v_{61}}{\partial z} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{3} \cdot \frac{n_0\gamma_0^7 D_2(0) + 2D_2(\beta_0)}{n_0\gamma_0 A(0) + 2A(\beta_0)} \cdot \frac{\partial v_{62}}{\partial z} + \cdots\right\}; \qquad (16)$$

$$H_\rho = -\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{w_2}{a_2^7} \cdot \frac{1}{35}\left\{\left[n_0\gamma_0^7 D_1(0) + 2D_1(\beta_0)\right]\frac{\partial v_{61}}{\partial \rho} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}\left[n_0\gamma_0^7 D_2(0) + 2D_2(\beta_0)\right]\frac{\partial v_{62}}{\partial \rho} + \cdots\right\}, \qquad (17)$$

где

$$\frac{\partial v_{61}}{\partial z} = 7\left[(0{,}75 \sin^2 2\varphi - 1)\rho^6 - 15(0{,}5 \sin^2 2\varphi - 1)\rho^4 z^2 - 15\rho^2 z^4 + 2z^6\right];$$

$$\frac{\partial v_{62}}{\partial z} = 7\left[(0{,}45 \sin^2 2\varphi - 1)\rho^6 - 45 \sin^2 \varphi\rho^4 z^2 + 30\rho^2 z^4 - 4z^6\right];$$

$$\frac{\partial v_{61}}{\partial \rho} = 14\rho z\left[3(0{,}75 \sin^2 2\varphi - 1)\rho^4 - 10(0{,}5 \sin^2 2\varphi - 1)\rho^2 z^2 - 3z^4\right];$$

$$\frac{\partial v_{62}}{\partial \rho} = 42\rho z\left[(4{,}5 \sin^2 2\varphi - 1)\rho^4 - 10 \sin^2 2\varphi\rho^2 z^2 + 2z^4\right].$$

Постоянные коэффициенты равны:

$A(0) = 5{,}656852$; $D_1(0) = -19{,}9426$; $D_2(0) = -0{,}3038$;

$A(\beta_0) = 2{,}971709$; $D_1(\beta_0) = -0{,}1644$; $D_2(\beta_0) = 0{,}1614$.

Принимая во внимание значения остальных коэффициентов в формулах (5), получим:

$$\left.\begin{aligned} &n_0\gamma_0 A(0) + 2A(\beta_0) = 8{,}1612819;\\ &n_0\gamma_7^0 D_1(0) + 2D_1(\beta_0) = -11{,}7762;\\ &n_0\gamma_0^7 D_2(0) + 2D_2(\beta_0) = 0{,}1484. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Подстановка постоянных коэффициентов в выражения (16) и (17) дает:

$$H_z = \frac{4{,}306410}{2\pi} \cdot \frac{w_2}{a_2}\left\{1 - \frac{1}{5a_2^6}\left[1{,}36(0{,}73 \sin^2 2\varphi - 1)\rho^6 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 20{,}51(0{,}49 \sin^2 2\varphi - 1)\rho^4 z^2 - 20{,}68\rho^2 z^4 + 2{,}76z^6\right] + \cdots\right\}; \qquad (19)$$

$$H_\rho = -\frac{5I}{2\pi}\cdot\frac{w_2}{a_2^7}\rho z\,\{[1{,}41\,(0{,}73\sin^2 2\varphi - 1)\,\rho^4 -$$

$$- 4{,}71\,(0{,}49\sin^2 2\varphi - 1)\,\rho^2 z^2 - 1{,}42 z^4] + \cdots\}. \qquad (20)$$

Рассчитанная катушка обеспечивает высокую однородность магнитного поля Так, напряженность магнитного поля в точке, расположенной на оси катушки и отстоящей от центра на расстоянии $0{,}1a_2$, отличается от напряженности в центре всего лишь на 0,00003%, в то время как для известной катушки Гельмгольца это отличие составляет 0,01%.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Everett J. E., Osemeikhian I. E. «I. sci. instrum», 1966, v. 43, № 7, p. 470.
2. Fanselau G. «Zs. Phys»., 1929, Bd. 54, s. 260.
3. Fanselau G., Kautzleben H. Abhandl. Geomagn. Inst., Potsdam, 1958, № 21, s. 45.
4. Студенцов Н. В. Трехсекционная катушка для создания магнитного поля высокой однородности. Труды институтов Комитета, вып. 93 (153). Изд-во стандартов, 1967.


Поступила в редакцию 19.1.1967 г.

**УДК 539.125.4.088**

*Н. В. СТУДЕНЦОВ, В. Я. ШИФРИН*

ВНИИМ

# ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ЧАСТОТЫ СВОБОДНОЙ ПРЕЦЕССИИ ПРОТОНОВ

При анализе ядерных магнитометров обычно учитывают погрешности определения гиромагнитного отношения протона, частоты образцового генератора и отсчета частоты свободной прецессии протонов частотомером, а также погрешность, обусловленную конечным отношением сигнала к шуму. Погрешности же, связанные с экспоненциальным убыванием амплитуды измеряемого сигнала, как правило, не рассматриваются, хотя они и достигают больших значений, превышающих все прочие погрешности, если при конструировании аппаратуры не были приняты соответствующие меры.

Эффект затухания проявляется прежде всего в изменении $\Delta t$ интервала времени счета $t$ частоты прецессии $\omega$ (если этот интервал формируется из определенного числа периодов сигнала) вследствие различия начальной $U_н$ и конечной $U_к$ амплитуд измеряемого сигнала.

Действительно, если известны амплитуды $U_н$ и $U_к$, а также уровень запуска напряжения формирующего устройства $U_з$, то с помощью степенного ряда легко вычислить погрешность измерения $\omega$, обусловленную неточностью формирования интервала времени счета (см. рисунок):

$$\frac{\Delta t}{t} = \frac{t_2 - t_1}{t} = \frac{1}{\omega t}\cdot\frac{U_з}{U_к}\left(1 - \frac{U_к}{U_н}\right). \qquad (1)$$

Измерение частоты прецессии протонов в магнитном поле Земли на аппаратуре с параметрами $U_к/U_н = U_з/U_к = 0{,}5$ сопровождается погрешностью $\Delta t = 2\cdot 10^{-5}$ *сек*, что при $t = 0{,}5$ *сек* составляет 0,004%.

Эффект затухания может привести также к погрешности, возникающей в результате сдвига фазы измеряемого переменного напряжения (за время формирования импульса) усилителем сигнала прецессии. Дело в том, что любой активный четырехполюсник содержит элементы, которые в той или иной степени нелинейны. Поэтому фаза на его выходе всегда зависит от амплитуды входного напряжения.

Наибольший сдвиг фазы наблюдается при использовании в усилителях настроенных контуров с ферромагнитными сердечниками и, в особенности, когда эти контуры находятся в анодной цепи лампы и применяются как умножители. В последнем случае лампа работает всегда на линейном участке своей характеристики, вследствие чего изменяется ее постоянный ток. Изменение тока определяется амплитудой входного напряжения на аноде лампы и приводит к изменению $\Delta L$ индуктивности контура $L$. Зависимость сдвига фазы $\Delta\varphi$ от $\Delta L$ определяется формулой

$$\Delta\varphi = -\frac{\Delta L}{L} Q, \qquad (2)$$

где $Q$ — добротность контура.

Очевидно, что

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta\mu}{\mu} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\Delta I}{I}; \qquad (3)$$

здесь $\Delta\mu$ и $\Delta I$ — изменение проницаемости $\mu$ сердечника и анодного тока $I$ лампы (или коллекторного тока транзистора).

Коэффициент $\alpha$, зависящий от типа ферромагнитного материала и исходного значения напряженности намагничивающего поля может достигать 1,5 (например, $H = 80$ *а/м* для ферритов марки 50ВЧ $\alpha = 0{,}2$, а марки 1500НМЗ $\alpha = 1{,}5$).

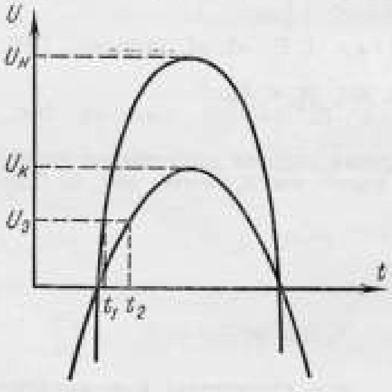

Рис. 1. Изменение момента $t$ запуска формирующего устройства в зависимости от амплитуды $U$ сигнала.

На практике за время измерения частоты ядерной прецессии отношение $\frac{\Delta I}{I}$ может составлять около 0,02%, что при $\alpha = 0{,}5$ и $Q = 50$ приводит к сдвигу фазы $\Delta\varphi = 0{,}5$ (около 0,1 периода), который при измерении 1000 периодов дает погрешность 0,008% ($H = 40$ *а/м*).

Как показали эксперименты, погрешности, связанные с применением настроенных контуров в схемах с последовательным умножением частоты, могут достигать 0,01%.

При отсутствии в усилительном тракте каскадов с ферромагнитным сердечником, когда активные элементы работают на нелинейных участках своих характеристик, погрешность измерения частоты в диапазоне 1000—5000 *гц* достигает 0,005%. Например, сдвиг фазы за счет изменения на 6% входного сопротивления транзистора или лампы, работающей с сеточными токами, вызывает погрешность 0,001%.

Минимальная погрешность измерения частоты порядка 2000 *гц*, связанная со сдвигами фазы, может быть снижена до 0,0005% путем выбора соответствующих нелинейных элементов и режимов их работы.

Переходные процессы при выключении поляризующего поля и наличие в спектре сигнала постоянной составляющей также вызывают изменение интервала времени счета частоты на $\Delta t$, так как постоянное напряжение, подаваемое на вход формирующего устройства, эквивалентно изменению уровня запуска. Приближенные вычисления $\Delta t$, определяемого изменением амплитуды входного сигнала и уровня запуска $\Delta U_з$, дают соотношение

$$\Delta t = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{U_з}{U_н} \left[ 1 - \frac{U_н}{U_к} \left( 1 + \frac{\Delta U_з}{U_з} \right) \right]. \qquad (4)$$

Экспериментальное исследование каждой из рассмотренных погрешностей затруднительно ввиду сложности их разделения. Поэтому можно дать лишь общие рекомендации по уменьшению этих погрешностей: снижение уровня запуска, недопустимость применения элементов со значительной нелинейностью в усилительном тракте, изучение переходных процессов и т. д.

При точных измерениях частоты прецессии целесообразно, по-видимому, так поворачивать вектор намагниченности протонов (с помощью частотного импульса), чтобы он образовал тупой угол с направлением напряженности магнитного поля. Это позволит выбрать участок сигнала с одинаковыми начальной и конечной амплитудами.

В заключение отметим, что на современном этапе развития радиоизмерительной техники измерения напряженности слабого магнитного поля (до 80 *а/м*) методом свободной ядерной прецессии вряд ли возможны с погрешностью, меньшей 0,0002%. Для напряженности же более сильных полей такая погрешность не является предельной.

Поступила в редакцию 17.V 1968 г.

УДК 621.317.441.001.24

*В. А. КАРАВАЕВА*
ВНИИМ

## РАСЧЕТ ПОСТОЯННОЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ КАТУШЕК МАЛЫХ РАЗМЕРОВ С ОДНОСЛОЙНОЙ ОБМОТКОЙ

Под постоянной измерительной катушкой $K_{Sw}$ понимают сумму площадей ее витков, с которыми сцепляется магнитный поток *. Эта постоянная может быть получена либо расчетом, либо экспериментально.

Экспериментально $K_{Sw}$ определяют сравнением потокосцеплений образцовой меры магнитного потока и образцовой катушки напряженности магнитного поля с помещенной в ее центр измерительной катушкой. При этом возникает ряд погрешностей, связанных с установкой измерительной катушки, погрешностями мер и аппаратуры, применяемой при сличении, ограниченной чувствительностью гальванометра, если измерения производятся индукционно-импульсным методом, и др. Особенно большие погрешности имеют место при определении малых значений $K_{Sw}$.

Расчет постоянной измерительной катушки с однослойной обмоткой выполняют, пользуясь линейными размерами ее каркаса, диаметром провода и числом витков (при условии плотного прилегания витков, т. е. при отсутствии зазора между каркасом и витками). Так как линейные размеры могут быть измерены со значительно большей точностью, чем магнитные величины, то расчетное значение постоянной однослойной измерительной катушки может быть получено более точным, чем экспериментальное.

При расчете $K_{Sw}$ вычисляют площадь $S$ одного витка, значение которой умножают на число витков катушки. Обычно $S$ определяют по средней линии витка, т. е по линии, проходящей через центры сечения провода. Однако при этом делаются допущения, приводящие к ошибкам, значениями которых при некоторых параметрах катушек нельзя пренебречь.

Ниже приведен уточненный расчет постоянных однослойных измерительных катушек с каркасами разной формы.

---

* Чернышев Е. Т., Чернышева Н. Г., Чечурина Е. Н. Магнитные измерения на постоянном и переменном токе. Стандартгиз, 1962.

## Катушка с каркасом круглого сечения

Площадь витка, рассчитанная по его средней линии, равна

$$S = \pi (R + r)^2,$$

где $R$ и $r$ — радиусы сечения каркаса и провода соответственно.

Однако такой расчет содержит некоторые ошибки, для учета которых надо ввести две поправки. Первая ошибка происходит из-за того, что площадь витка принимают равной площади, охватываемой его средней линией.

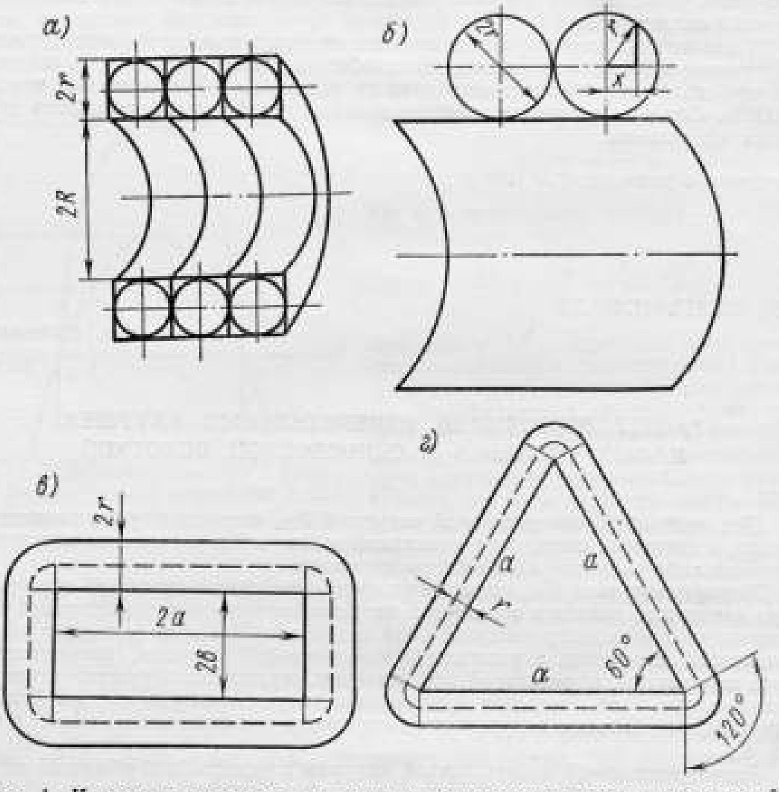


Рис. 1. К расчету поправок для катушек с каркасами различных сечений:

(а и б — круглое сечение (а — для первой, б — для второй поправок); в — прямоугольное сечение; г — сечение формы правильного треугольника.

Более строгим является следующий вывод формулы для средней площади витка $S_{1\,ср}$, позволяющий определить первую поправку:

$$S_{1\,ср} = \frac{1}{2r}\int_{-r}^{+r} \pi (R + r + x)^2\,dx = \pi (R + r)^2 + \frac{\pi r^2}{3} = S + \frac{\pi r^2}{3}, \qquad (1)$$

где $x$ — переменная интегрирования; $\frac{\pi r^2}{3}$ — слагаемое, являющееся поправкой.

Вторая ошибка обусловлена тем, что при выводе формулы не учитывалось то обстоятельство, что провод имеет круглое, а не квадратное сечение, вследствие чего не вся полоса высотой $2r$ (рис. 1), охватывающая каркас, будет заполнена проводом из-за различия между площадями квадрата и вписанной в него окружности.

Очевидно, следует ожидать, что площадь, подсчитанная с учетом второй ошибки, будет несколько меньше площади, рассчитанной по формуле (1), т. е. вторая поправка должна иметь знак, обратный знаку первой поправки.

Для учета обеих поправок, подставив в выражение (1) вместо постоянной величины $r$ переменную $\sqrt{r^2 - x^2}$ (рис. 2) и произведя интегрирование, получим

$$S_{2\,ср} = \frac{1}{2r}\int_{-r}^{+r} S_{1\,ср}\,dx = \frac{1}{2r}\int_{-r}^{+r}\left(S + \pi\frac{r^2 - x^2}{3}\right)dx =$$

$$= S + \frac{\pi r^2}{3} - \frac{\pi r^2}{9} =$$

$$= S + \frac{2\pi}{9}r^2. \qquad (2)$$

Относительная суммарная поправка составляет

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{\frac{2\pi}{9}r^2}{\pi(R+r)^2} \approx \frac{2r^2}{9R^2}\left[1 - \frac{r}{R}\left(2 + \frac{r}{R}\right)\right] \approx \frac{2r^2}{9R^2}. \qquad (3)$$

В формуле (3) не учтен член $r/R\,(2 + r/R)$. Это внесло ошибку в определение $\Delta S/S$, не превышающую 10% при $r/R < 1/20$. Учитывая, что значение $\Delta S/S$ мало, такая точность в определении $\Delta S/S$ вполне достаточна.

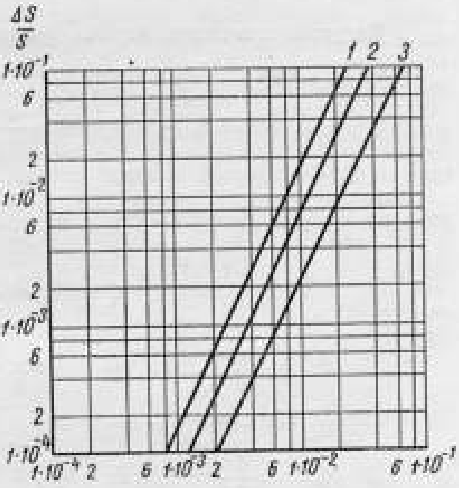


Рис. 2. Зависимость поправок $\frac{\Delta S}{S}$ (в процентах) от соотношений размеров провода и каркаса (по оси абсцисс — соотношения $r/a$, $r/\sqrt{2a2b}$ и $r/R$).

### Катушка с каркасом прямоугольного сечения

Площадь витка на каркасе прямоугольного сечения вычисляем по формуле

$$S = 2a2b + 2r\,(2a + 2b) + \pi r^2,$$

где $2a$ и $2b$ — геометрические размеры сечения каркаса.

Рассуждая аналогично описанному выше, получим после интегрирования среднюю площадь

$$S_{1\,ср} = \frac{1}{2r}\int_{-r}^{+r}\left[2a2b + 2\,(2a + 2b)(r + x) + \pi(r + x)^2\right]dx =$$

$$= 2a2b + (2a + 2b)\,2r + \pi r^2 + \frac{\pi r^2}{3} = S + \frac{\pi r^2}{3}. \qquad (4)$$

Учитывая обе поправки, находим

$$S_{2\,ср} = \frac{1}{2r}\int_{-r}^{+r} S_{1\,ср}\,dx = \frac{1}{2r}\int_{-r}^{+r}\left[S + \frac{\pi}{3}(r^2 - x^2)\right]dx =$$

$$= S + \frac{\pi r^2}{3} - \frac{\pi r^2}{9} = S + \frac{2\pi}{9}r^2. \qquad (5)$$

Относительная суммарная поправка составляет

$$\frac{\Delta S}{S}=\frac{\frac{2\pi}{9}r^2}{2a2b+2r(2a+2b)+\pi r^2}\approx\frac{2\pi}{9}\cdot\frac{r^2}{2a2b}\left[1-r\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]\approx$$

$$\approx\frac{2\pi}{9}\cdot\frac{r^2}{2a2b}. \qquad (6)$$

Пренебрежение в выражении (6) членом $r(1/a+1/b)$ вносит ошибку в определение $\Delta S/S$, не превышающую 10% при $r/a<1/20$ и $a\leqslant b$.

### Катушка с сечением каркаса формы правильного треугольника

Для каркаса с сечением формы правильного треугольника имеем:

$$S=S_0+3ar+\pi r^2=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+3ar+\pi r^2,$$

где $a$ и $S_0$ — сторона и площадь сечения каркаса.

По аналогии с вычислениями для круглого и прямоугольного сечений каркасов здесь средняя площадь с учетом первой поправки будет

$$S_{1\,\text{ср}}=\frac{1}{2r}\int\limits_{-r}^{+r}\left[\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+3a(r+x)+\pi(r+x)^2\right]dx=$$

$$=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+3ar+\pi r^2+\frac{\pi}{3}r^2=S+\frac{\pi}{3}r^2. \qquad (7)$$

Учитывая обе поправки, получим

$$S_{2\,\text{ср}}=\frac{1}{2r}\int\limits_{-r}^{+r}S_{1\,\text{ср}}\,dx=\frac{1}{2r}\int\limits_{-r}^{+r}\left[S+\frac{\pi}{3}(r^2-x^2)\right]dx=$$

$$=S+\frac{\pi}{3}r^2-\frac{\pi}{9}r^2=S+\frac{2\pi}{9}r^2. \qquad (8)$$

Относительная суммарная поправка составляет

$$\frac{\Delta S}{S}=\frac{\frac{2\pi}{9}r^2}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+3ar+\pi r^2}=\frac{8\sqrt{3}}{27}\cdot\frac{r^2}{a^2}. \qquad (9)$$

Ошибка в определении $\Delta S/S$ может быть вычислена аналогично тому, как это сделано для катушек с каркасами круглого и прямоугольного сечений.

Из полученных формул видно, что когда сечение провода значительно меньше сечения каркаса, поправка мала и ее вводить не требуется. В случае же применения катушек с малым сечением каркаса, например при измерениях напряженности неоднородных магнитных полей, исследовании полей рассеяния, а также при испытаниях листовых ферромагнитных материалов, поправка может иметь существенное значение.

На рис. 2 показана зависимость поправок $\Delta S/S$ (в процентах) от соотношений $r/R$ (*3* — каркас круглого сечения), $r/\sqrt{2a2b}$ (*2* — каркас прямоугольного сечения) и $r/a$ (*1* — каркас треугольного сечения). Этот график построен на основании формул (3), (6) и (9).

Из приведенных выше рассуждений видно, что абсолютное значение суммарной поправки не зависит от формы и размера каркаса, а определяется только радиусом провода, намотанного на каркас.

Поступила в редакцию 14.11 1967 г.

УДК 621.317.444 : 546.35 : 536.58

*А. П. НАУМОВ*

ВНИИМ

# СИСТЕМЫ КОНТРОЛЯ ТЕМПЕРАТУРЫ И ИНТЕНСИВНОСТИ СВЕТА В ПАРОЩЕЛОЧНОМ МАГНИТОМЕТРЕ

В процессе измерений индукции магнитного поля парощелочными магнитометрами с высокой чувствительностью наблюдаются сдвиги частоты [1] при изменении окружающей температуры и интенсивности света накачки. Чтобы избежать сдвигов более $0{,}5\cdot10^{-10}$ *тл* при работе рубидиевого магнитометра в магнитном поле Земли, как подтвердили данные измерений во ВНИИМ, следует поддерживать постоянной температуру спектрального источника и поглощающей ячейки с погрешностью соответственно не более 2 и 0,5° С. Изменения интенсивности света источника не должны превышать 5%.

Исследования макета рубидиевого магнитометра с одной ступенью терморегулирования (термостат ТС-15М) горячей водой, пропускаемой по змеевику в термостатируемом объеме, показали, что при длительных измерениях (более 24 *ч*) трудно поддерживать постоянной температуру объекта (датчика) $t = 59°$ С даже в пределах 1° С, особенно при резком изменении внешней температуры. Тепловая инерционность магниточувствительного датчика и малая скорость терморегулирования (из-за низкой скорости воды, протекающей в трубопроводе) усложняют работу макета и делают невозможным полную автоматизацию процесса терморегулирования.

Созданный во ВНИИМ новый макет рубидиевого магнитометра отвечает приведенным выше требованиям. Рассмотрим схему систем контроля его магниточувствительного датчика (рис. 1).

Датчик помещен в теплоизолирующий корпус *3* толщиной около 1,5 *см* из термореактивного пенопласта. Внутри него находятся поглощающая ячейка *5* (линзы, поляроид и фильтр не показаны на рисунке), спектральная лампа *2* и фотодетектор *4*. Фотодиод *1* контролирует излучаемый спектральным источником поток света. Контроль интенсивности излучаемого света и света, прошедшего через ячейку поглощения, осуществляется подключением соответствующего узла *10* или *6* к измерительному прибору *11*.

Температуру латунного экрана источника и ячейки измеряют с помощью термосопротивлений *9* и *8*, подключаемых к плечу симметричного моста постоянного тока. Поглощающая ячейка *5* имеет две ступени терморегулирования: грубую — с помощью горячей воды, пропускаемой по змеевику ($t = 56 \div 57°$ С обеспечивается термостатом ТС-15М) и более точную — электронную. Во второй ступени ячейка нагревается энергией от радиочастотного генератора, управляемого блоком электронного терморегулятора 7.

Блок-схема электронного терморегулятора представлена на рис. 2. Нагревательным элементом *1* служит медный провод диаметром 0,1 *мм* с сопротивлением 100 *ом*, намотанный бифилярно на тонкий цилиндр из немагнитного материала. Симметричный мост *2* питается от генератора *3* с частотой $f \approx 5$ *кгц* для выполнения условия $f > 1/\tau$ ($\tau$ — время релаксации ориентированных атомов). Напряжение в диагонали моста *ab* — около 4 *в*. При расстройке моста сигнал с диагонали *cd* усиливается избирательным усилителем *4* (коэффициент усиления 15 000) и детектируется на синхронном детекторе *5*. Выпрямленный сигнал попадает на обмотку поляризованного реле *6*, которое коммутирует питание генератора обогрева *7* ($f \approx 10$ *кгц*).

При работе макета с одним терморегулятором поддерживалась температура $59 \pm 2°$ С. Неравномерность ее распределения по объему ячейки достигала 2° С при разности между температурами ячейки и помещения около 50° С. Контроль любой из цепей *6*, *8*, *9*, *10* (рис. 1) осуществляется кратковременным подключением к измерительному прибору *11* с помощью многоступенчатого переключателя. Погрешность, вносимая цепями постоянного тока, зависит от качества монтажа

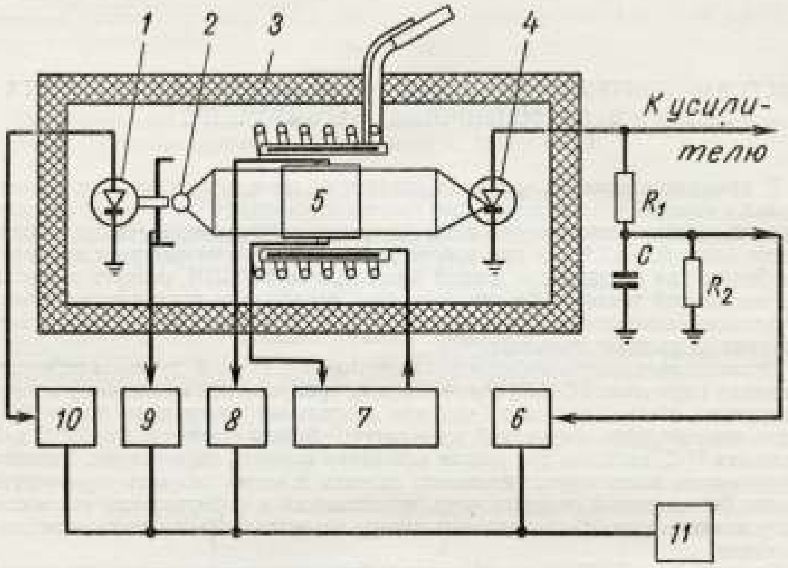


Рис. 1. Схема систем контроля магниточувствительного датчика.

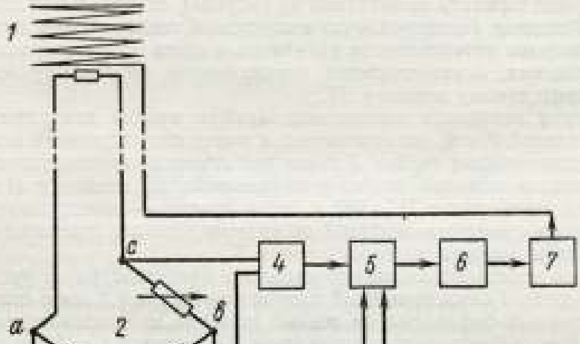


Рис. 2. Блок-схема электронного терморегулятора.

соединяющих проводов и может достигать $1\cdot 10^{-10}$ *тл*. При кратковременном контроле она заметна и исключалась при обработке аналоговой записи результатов (характерная ступенька на непрерывной линии самописца). Погрешности измерений, обусловленные работой моста терморегулятора на частоте 5 *кгц*, не были замечены (при аналоговом выходе порог чувствительности прибора $0{,}5\cdot 10^{-10}$ *тл*). При работе терморегуляторов ячейки поглощения конструкция датчика обеспечивала пассивное термостатирование спектрального источника в пределах $\pm 2^\circ$ C.

Все термосопротивления подвергали температурному старению по описанной в работе [2] методике.

Контроль интенсивности света, прошедшего через ячейку, осуществлялся с помощью сопротивления $R_2$ (рис. 1) в цепи нагрузки (сопротивления $R_1+R_2$) фотодетектора *4*. Работа макета с одной цепью контроля интенсивности света показала, что такой информации недостаточно. В отдельных случаях, при смене ламп и изменении режима питания генератора возбуждения, наблюдалось значительное изменение величины сигнала (что могло привести к сдвигу частоты резонанса), хотя ток фотодетектора — объективный контроль интенсивности света, прошедшего через ячейку, — воспроизводили в пределах $\pm 5\%$. Такое явление можно объяснить наличием самообращения возбуждающей линии, которое компенсировалось некоторым ее уширением таким образом, что суммарный поток света оставался неизменным. Косвенно это подтверждается тем, что цвет свечения спектральной лампы несколько изменялся.

Для объективной оценки режима работы спектрального источника пришлось ввести вторую цепь контроля, благодаря чему была достигнута требуемая точность измерения. Световой поток регулировали изменением напряжения питания генератора возбуждения и диафрагмированием потока перед ячейкой.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ando S. Shifts in Output Freguence Cs-magnetometer. «Japan. Appl. Phys»., 1965, v. 4.

2. Шлимович Б. М. Метод контроля и повышения стабильности полупроводниковых термосопротивлений. «Геофизическое приборостроение», вып. 6. «Недра», 1960.

Поступила в редакцию 19.1.1967 г.

УДК 621.3.078.6 : 621.317.444 : 546.35

*А. П. НАУМОВ*

ВНИИМ

# АВТОМАТИЧЕСКАЯ ПОДСТРОЙКА ЧАСТОТЫ В ПАРОЩЕЛОЧНОМ МАГНИТОМЕТРЕ

В СССР и за границей разрабатывают парощелочные магнитометры с автоматическим контролем частоты (АКЧ) и самогенерирующие [1—3]. В первых подстраивать частоту генератора к частоте атомного резонанса можно с помощью компактной сервосистемы (двигатель, управляемый усиленным сигналом рассогласования с фотодетектора, подстраивает, например, емкость, включенную в контур генератора радиочастоты — рис. 1) либо с помощью параметрического элемента, изменяющего под воздействием сигнала рассогласования свою емкость (так называемая электронная подстройка с помощью варикапа или реактивной лампы).

В самогенерирующем магнитометре, когда наблюдается модуляция светового луча с частотой ларморовой прецессии [4, 5], необходимо строго соблюдать определенные фазовые соотношения между сигналом на фотодетекторе и усиленным сигналом обратной связи, подаваемым на ячейку поглощения.

Эти магнитометры применяют на спутниках, ракетах, а также в полевых приборах ввиду их высокой чувствительности, малого потребления энергии, широкого диапазона измерений при автоматической работе и быстродействия [6].

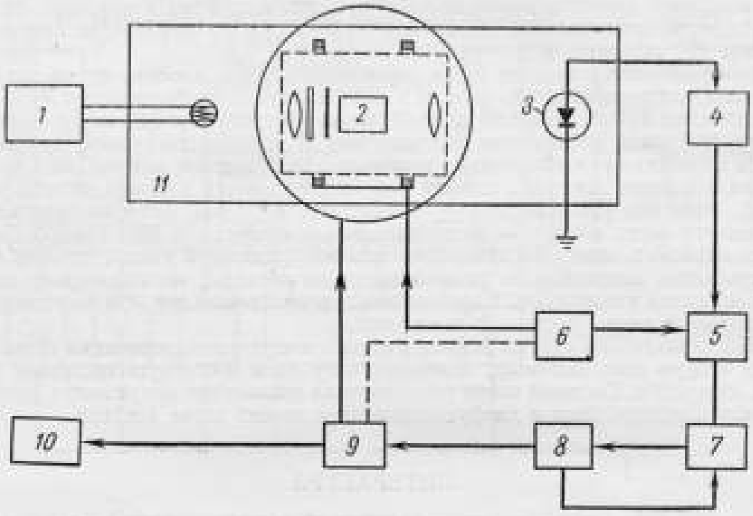


Рис. 1. Блок-схема парощелочного магнитометра с АКЧ:

*1* — генератор возбуждения спектрального источника; *2* — блок ячейки поглощения (с линзами, поляроидом и фильтром); *3* — фотодектор; *4* — избирательный усилитель; *5* — синхронный детектор; *6* — модулятор; *7* — преобразователь-усилитель; *8* — серводвигатель; *9* — генератор радиочастоты с подстраивающей емкостью; *10* — измеритель частоты; *11* — магниточувствительный датчик.

При точных измерениях индукции постоянных магнитных полей и определении атомных постоянных предпочтительнее использовать магнитометры с АКЧ в связи с относительно невысокими требованиями к параметрам усилителя сигнала и по ряду других причин.

Рассмотрим возможные погрешности работы сервосистемы в магнитометре с АКЧ при измерении индукции слабых постоянных магнитных полей в соответствии с метрологическими требованиями.

## Составление и анализ дифференциального уравнения замкнутой следящей системы

Принцип работы магнитометра с АКЧ (рис. 1) следующий. Сигнал рассогласования с фотодетектора *3* поступает на избирательный усилитель *4*, а затем вместе с сигналом модулятора *6* — на синхронный детектор *5*. Последний преобразует переменный сигнал рассогласования в постоянный, который подается на преобразователь-усилитель *7*, преобразующий постоянный сигнал в переменный с частотой 400 *гц*. Далее он поступает на управляющую обмотку серводвигателя *8*, включающего в себя редуктор и тахогенератор, сигнал с которого, пропорциональный скорости вращения серводвигателя, попадает на преобразователь *7*. Осуществленная таким образом местная отрицательная обратная связь улучшает характеристики слежения.

Через редуктор серводвигатель *8* соединен с ротором подстраивающей емкости, являющейся элементом контура генератора радиочастоты *9*. Управляемый сигналом рассогласования серводвигатель вращает подстраивающую емкость до тех пор, пока частота на выходе генератора *9* не станет равной частоте магнитного резонанса. При этом сигнал рассогласования на выходе фотодетектора *3* будет равен нулю. Процессы собственно оптической ориентации и детектирования сигнала из прошедшего через поглощающую ячейку *3* света подробно описаны в работах [1, 4 и 5].

Для получения сигнала рассогласования в магнитометре с АКЧ модулируют низкой частотой $\Omega$ либо частоту генератора, либо измеряемую индукцию магнитного поля (что в ряде случаев технически удобнее). Оба способа равноценны и дают одинаковые результаты, однако воспользуемся первым, так как расчеты при частотной модуляции более просты.

Поступающий на поглощающую ячейку *2* сигнал $u_{\text{г}}$ представим в виде

$$u_{\text{г}} = U_0 e^{j(\omega_0 t + m\cos\Omega t)} = U_0 e^{j\theta(t)}, \quad (1)$$

где $U_0$ — амплитуда напряжения радиочастотного поля; $\omega_0 = 2\pi f_0$ — частота генератора при отсутствии модуляции; $t$ — время, *сек*; $m = \omega_{\text{д}}/\Omega$ — индекс модуляции ($\omega_{\text{д}}$ — амплитуда частотного отклонения — девиация).

При наличии модуляции частота генератора изменяется по закону

$$\omega(t) = \omega_0 + \omega_{\text{д}} \sin \Omega t, \quad (2)$$

а фаза

$$\theta(t) = \omega_0 t + \frac{\omega_{\text{д}}}{\Omega}\cos\Omega t.$$

Ячейка имеет резонансную кривую поглощения, поэтому зависимость сигнала на выходе фотодетектора $u_{\text{ф}}$ от рассогласования можно аппроксимировать:

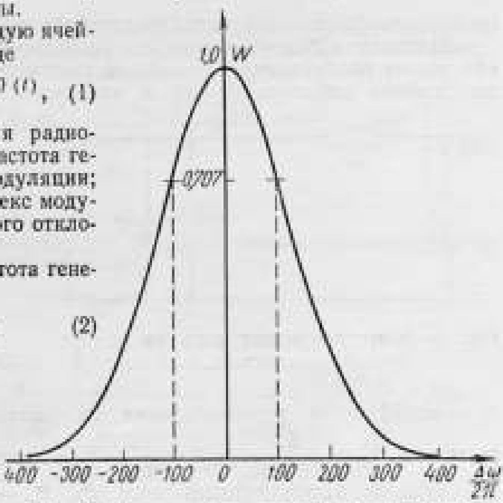


Рис. 2. Зависимость кривой поглощения $W$ ячейки от рассогласования $\Delta\omega$ при $\beta = 1{,}77\cdot 10^{-6}$.

$$u_{\text{ф}} = Ve^{-\beta(\omega-\omega_{\text{р}})^2} = Ve^{-\beta\Delta\omega^2}, \quad (3)$$

где $V$ — амплитуда сигнала; $\beta$ — коэффициент формы кривой поглощения; $1 \gg \beta > 0$ и определяется из опытных данных (рис. 2); $\Delta\omega = \omega - \omega_{\text{р}}$ — рассогласование; $\omega_{\text{р}}$ — частота резонанса (при автоподстройке $\omega \to \omega_{\text{р}}$).

Разложив выражение (3) в степенной ряд ($\Delta\omega$ мало) и ограничившись линейным членом, получим

$$u_{\text{ф}} = V - V\beta 2\,\Delta\omega^2 e^{-\beta\,\Delta\omega^2} + \cdots$$

При автоподстройке $\Delta\omega \to 0$ и $e^{-\beta\,\Delta\omega^2} \to 1$, поэтому

$$u_{\text{ф}} = V(1 - 2\beta\,\Delta\omega^2), \quad (4)$$

где

$$\Delta\omega = \omega_0 + \omega_{\text{д}}\sin\Omega t - \omega_{\text{р}} = \Delta\omega_0 + m\Omega\sin\Omega t; \quad (5)$$

$$\Delta\omega_0 = \omega_0 - \omega_{\text{р}}.$$

Подставив выражение (5) в (4) и возведя $\Delta\omega$ в квадрат, получим

$$u_{\text{ф}} = V\left[1 - 2\beta\left(\Delta\omega_0^2 + 2\,\Delta\omega_0 m\Omega\sin\Omega t + \frac{1}{2}m^2\Omega\cos 2\Omega\right)\right]. \quad (6)$$

Сигнал основной частоты модуляции $\Omega$ содержит сведения о знаке и величине рассогласования и его используют для автоподстройки частоты генератора. Напряжение сигнала рассогласования на выходе фотодетектора

$$u_1 = k_1 \Delta\omega_0 \sin \Omega t. \tag{7}$$

Это уравнение является передаточной функцией магниточувствительного датчика ($k_1$ — коэффициент передачи этого звена).

На выходе усилителя сигнал рассогласования равен

$$u_2 = k_2 u_1, \tag{8}$$

где $k_2$ — коэффициент передачи (усиления) усилителя.

Выражение (8) справедливо при условии, что постоянная времени усилителя при полосе пропускания 3 *гц* меньше постоянной времени интегрирующей цепи синхронного детектора (5 *сек*) и электромеханической постоянной двигателя (0,3 *сек*).

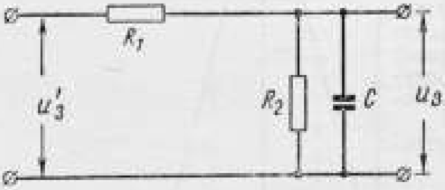


Рис. 3. Интегрирующая цепь на выходе фотодетектора.

Для синхронного детектора с интегрирующей цепью (рис. 3) имеем:

$$u_3' = k_1 k_2 k_3 \Delta\omega_0; \tag{9}$$

$$u_3 = \frac{k_4 u_3'}{Tp + 1}, \tag{10}$$

где $u_3'$ и $u_3$ — напряжения на входе и выходе интегрирующей цепи; $k_3$ — коэффициент преобразования на нелинейных элементах синхронного детектора; $k_4 = \dfrac{R^2}{R_1 + R_2}$ и $T = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$ — коэффициент передачи и постоянная времени интегрирующей цепи ($R_1$, $R_2$ — сопротивления, $C$ — интегрирующая емкость); $p = d/dt$ — символ дифференцирования.

Напряжение на выходе преобразователя-усилителя с учетом тахогенераторной обратной связи равно

$$u_4 = k_5 (u_3 - u_{o.\,c}) = k_5 (u_3 - \varkappa p\alpha), \tag{11}$$

где $k_5$ — коэффициент передачи преобразователя-усилителя; $u_{o.\,c} = \varkappa\dot{\alpha} = \varkappa p\alpha$ — напряжение обратной связи ($\varkappa$ — крутизна характеристики тахогенератора; $\dot{\alpha} = \dfrac{d\alpha}{dt}$ — скорость вращения, а $\alpha$ — угол поворота вала двигателя).

Для двигателя

$$Ip^2\alpha + hp\alpha = M_п = k_6 u_4, \tag{12}$$

здесь $I$ — сумма моментов инерции ротора и приведенной к валу нагрузки; $h$ — коэффициент внутреннего успокоения; $M_п$ — пусковой момент; $k_6$ — коэффициент передачи двигателя.

Передаточная функция редуктора

$$\varphi = \frac{\alpha}{i}, \tag{13}$$

где $\alpha$ и $\varphi$ — углы поворота входной и выходной шестерен редуктора соответственно; $i$ — передаточное число.

Уравнение регулятора (подстраивающей емкости) имеет вид

$$\Delta C = k_7 \varphi, \tag{14}$$

а уравнение объекта

$$k_8 \Delta C = -\Delta\omega_0, \tag{15}$$

здесь $\Delta C$ — изменение подстраивающей емкости; $k_7$ и $k_8$ — коэффициенты передачи регулятора и объекта; $\Delta\omega_0$ — соответствующее $\Delta_C$ изменение частоты на выходе генератора радиочастоты.

Объединив выражения (7)—(15) и исключив не интересующие нас переменные, находим:

$$\left.\begin{aligned} k_7k_8\frac{\alpha}{i} = -\Delta\omega_0;\;\; k_1k_2k_3\,\Delta\omega_0 = u_3';\;\; u_3\,(Tp+1) = k_4u_3' \\ p\,(Jp+h)\,\alpha = k_5k_6\,(u_3 - \varkappa p\alpha). \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Введем в систему (16) поправки на возмущающие воздействия (7) на генератор $a_1$ и выходной сигнал интегрирующей цепи синхронного детектора $a_2$ (например, из-за температурной нестабильности нелинейных элементов):

$$\left.\begin{aligned} k_7k_8\frac{\alpha}{i} = -\Delta\omega_0 + a_1;\;\; k_1k_2k_3\,\Delta\omega_0 = u_3' + a_2;\;\; u_3\,(Tp+1) = k_4u_3'; \\ p\,(Jp+h)\,\alpha = k_5k_6\,(u_3 - \varkappa p\alpha), \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

здесь $\alpha$ и $\Delta\omega_0$ — независимые обобщенные координаты.

Перенеся члены с координатами в левую часть уравнений, составим главный определитель системы и приравняем его нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} k_7k_8\frac{1}{i} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1k_2k_3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & Tp+1 \\ p\,(Jp+k_5k_6\varkappa+h) & 0 & 0 & -k_5k_6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta = p^3JT + p^2\,(J + hT + k_TT) + p\,(h + k_T) + k_0 = 0, \qquad (18)$$

где $k_T = k_5k_6\varkappa$; $k_0 = k_1k_2k_3k_4k_5k_6k_7k_8\,\frac{1}{i}$.

Уравнение (18) — характеристическое уравнение замкнутой системы автоподстройки.

Теперь найдем уравнение для $\Delta\omega_0$:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} k_7k_8\frac{1}{i} & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & Tp+1 \\ p\,(Jp+k_5k_6\varkappa+h) & 0 & 0 & -k_5k_6 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_0 = k_4k_5k_6k_7k_8\frac{a_2}{i} + a_1p\,(Tp+1)\,(Jp+k_T+h). \qquad (19)$$

Если $a_1$ и $a_2$ постоянные, то, положив $p = 0$, получим уравнение для установившегося режима

$$k_0\,\Delta\omega_{уст} = \frac{a_2}{i}\,k_4k_5k_6k_7k_8,$$

где $\Delta\omega_{уст}$ — установившееся рассогласование.

Таким образом, при постоянном возмущающем воздействии на генератор радиочастоты замкнутая система астатична, так как $\Delta\omega_{уст} = 0$ при любом значении $a_1 = \mathrm{const}$, а при воздействии на выход синхронного детектора система обладает статизмом

$$\Delta\omega_{уст} = \frac{a_2}{k_1k_2k_3}. \qquad (20)$$

Дифференциальное уравнение замкнутой следящей системы будет

$$JTp^3\alpha + (J + hT + k_TT)\,p^2\alpha + (h + k_T)\,p\alpha + k_6\alpha = 0. \qquad (21)$$

Для исследования системы выбираем воздействие вида $a = A_0t$, т. е. линейно возрастающую функцию, скорость возрастания которой определяется величиной ухода частоты генератора за единицу времени $A_0$. Тогда

$$\Delta\omega = \omega_p - \left(\omega_0 + k_1k_8\frac{d}{i} - a\right). \qquad (22)$$

При подстройке частоты генератора к частоте резонанса $\omega_p - \omega_0 = 0$ и уравнение замкнутой системы можно записать:

$$p^3\alpha + Bp^2\alpha + Cp\alpha + D\alpha = EA_0t, \qquad (23)$$

где

$$B = \frac{J + hT + k_TT}{JT}; \quad C = \frac{h + k_T}{JT}; \quad D = \frac{k_6}{JT}; \quad E = \frac{k_1k_2k_3k_4k_5k_6}{JT}.$$

Общее решение уравнения (23) имеет вид

$$\alpha(t) = \frac{EA_0e^{-xt}}{x^2(y-x)(z-x)} + \frac{EA_0e^{-yt}}{y^2(x-y)(z-y)} + \frac{EA_0e^{-zt}}{z^2(x-z)(y-z)} + \frac{EA_0txyz - EA_0(yz + xz + xy)}{x^2y^2z^2}, \qquad (24)$$

где $x$, $y$ и $z$ — корни уравнения (23) при отсутствии возмущающего воздействия, причем

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= B;\\ xy + xz + zy &= C;\\ xyz &= D. \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Подставив уравнение (24) в (22), получим

$$\Delta\omega = \frac{DA_0e^{-xt}}{x^2(y-x)(z-x)} + \frac{DA_0e^{-yt}}{y^2(x-y)(z-y)} + \frac{DA_0e^{-zt}}{z^2(x-z)(y-z)} + A_0t - \frac{A_0C}{D} - A_0t. \qquad (26)$$

В правой части уравнения (26) первые три члена определяют переходный процесс, а пятый $\frac{A_0C}{D}$ — установившуюся ошибку следящей системы.

При $t = 0$ рассогласование $\Delta\omega = 0$, а при $t \to \infty$ первые три члена (26) стремятся к нулю.

### Числовая оценка параметров замкнутой следящей системы

При сигнале 600 *мкв* на нагрузке фотодетектора и полуширине резонанса $\Delta f = 100$ *гц* коэффициент передачи магниточувствительного датчика $k_1 = 1 \times 10^{-8}$ *в/рад*.

Коэффициент передачи избирательного усилителя синхронного детектора с интегрирующей цепью $k_2k_3k_4$ определяют, исходя из условий устойчивости *.

* При исследовании системы на устойчивость можно показать, что кроме условий $JT > 0$; $J + hT + k_TT > 0$; $h + k_T > 0$ и $k_6 > 0$ необходимо выполнять неравенство $(J + hT + k_TT)(h + k_T) - JTk_6 > 0$.

Для преобразователя-усилителя $k_5 = 20$.

Использованный в сервосистеме двигатель типа ДИД 0,5-ТА с редуктором $i = 10^4$ имеет:

электромеханическую постоянную . . . . . . . 0,3 *сек*;
крутизну характеристики тахогенератора . . 0,003 *(в·сек)/рад*;
коэффициент передачи . . . . . . . . . . . . 20 *(г·см)/в*.

Для генератора радиочастоты типа Г4-42 $k_7 k_8 = 2000$, а $k_T = k_5 k_6 \varkappa = 1{,}2$ *(г·см·сек(/рад)*.

Из условия устойчивости следует, что $k_2 k_3 k_4 < 1{,}85 \cdot 10^5$. При $k_3 k_4 = 0{,}5$ имеем $k_2 < 3{,}7 \cdot 10^5$. Приняв $k_2 = 50\,000$, получаем $k_6 = 2$ *(г·см·сек·в)/рад*$^2$.

Погрешность, вызванная уходом частоты генератора на 5 *гц* за 10 *сек*, составляет

$$\Delta' = \frac{A_0 C}{D} \approx 0{,}4 \text{ гц},$$

а погрешность, обусловленная зоной нечувствительности сервосистемы при напряжении трогания двигателя $u_{\text{тр}} = 0{,}5$ *в*.

$$\Delta'' = \frac{u_{\text{тр}}}{k_1 k_2 k_3 k_4 k_6} \approx 1{,}0 \text{ рад/сек}, \text{ или } < 0{,}2 \text{ гц}.$$

Погрешности, обусловленные температурной нестабильностью синхронного детектора $\Delta'''$ и преобразователя-усилителя $\Delta^{IV}$ можно оценить по формуле (20). Так, для ключевого синхронного детектора на транзисторах П16А при сопротивлении нагрузки 10 *ком* и изменении внешней температуры на 20° С $a_2 \approx 70$ *мв*. Тогда

$$\Delta''' = \Delta^{IV} \approx 3 \text{ рад/сек}, \text{ или } 0{,}5 \text{ гц}.$$

Таким образом, относительная погрешность системы автоподстройки частоты рубидиевого магнитометра, работающего в магнитном поле Земли, при $f_0 = 360$ *кгц* равна

$$\delta = \frac{\Delta' + \Delta'' + \Delta''' + \Delta^{IV}}{f_0} = 0{,}45 \cdot 10^{-5}.$$

Рассмотренные погрешности системы автоподстройки частоты магнитометра меньше погрешностей, обусловленных сдвигами резонансной частоты [8] в магниточувствительном датчике. Изучение этих сдвигов является предметом отдельных исследований.

Погрешности, обусловленные температурной нестабильностью синхронного детектора и преобразователя-усилителя можно уменьшить, применяя, например, диоды вместо транзисторов. Увеличение же коэффициента усиления избирательного усилителя свыше 50 000 практически невозможно из-за неустойчивости системы.

Система автоподстройки с серводвигателем обеспечивает в реальных условиях измерение индукции в диапазоне $5 \cdot 10^{-6} \div 2 \cdot 10^{-3}$ *тл* с погрешностью не более $1 \cdot 10^{-5}$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Bender P., Skillman T. Measurement of the earth's magnetic field with a Rb—magnetometer. «I. Geophys. Res.,» 1958, v. 63.

2. Козлов А. Н. Квантовые магнитометры для геомагнитных исследований. Автореферат диссертации. ИФЗ АН СССР, 1965.

3. Ruddock K. Optical Pumped Rb—magnetometer «Proc. of the Second Int. Space Sci. Symp.», Florence, 1961.

4. Dehmelt H., Modulation of a Light Beam by Precessing Absorbing Atoms. «Phys rev.,» 1957, v. 15.

5. Bloom A. Principle on operation of Rb — magnetometer. «Appl. opt.», 1962, v. 61.

6. Usher M. and other. A self-oscilating Rb — magnetometer for geomagnetic measurements. «J. scient.-instrum.» 1964, № 9.
7. Воронов А. А. Элементы теории автоматического регулирования. ВИМО, 1954, стр. 172.
8. Ando S. Shifts in Output Frequence Cs — magnetometer». «Japan. J. appl. phys»., 1965, v. 4.

Поступила в редакцию 19.I 1967 г.

УДК 621.317.444 : 546.35 : 621.317.421

*В. Д. ЛОМАНЫЙ*
ВНИИМ

# НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПАРОРУБИДИЕВОГО МАГНИТОМЕТРА ПРИ ИЗМЕРЕНИИ МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ В ДИАПАЗОНЕ $5(10^{-7}-10^{-5})$ *тл*

Как известно, основными метрологическими характеристиками парорубидиевого магнитометра, определяющими его способность реагировать на изменения магнитной индукции являются полуширина $\Delta f$ и отношение сигнала к шуму $S/N$. Поэтому целью работы было установить причины, влияющие на эти характеристики.

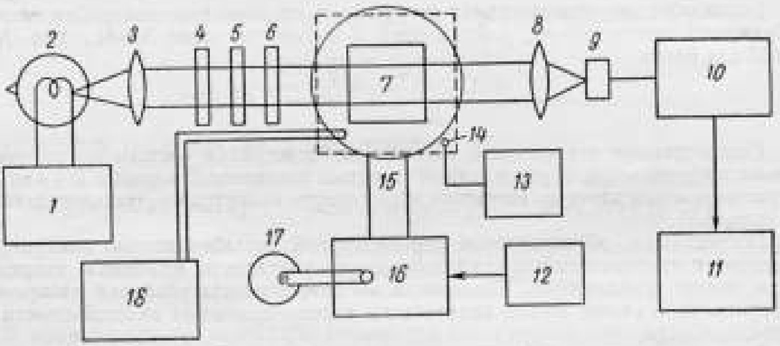


Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки.

На рис. 1 приведена блок-схема магнитометрической экспериментальной установки ВНИИМ, принцип действия которой следующий. Световой поток от возбуждаемого генератором *1* излучателя *2* проходит через линзу *3*, интерференционный светофильтр *4*, поляроид *5* и четвертьволновую пластинку *6*. Пройдя камеру поглощения *7*, он фокусируется линзой *8* на фотодетектор *9* и через усилитель *10* поступает на самописец *11*. На зажимы внешней модуляции генератора радиочастоты *16* подается частота 18 *гц* с модулятора *12*. Глубина модуляции 100%. Мотор *17* вращает ручку регулирования частоты генератора *16*, давая возможность записать контур сигнала. На радиочастотные кольца *15* диаметром 190 *мм* с обмоткой из 18 витков (провод марки ПЭЛШО диаметром 0,49 *мм*, общее сопротивление 1,07 *ом*) поступает в секунду по 18 импульсов радиочастоты. При времени прохождения сигнала 1,5 *мин* его форма не искажается. Необходимая температура в объеме камеры поглощения поддерживается термостатом *18* и регистрируется немагнитной термопарой *14* с миллиамперметром *13*.

Отношение $S/N$ на выходе установки измеряли вольтметром переменного тока В3-5, а $\Delta f$ записывали самописцем типа Н-110.

Экспериментально были определены зависимости $S/N$ от температуры $t$ камеры поглощения, интенсивности светового потока $I$, амплитуды радиочастотного поля $B_{\sim}$ и угла наклона $\alpha$ оптической оси установки к измеряемому вектору магнитной индукции. Зависимость $S/N$ от $t$ (рис. 2, *а*) измеряли в девяти точках диапазона 34—56° С.

Как показал эксперимент, между $S/N$ и $I$ существует прямо пропорциональная зависимость, которую определили с помощью набора серых поглощающих фильтров, не изменявших степень поляризации светового потока. В качестве фильтров использовали обыкновенные стекла толщиной 1,5 *мм*, каждое из которых поглощает 10% падающего на него светового потока. Хаотические выбросы

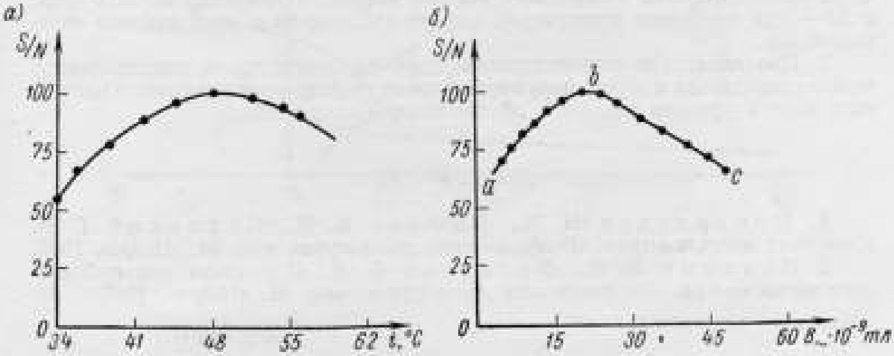


Рис. 2. Зависимости отношения $S/N$ от температуры $t$ и амплитуды радиочастотного поля $B_{\sim}$.

потока не превышали 1% от интенсивности сигнала оптической накачки. Соотношение между $S/N$ и $B_{\sim}$ определяли в магнитных полях с индукцией $5\cdot10^{-5}$ (рис. 2, *б*), $2\cdot10^{-5}$ и $2\cdot10^{-6}$ *тл*. Сравнение полученных результатов показало, что кривые зависимостей $S/N$ ($B_{\sim}$) имеют достаточно четко выраженный максимум. На рис. 2, *б* отрезок *ab* кривой до максимума соответствует постепенному увеличению числа релаксирующих атомов при возрастании $B_{\sim}$, отрезок *bc* — понижению $S/N$ при уширении $\Delta f$. В случае большой амплитуды радиочастотного поля разность заселенностей зеемановских уровней уменьшается за счет переходов с нижних уровней на верхние. Точка *c* соответствует моменту, когда в центре сигнала вследствие насыщения образуется провал [1, 2].

С целью определения соотношения между $S/N$ и $\alpha$ произведено 16 измерений. Углы $\alpha$ определены с погрешностью $\pm1$ *град*. Оказалось, что погрешность установки оптической оси относительно вектора В может достигать $\pm10$ *град*. В этих пределах отношение $S/N$ практически не изменялось. При $\alpha = 40$ оно уменьшалось вдвое.

Для определения зависимостей $\Delta f$ от $t$ и $I$ использовали записи сигналов при $B = 1{,}7\cdot10^{-4}$ *тл* на одиночной линии перехода $m_F = 2 \rightarrow m_F = 1$. В пределах погрешности измерений значение $\Delta f$ при изменении температуры оставалось постоянным.

Было установлено, что зависимость между $\Delta f$ и $I$ прямо пропорциональная (интенсивность света $I$ изменялась в пределах 100—50% от начального значения светового потока).

Ввиду сильной взаимосвязи между $\Delta f$ и $B_{\sim}$ кривые их соотношения снимали в тех же полях, что и соотношения $S/N$ и $B_{\sim}$. Во всех случаях зависимость была прямо пропорциональной. Полуширина линии $\Delta f$, соответствующая значению $B_{\sim}$, при котором $S/N$ максимально, во всем исследуемом диапазоне измерений индукции оказалась постоянной и равной примерно $2\cdot10^{-8}$ *тл* (200 *гц*).

Это обстоятельство свидетельствует о том, что в реальных условиях полуширина линии определяется градиентом магнитного поля и уровнем наводок в объеме камеры поглощения установки.

Угловую зависимость $\Delta f(\alpha)$ определяли также для одиночной линии перехода. Угол $\alpha$ изменялся в пределах $\pm 20$ *град* относительно вектора В. Выяснилось, что в пределах погрешности измерений $\Delta f$ не зависит от $\alpha$.

Полученные результаты позволяют сделать следующие практические выводы:

1. Достаточно большое отношение сигнала к шуму (70—150) можно получить в широком диапазоне температур камеры поглощения (30—60° С).

2. Отношение сигнала к шуму и полуширина линии понижаются с уменьшением интенсивности светового потока и амплитуды радиочастотного поля и сохраняются постоянными: $S/N$ — при отклонении оптической оси магнитометра от направления измеряемого вектора магнитной индукции на $\pm 10$ *град*, а $\Delta f$ — при изменении температуры камеры поглощения и угла наклона оптической оси.

3. При амплитуде радиочастотного поля, соответствующей максимальному отношению сигнала к шуму, полуширина линии определяется градиентом магнитного поля и уровнем наводок в объеме камеры поглощения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Померанцев Н. М., Рыжков В. М., Скроцкий Г. В. Квантовая магнитометрия. «Геофизическая аппаратура», вып. 34, «Недра», 1967.

2. Ломаный В. Д., Яновский Б. М. О точности парорубидиевого магнитометра. «Геофизическая аппаратура», вып. 31. «Недра», 1967.

Поступила в редакцию 19.1. 1967 г.

УДК 538.652 : 538.662.15

*Е. А. СОКОЛОВА*
ВНИИМ

# МАГНИТОСТРИКЦИЯ И ЕЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ФЕРРОМАГНИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Среди параметров, характеризующих поведение магнитных материалов в постоянных магнитных полях, важное практическое значение имеет магнитострикция.

Во ВНИИМ на установке типа УСМ-2 [1] интерференционным методом была измерена продольная магнитострикция образцов $\lambda = \frac{\Delta l}{l}$ ($\Delta l$ — изменение длины $l$ образца) некоторых материалов отечественного производства при различной температуре в зависимости от их намагниченности $J$ или напряженности намагничивающего поля $H$. Верхний предел намагниченности составлял $2120 \cdot 10^3$ *а/м*, а напряженности поля 60 *ка/м*. Испытуемые образцы сплавов Ю14 (Fe—Al), К50Ф2 (Fe—Co), К65 (Fe—Co) и феррита Ф600 химического состава $Fe_2O_3$—66%, Zn— 22%, NiO — 12% имели форму цилиндра длиной 100 *мм*, диаметром 5 *мм*.

Для установления погрешности многократно измеряли $\lambda$ образца феррита Ф600 при неизменных условиях, т. е. при одной и той же температуре и в одном и том же интервале напряженности намагничивающего поля. Было получено 15 кривых зависимости $\lambda = f(H)$ в интервале $H = 0 \div 60$ *ка/м*.

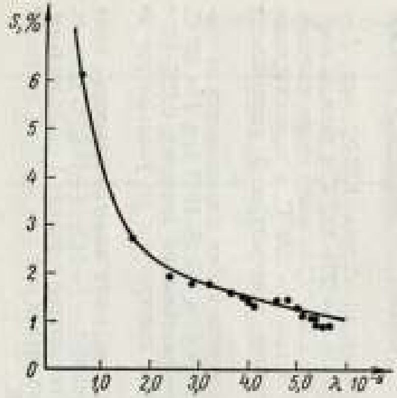


Рис. 1. Изменение средней квадратической погрешности $S$ измерения магнитострикции $\lambda$ в зависимости от ее значения при постоянных температуре и напряженности намагничивающего поля.

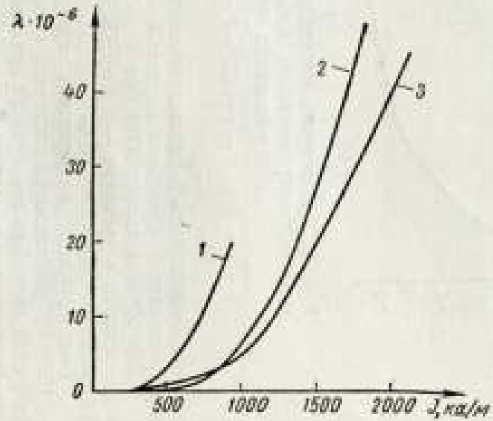


Рис. 2. Зависимость магнитострикции $\lambda$ образцов сплавов 1Ю14 (*1*), 2К65 (*2*) и К50Ф2 (*3*) от их намагниченности $J$ при нормальной температуре.

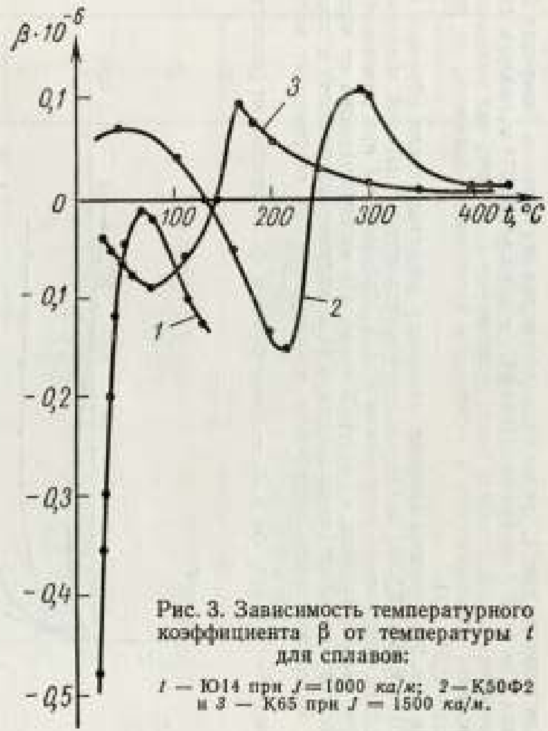


Рис. 3. Зависимость температурного коэффициента $\beta$ от температуры $t$ для сплавов:

*1* — Ю14 при $J = 1000$ *ка/м*; *2* — К50Ф2 и *3* — К65 при $J = 1500$ *ка/м*.

Как видно из рис. 1, средняя квадратическая погрешность измерения $S$ для значения $\lambda = 1 \cdot 10^{-6}$ не превосходила 6%, а для $\lambda = 6 \cdot 10^{-6}$ снижалась до 1%. С увеличением $\lambda$, как показали ранее проведенные измерения, она уменьшалась, приближаясь асимптотически к некоторому постоянному значению, не превышающему 0,5% [2].

На рис. 2 приведены графики изменения магнитострикции образцов сплавов Ю14, К65 и К50Ф2 от их намагниченности при нормальной температуре. Результаты определения зависимости $\lambda$ этих образцов от $J$ при различной температуре даны в таблице, из которой видно, что магнитострикция не является линейной функцией от намагниченности (или напряженности поля) и температуры. Вследствие этого непостоянен и температурный коэффициент магнитострикции $\beta = \frac{\Delta\lambda}{\Delta t}$ (где $\Delta\lambda$ и $\Delta t$ — изменения $\lambda$ и $t$), зависящий от свойств ма-

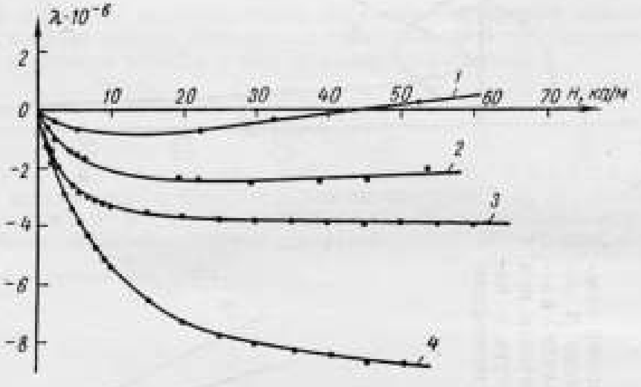


Рис. 4. Зависимость магнитострикции $\lambda$ образца феррита Ф600 от напряженности намагничивающего поля $H$ при различных температурах:

1 — $t = 184$; 2 — $t = 47,4$; 3 — $t = 17$ и 4 — $t = -110°$ С.

териала. Зависимость $\beta$ рассматриваемых сплавов от температуры при постоянных значениях $J$ приведена на рис. 3.

Для образца сплава Ю14 при $J \geqslant 1000 \cdot 10^3$ *а/м* значения $\beta$ отрицательны и изменяются в пределах $-(0,5 \div 0,13)\ 10^{-6}$. Наименьшее абсолютное значение $\beta = 0,01 \cdot 10^{-6}$ при $t = 70°$ С.

Температурный коэффициент магнитострикции сплава К50Ф2 при $J = 1500 \cdot 10^3$ *а/м* также не постоянен в интервале $t = 20 \div 400°$ С и дважды изменяет свой знак. При температуре примерно 130 и 240° С он равен нулю; наибольшее отрицательное значение $\beta = -0,15 \cdot 10^{-6}$ при $t = 220°$ С, а положительное $\beta = 0,10 \cdot 10^{-6}$ при $t = 290°$ С. С увеличением температуры $\beta$ уменьшается до $0,01 \cdot 10^{-6}$ ($t = 400°$ С).

Для сплава К65 знак и значение $\beta$ изменяются также в зависимости от температуры. Наибольшее отрицательное значение $\beta = -0,08 \cdot 10^{-6}$ при $t = 80°$ С. Когда $t = 140°$ С, $\beta = 0$. Наибольшего положительного значения $0,095 \cdot 10^{-6}$ достигает $\beta$ при $t = 170°$ С, а с увеличением температуры он уменьшается до $0,01 \cdot 10^{-6}$ ($t = 400°$ С).

Для феррита Ф600 изменение $\lambda$ от напряженности намагничивающего поля в пределах до 65 *ка/м* определяли в интервале $t = (-110) \div (+184)°$ С (рис. 4). В этих диапазонах напряженностей поля и температур значения $\lambda$ отрицательны. По мере понижения температуры $\lambda$ увеличивается и при $t = -110°$ С достигает значения $-10 \cdot 10^{-6}$; при $t = 184°$ С $\lambda \to 0$.

**Зависимость магнитострикции образцов сплавов К50Ф2, К65 и Ю14 от их намагниченности при различных температурах**

| Образцы сплавов | $\lambda \cdot 10^6$ | $J \cdot 10^{-3}$ $a/м$ | $\lambda \cdot 10^6$ | $J \cdot 10^{-3}$ $a/м$ | $\lambda \cdot 10^6$ | $J \cdot 10^{-3}$ $a/м$ | $\lambda \cdot 10^6$ | $J \cdot 10^{-3}$ $a/м$ | $\lambda \cdot 10^6$ | $J \cdot 10^{-3}$ $a/м$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $t = 12{,}5°$ C | | $t = 43°$ C | | $t = 95°$ C | | $t = 134°$ C | | $t = 197°$ C | |
| | 0,25 | 280 | 0,20 | 280 | 0,10 | 280 | 0,52 | 305 | —0,92 | 297 |
| | 2,83 | 726 | 3,73 | 750 | 3,10 | 740 | 4,37 | 740 | 1,67 | 730 |
| | 4,50 | 960 | 7,27 | 960 | 6,42 | 950 | 7,80 | 950 | 4,83 | 945 |
| | 8,25 | 1140 | 10,80 | 1130 | 11,33 | 1155 | 11,90 | 1120 | 8,57 | 1125 |
| К50Ф2 | 15,50 | 1380 | 17,83 | 1370 | 14,20 | 1370 | 19,25 | 1370 | 15,66 | 1360 |
| | 21,10 | 1550 | 23,30 | 1540 | 23,66 | 1545 | 24,80 | 1540 | 20,92 | 1510 |
| | 30,33 | 1775 | 31,43 | 1760 | 31,83 | 1740 | 32,90 | 1745 | 32,00 | 1820 |
| | 41,16 | 2030 | 40,32 | 2015 | 41,50 | 2005 | 41,62 | 1990 | 38,10 | 1980 |
| | 45,10 | 2120 | 43,25 | 2100 | 44,60 | 2090 | 44,00 | 2075 | 41,50 | 2060 |
| | $t = 237°$ C | | $t = 305°$ C | | $t = 421°$ C | | $t = 17°$ C * | | | |
| | 0,31 | 280 | 0,60 | 340 | — | 310 | —0,20 | 270 | | |
| | 2,20 | 770 | 4,10 | 770 | 3,20 | 745 | —0,71 | 745 | | |
| | 4,01 | 960 | 6,10 | 950 | 6,30 | 930 | 2,81 | 955 | | |
| | 6,40 | 1130 | 10,67 | 1180 | 10,40 | 1090 | 6,70 | 1150 | | |
| | 10,87 | 1360 | 17,50 | 1355 | 17,60 | 1335 | 13,73 | 1420 | | |
| | 15,60 | 1550 | 22,25 | 1520 | 23,76 | 1500 | 19,23 | 1600 | | |
| | 20,50 | 1710 | 30,50 | 1730 | 31,46 | 1700 | 27,50 | 1840 | | |
| | 30,33 | 1880 | 38,25 | 1970 | 39,62 | 1940 | 30,71 | 1930 | | |
| | 37,75 | 2065 | 40,00 | 2050 | 42,00 | 2030 | 33,10 | 1990 | | |
| | | | | | | | 36,72 | 2110 | | |

* Кривую $\lambda = f(J)$ при $t = 17°$ C определяли после охлаждения образца (от $+421°$ C), не изменяя его положения.

Продолжение таблицы

| Образцы сплавов | $\lambda \cdot 10^6$ | $J \cdot 10^{-3}$ а/м | $\lambda \cdot 10^6$ | $J \cdot 10^{-3}$ а/м | $\lambda \cdot 10^6$ | $J \cdot 10^{-3}$ а/м | $\lambda \cdot 10^6$ | $J \cdot 10^{-3}$ а/м | $\lambda \cdot 10^6$ | $J \cdot 10^{-3}$ а/м | $\lambda \cdot 10^6$ | $J \cdot 10^{-3}$ а/м | $\lambda \cdot 10^6$ | $J \cdot 10^{-3}$ а/м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| К65 | $t = 20°$ C | | $t = 48°$ C | | $t = 105°$ C | | $t = 152°$ C | | $t = 220°$ C | | $t = 442°$ C | | $t = 15°$ C | |
| | 0,33 | 375 | 0,33 | 357 | —0,2 | 350 | 0,22 | 346 | 0,33 | 350 | 0,83 | 384 | — | 340 |
| | 2,75 | 783 | 3,16 | 808 | —2,58 | 830 | 2,43 | 800 | 3,25 | 800 | 5,35 | 850 | 1,00 | 800 |
| | 12,66 | 1180 | 8,40 | 1040 | 6 41 | 1060 | 6,30 | 1040 | 8,33 | 1050 | 11,15 | 1080 | 4,95 | 990 |
| | 21,75 | 1390 | 14,00 | 1220 | 11,40 | 1230 | 11,80 | 1230 | 14,74 | 1230 | 17,80 | 1245 | 11,43 | 1180 |
| | 34,08 | 1590 | 22,57 | 1425 | 19,16 | 1430 | 19,74 | 1430 | 23,66 | 1430 | 26,50 | 1440 | 21,66 | 1390 |
| | 43,40 | 1740 | 34,10 | 1660 | 26,50 | 1570 | 26,90 | 1575 | 34,15 | 1670 | 30,64 | 1575 | 29,00 | 1530 |
| | 48,70 | 1840 | 41,23 | 1835 | 34,50 | 1730 | 34,14 | 1730 | 40,00 | 1820 | 36,30 | 1760 | 34,62 | 1620 |
| | | | 45,40 | 1936 | 40,65 | 1860 | 41,33 | 1880 | 43,15 | 1936 | 36,74 | 1805 | 43,23 | 1780 |
| | | | | | 44,56 | 1960 | 44,00 | 1940 | | | | | 48,30 | 1940 |
| Ю14 | $t = 20°$ C | | $t = 44°$ C | | $t = 90°$ C | | $t = 133°$ C | | | | | | | |
| | 0,75 | 328 | 0,53 | 308 | 0,36 | 327 | 0,93 | 331 | | | | | | |
| | 3,83 | 542 | 4,12 | 556 | 3,56 | 534 | 4,40 | 550 | | | | | | |
| | 9,75 | 717 | 6,90 | 646 | 5,86 | 617 | 5,90 | 610 | | | | | | |
| | 12,75 | 786 | 9,14 | 718 | 7,98 | 692 | 7,52 | 673 | | | | | | |
| | 14,83 | 830 | 11,16 | 786 | 9,98 | 763 | 8,88 | 729 | | | | | | |
| | 16,10 | 860 | 12,54 | 835 | 11,33 | 808 | 10,02 | 782 | | | | | | |
| | 17,63 | 900 | 14,03 | 897 | 12,56 | 872 | 10,84 | 842 | | | | | | |
| | 19,00 | 928 | 14,96 | 1034 | 13,56 | 944 | 11,12 | 914 | | | | | | |
| | 20,00 | 943 | | | 13,76 | 1005 | 11,36 | 970 | | | | | | |

На основании полученных зависимостей $\lambda = f(H)$ построены графики изменения $\lambda$ от $t$ при различных значениях $H$ (рис. 5). Пунктиром показана на рис. 5 область температур, в которой $\lambda$ не измеряли.

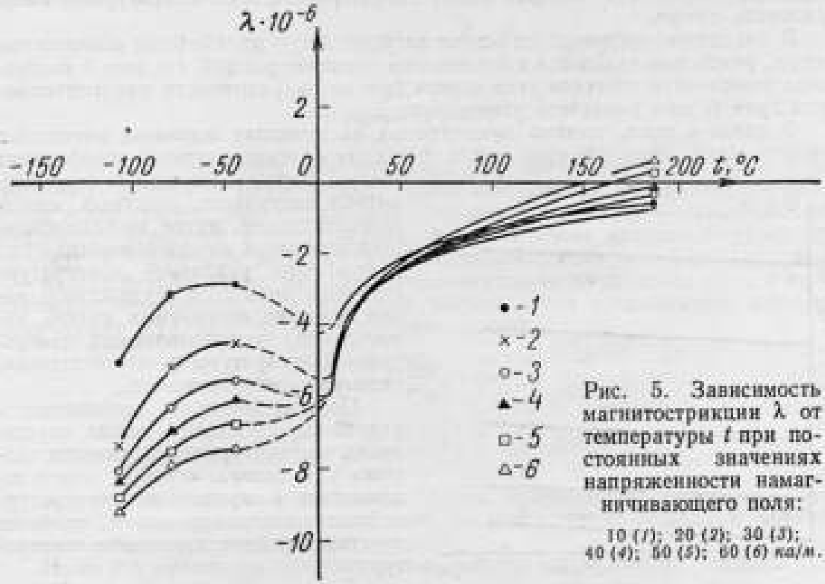


Рис. 5. Зависимость магнитострикции $\lambda$ от температуры $t$ при постоянных значениях напряженности намагничивающего поля:

10 (*1*); 20 (*2*); 30 (*3*); 40 (*4*); 50 (*5*); 60 (*6*) *ка/м*.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Яновский Б. М., Соколова Е. А., Гегин В. С. Установка для измерения магнитострикции в интервале температур от —180 до +440° С. «Измерительная техника», 1959, № 4.
2. Яновский Б. М., Соколова Е. А. Интерференционная установка для измерения магнитострикции ферромагнитных материалов. «Измерительная техника», 1956, № 5.


Поступила в редакцию 20.11 1967 г.

УДК 621.317.374 : 536 : 621.318.153

*Г. Г. КАРБЕЛАШВИЛИ*

ВНИИМ

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ МЕТОДИКИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ТАНГЕНСА УГЛА ПОТЕРЬ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИКОВ

Магнитодиэлектрические сердечники на основе карбонильного железа, являющиеся одним из конструктивных элементов современной электронной и радиотехнической аппаратуры, эксплуатируются в широком частотном и температурном диапазонах.

Надежность работы аппаратуры значительно зависит от стабильности параметров всех ее конструктивных элементов, в том числе и магнитодиэлектрических сердечников. Поэтому важное значение приобретает температурная стабильность добротности, которая может характеризоваться температурным коэффициентом потерь.

В магнитодиэлектриках на основе карбонильного железа были обнаружены потери, резко изменяющиеся с изменением температуры [1]. На рис. 1 изображены зависимости тангенса угла потерь $\mathrm{tg}\,\delta$ от напряженности намагничивающего поля $H$ при различной температуре $t$.

В связи с этим, помимо применяемых на практике основных магнитных характеристик, целесообразно ввести еще одну — температурный коэффициент потерь. Определение его для ферромагнитных материалов, подобных магнитодиэлектрикам, путем непосредственного измерения потерь (сопротивления потерь) при различной температуре связано с большими трудностями: малые значения измеряемых потерь, недостаточная чувствительность измерительной аппаратуры и, следовательно, недопустимая погрешность.

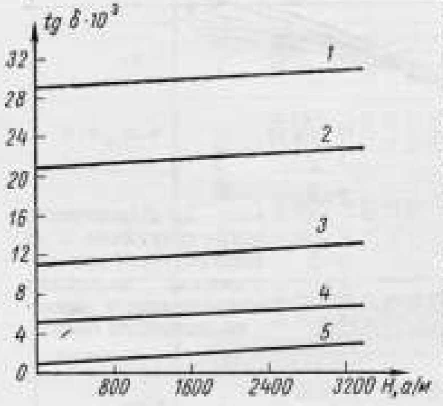

Рис. 1. Зависимость тангенса угла потерь в магнитодиэлектрике из карбонильного железа от напряженности магнитного поля при различных температурах:

90 (*1*); 70 (*2*); 45 (*3*); 31 (*4*); 20° С (*5*).

Поэтому возникает необходимость разработки косвенного метода определения температурной зависимости тангенса угла потерь, который может заключаться в определении температурной зависимости параметров, наиболее чувствительных к изменению температуры.

Для решения поставленной задачи необходимо:

а) рассмотреть температурную зависимость параметров, входящих в аналитические выражения составляющих потерь, и установить параметры, которые в наибольшей степени определяют температурную зависимость составляющих потерь, т. е. установить удельный вес каждой составляющей в температурном изменении общих потерь;

б) найти соотношение между температурными коэффициентами $\mathrm{tg}\,\delta$ и указанных параметров.

Тогда сложное комплексное явление можно свести экспериментально к нескольким более простым, что существенно облегчит задачу определения температурной зависимости тангенса угла потерь.

С этой целью прежде всего необходимо рассмотреть природу составляющих потерь. Магнитодиэлектрик состоит из сферических частиц (диаметром порядка нескольких микрометров) карбонильного железа, разделенных и изолированных друг от друга диэлектриком (полистиролом, парафином, жидким стеклом и т. д.).

Естественно, что потери сердечника отличаются от потерь материала, из которого он изготовлен. Составляющие потерь в магнитодиэлектрике впервые были рассмотрены Иорданом [2]. В последние годы этот вопрос изучался К. М. Поливановым и его сотрудниками [3].

В основу теории Иордана и Поливанова положена известная линейная зависимость в области Релея тангенса угла потерь $\mathrm{tg}\,\delta$ от амплитуды напряженности поля $H_{max}$ и частоты $\omega$:

$$\mathrm{tg}\,\delta = \rho_{доп} + \rho_{г} H_{max} + \rho_{в.\,т}\,\omega, \tag{1}$$

где $\rho_{доп}$ — составляющая дополнительных потерь; $\rho_{г}$ и $\rho_{в.\,т}$ — коэффициенты потерь на гистерезис и вихревые токи.

Исследования И. С. Толмасским [4] образцов магнитодиэлектриков на основе карбонильных ферропорошков показали, что теория К. М. Поливанова наиболее полно раскрывает природу потерь магнитодиэлектриков. По этой теории суммарный тангенс угла потерь равен

$$\operatorname{tg} \delta = P \frac{\mu_{н2}}{\mu_{н1}} + P \frac{4a}{3\pi\mu_н} H_{max} + \omega \left[ P \left( \tau + \frac{1}{10} \mu_0 \mu_н \sigma r^2 \right) + \right.$$

$$\left. + \mu_0 \mu_{н.м} \sigma_м f(a, b) \right], \tag{2}$$

где $P$ — объемная концентрация исходного ферромагнетика; $\mu_{н2}$ и $\mu_{н1}$ — соответственно мнимая и действительная части комплексной начальной проницаемости исходного ферромагнетика; $a$ — постоянная Релея; $\mu_н$ — начальная проницаемость исходного ферромагнетика; $\tau$ — постоянная времени в уравнении вязкости; $\sigma$ — удельная электрическая проводимость исходного ферромагнетика; $r$ — радиус феррочастицы; $\mu_0$ — электродинамическая постоянная; $\mu_{н.\,м}$ и $\sigma_м$ — начальная проницаемость и удельная электрическая проводимость магнитодиэлектрика; $f(a, b)$ — функция размеров сердечника;

$$\operatorname{tg} \delta_{доп} = \rho_{доп} = P \frac{\mu_{н2}}{\mu_{н1}}; \quad \rho_г = P \frac{4a}{3\pi\mu_н};$$

$$\rho_{в.\,т} = P \left( \tau + \frac{1}{10} \mu_0 \mu_н \sigma r^2 \right) + \mu_0 \mu_{н.\,м} \sigma_м f(a, b);$$

$\rho_{в.\,т}$ — коэффициент составляющей потерь, определяемой вязкостью, обусловленной намагничиванием, вихревыми токами в феррочастицах и тороиде (теле всего магнитодиэлектрика).

Ниже дан анализ температурных зависимостей составляющих тангенса угла потерь.

### Температурные зависимости составляющих тангенсов угла потерь

Дополнительные потери (начальные потери на гистерезис). Исходя из формулы $\rho_{доп}$, получим выражение для температурного коэффициента

$$\frac{\Delta\rho_{доп}}{\rho_{доп}\,\Delta t} = \frac{\Delta P}{P\,\Delta t} + \frac{\Delta\mu_{н2}}{\mu_{н2}\,\Delta t} - \frac{\Delta\mu_{н1}}{\mu_{н1}\,\Delta t}$$

или

$$\beta\rho_{доп} = \beta P + \beta\mu_{н2} - \beta\mu_{н1}, \tag{3}$$

где $\beta$ — температурный коэффициент соответствующей величины.

Величина $P$ представляет собой отношение объема, занимаемого ферромагнитной основой $V_ф$, к объему магнитодиэлектрика $V_м$:

$$P = \frac{V_ф}{V_м} = \frac{V_ф}{V_ф + V_д},$$

здесь $V_д$ — объем, занимаемый диэлектриком.

Температурную зависимость $P$ можно представить в виде

$$P_t = \frac{V_{фt}}{V_{мt}} = \frac{V_{ф.\,н}(1 + \gamma_ф t)}{V_{ф.\,н}(1 + \gamma_ф t) + V_{д.\,н}(1 + \gamma_д t)}, \tag{4}$$

где $P_t$ — коэффициент заполнения при температуре $t°$ С; $V_{фt}$, $V_{мt}$, $V_{ф.\,н}$, $V_{д.\,н}$ — объемы ферромагнитной основы, диэлектрика и всего магнитодиэлектрика при $t°$ С и начальной температуре; $\gamma_ф$ и $\gamma_д$ — коэффициенты объемного расширения ферромагнитной основы и диэлектрика.

Из выражения (4) следует, что $P$ не зависит от температуры при $\gamma_ф = \gamma_д$. Если же $\gamma_ф > \gamma_д$, то $P$ увеличивается, а если $\gamma_ф < \gamma_д$, то уменьшается с увеличением $t$. Таким образом, значение $\beta P$ зависит от соотношения $\gamma_ф$ и $\gamma_д$.

Рассмотрев аналитическую зависимость $\beta P$, запишем:

$$\beta P = (1 - P)(\gamma_ф - \gamma_д), \text{ или } \beta P = 3(1 - P)(\alpha_ф - \alpha_д),$$

где $\alpha_ф$ и $\alpha_д$ — коэффициенты линейного расширения ферромагнитной основы и диэлектрика.

Следовательно,

$$\beta \rho_{доп} = 3(1 - P)(\alpha_ф - \alpha_д) + (\beta\mu_{н2} - \beta\mu_{н1}). \qquad (5)$$

Температурные коэффициенты составляющих комплексной начальной магнитной проницаемости $\beta\mu_{н1}$ и $\beta\mu_{н2}$ удобно получить из выражений:

$$(\mu_{н1})_t = \mu_{н1}(1 + \beta\mu_{н1}\Delta t); \quad (\mu_{н2})_t = \mu_{н2}(1 + \beta\mu_{н2}\Delta t).$$

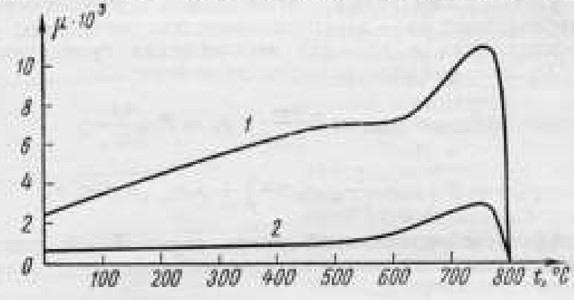


Рис. 2. Зависимость начальной $\mu_н$ (*2*) и максимальной $\mu_{max}$ (*1*) магнитной проницаемости карбонильного железа от температуры.

Потери на гистерезис. Составляющая этих потерь будет

$$\operatorname{tg}\delta_г = \rho_г H_{max} = P \frac{4a}{3\pi\mu_н} H_{max}.$$

Подставив значение постоянной Релея, получим

$$\operatorname{tg}\delta_г = P \frac{4(\mu_{max} - \mu_н)}{3\pi\mu_н H_{max}} H_{max} = \frac{4}{3\pi} \frac{P(\mu_{max} - \mu_н)}{\mu_н},$$

где $\mu_{max}$ — максимальная магнитная проницаемость ферромагнитной основы.

Тогда для температурной зависимости этой составляющей будем иметь

$$\frac{\Delta \operatorname{tg}\delta_г}{\operatorname{tg}\delta_г \Delta t} = \frac{\Delta P}{P \Delta t} + \frac{\Delta\mu_{max}\mu_{max}}{\mu_{max}\Delta t(\mu_{max} - \mu_н)} - \frac{\Delta\mu_н\mu_{max}}{\mu_н \Delta t(\mu_{max} - \mu_н)}$$

или

$$\beta \operatorname{tg}\delta_г = \beta P + \frac{\mu_{max}}{\mu_{max} - \mu_н}(\beta\mu_{max} - \beta\mu_н). \qquad (6)$$

После подстановки значения $\beta P$ в формулу (6) находим

$$\beta \operatorname{tg}\delta_г = 3(1 - P)(\alpha_ф - \alpha_д) + A(\beta\mu_{max} - \beta\mu_н), \qquad (7)$$

где $A = \dfrac{\mu_{max}}{\mu_{max} - \mu_н}$ — постоянная величина.

Температурные зависимости параметров, входящих в выражения (6) и (7), даны во многих работах. В частности, Р. Бозорт [5] и Л. И. Рабкин [1] приводят температурные зависимости для карбонильного железа (рис. 2), из которых видно, что $\beta\mu_{max}$ гораздо больше $\beta\mu_н$.

Таким образом, из сказанного выше можно заключить, что температурная зависимость составляющей потерь на гистерезис определяется в основном температурной зависимостью максимальной проницаемости, а дополнительных потерь — температурными зависимостями составляющих комплексной начальной проницаемости и объема магнитодиэлектрика.

П о т е р и  н а  в и х р е в ы е  т о к и  и  в я з к о с т ь. Как было указано выше (2), под составляющей тангенса угла потерь на вихревые токи и вязкость понимают такую, которая определяется вязкостью процессов намагничивания, вихревыми токами в феррочастицах и во всем теле магнитодиэлектрика. Поэтому условно эту составляющую можно разделить на три части:

$$\operatorname{tg} \delta_{\tau} = \omega P \tau; \tag{8}$$

$$\operatorname{tg} \delta_{f} = \frac{\omega \mu_0 r^2}{10} P \mu_н \sigma; \tag{9}$$

$$\operatorname{tg} \delta_{f_м} = \omega \mu_0 f(a,\ b)\, \mu_{нм} \sigma_м. \tag{10}$$

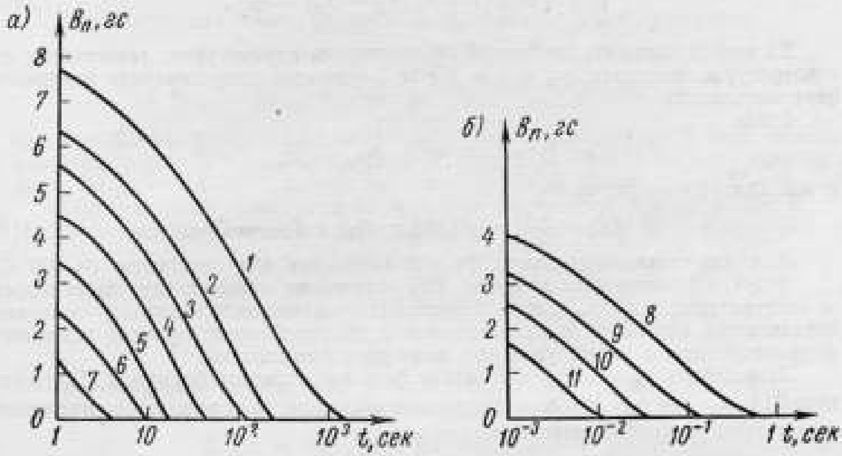


Рис. 3. Зависимость магнитного последействия для карбонильного железа от температуры:

−12,6 (*1*); −5,8 (*2*); −1 (*3*); 10 (*4*); 18 (*5*); 25,1 (*6*); 31 (*7*); 55,5 (*8*); 63,5 (*9*); 76,5 (*10*); 97,5° С (*11*).

В первую часть составляющей (8) входит постоянная времени $\tau$, характеризующая магнитное последействие (магнитную вязкость).

Как известно, Рихтер [6] обнаружил сильную зависимость магнитного последействия от температуры для карбонильного железа (рис. 3, *а* и *б*), имеющую вид

$$B_п = B_0 \psi(t),$$

где $B_п$ и $B_0$ — соответственно индукции, характеризующие мгновенное и конечное (амплитудное) значения магнитного последействия; $\psi(t)$ — функция, описывающая вязкостное изменение индукции во времени.

Из рис. 3 видно, что при температуре —12,6° С (кривая *1*) последействие имеет место в течение многих минут, а при 97,5° С спад индукции происходит в течение $10^{-2}$ *сек*. Такая резкая зависимость последействия от температуры наводит на мысль, что это явление связано не с электромагнитными процессами, а с тепловым движением.

Для исследованных Рихтером образцов из карбонильных ферропорошков значение $\tau$ изменялось с изменением абсолютной температуры $T$ по закону

$$\tau = ce^{L/T},$$

где $c = 5 \cdot 10^{-15}$ — постоянная; $L = Q/k$ ($Q$ — энергия активации; $k$ — постоянная Больцмана).

Температурный коэффициент первой части составляющей выражается уравнением

$$\frac{d\, \mathrm{tg}\,\delta_\tau}{\mathrm{tg}\,\delta_\tau\, dt} = \frac{dP}{P\, dt} + \frac{d\tau}{\tau\, dt}.$$

Так как

$$\frac{d\tau}{\tau\, dt} = -\frac{L}{T^2},$$

то

$$\beta\, \mathrm{tg}\,\delta_\tau = 3\,(1 - P)\,(\alpha_ф - \alpha_д) - \frac{L}{T^2}. \quad (11)$$

Во второй части составляющей (9) основными параметрами, зависящими от температуры, являются: $\mu_н$ и $\sigma = 1/z$ ($z$ — удельное сопротивление исходного ферромагнетика).

Тогда

$$\beta\, \mathrm{tg}\,\delta_f = \beta P + \beta\mu_н + \beta\sigma,$$

и так как $\beta\sigma = -\beta z$, то

$$\beta\, \mathrm{tg}\,\delta_f = 3\,(1 - P)\,(\alpha_ф - \alpha_д) + \beta\mu_н - \beta z. \quad (12)$$

Для карбонильного железа $\beta z \approx 6 \cdot 10^{-3}$ *град*$^{-1}$ в диапазоне 0—100° С.

В третьей части составляющей (10) основными параметрами, зависящими от температуры, будут $\mu_{н.\,м}$ и $\sigma_м$. Начальная проницаемость магнитодиэлектрика определяется начальной проницаемостью и объемной концентрацией исходного ферромагнетика, а также удельным давлением прессования.

Зависимость $\mu_{н.\,м}$ от $\mu_н$ и $P$ может быть представлена формулой Лихтенеккера [1]: $\mu_{н.\,м} = \mu_н^P$. Это выражение дает возможность определить соотношение между температурными зависимостями $\mu_{н.\,м}$ и $\mu_н$:

$$d\mu_{н.\,м} = P\mu_н^{P-1} d\mu_н + \mu_н^P \ln \mu_н dP;$$

$$\frac{d\mu_{н.\,м}}{\mu_{н.\,м}\Delta t} = \frac{P\mu_н^{P-1}\, d\mu_н}{\mu_{н.\,м}\Delta t} + \frac{\mu_н^P \ln \mu_н\, dP}{\mu_{н.\,м}\Delta t};$$

$$\beta\mu_{н.\,м} = P\,\beta\mu_н + P\beta P \ln \mu_н;$$

$$\beta\mu_{н.\,м} = P\,[\beta\mu_н + 3\,(1 - P)\,(\alpha_ф - \alpha_д) \ln \mu_н]. \quad (13)$$

Электрические свойства магнитодиэлектриков на основе металлических ферромагнетиков определяются в основном электрическими свойствами диэлектрического компонента. В таких материалах можно принять удельное электрическое сопротивление металлических частиц бесконечно малым по сравнению с удельным сопротивлением диэлектрического компонента $z_д$. Поэтому $\sigma_м$ или удельное сопротивление $z_м$ всего магнитодиэлектрика могут быть определены через соответствующие параметры диэлектрика. Температурная зависимость удельной проводимости $\sigma_д$ или удельного сопротивления $z_д$ применяемых в магнитодиэлектриках диэлектрических компонентов (естественные и искусственные смолы, жидкое стекло, каучук и др.) имеет экспоненциальный характер:

$$\sigma_м = \sigma_д = ce^{-L/T} \text{ или } z_д = ce^{L/T}.$$

Тогда

$$\beta \operatorname{tg} \delta_{f_{м}} = \beta\mu_{н.\,м} + \frac{L}{T^2},$$

$$\text{так как} \quad \frac{d\sigma_{м}}{\sigma_{м}\, dt} = \frac{L}{T^2}.$$

Учитывая формулу (13), получим

$$\beta \operatorname{tg} \delta_{f_{м}} = P\,[\beta\mu_{н} + 3\,(1 - P)\,(\alpha_{ф} - \alpha_{д}) \ln \mu_{н}] + \frac{L}{T^2}. \qquad (14)$$

Таким образом, температурная зависимость всей составляющей будет

$$\beta \operatorname{tg} \delta_{f,\,\tau} = \beta\mu_{н}\,(P + 1) - \beta z + 3\,(1 - P)\,(\alpha_{ф} - \alpha_{д})\,(2 + P \ln \mu_{н}). \qquad (15)$$

## Суммарный температурный коэффициент тангенса угла потерь

Выражение для температурного коэффициента $\beta \operatorname{tg} \delta$ имеет вид

$$\beta \operatorname{tg} \delta = 3\,(1 - P)\,(\alpha_{ф} - \alpha_{д})\,(4 + P \ln \mu_{н} +$$

$$+ \beta\mu_{н2} - \beta\mu_{н1}) + A\beta\mu_{max} - \beta z + \beta\mu_{н}\,(P + 1 - A), \qquad (16)$$

где $P = 0{,}5 \div 0{,}7$; $\alpha_{ф} = 12{,}2 \cdot 10^{-6}$ *град*$^{-1}$; $\alpha_{д} = (60 \div 100)\,10^{-6}$ (для полистирола); $\alpha_{д} = 8{,}5 \cdot 10^{-6}$ (для мягкого стекла); $\alpha_{д} = (21 \div 36)\,10^{-6}$ *град*$^{-1}$ (для бакелита); $\beta\mu_{max} = 4{,}6 \cdot 10^{-3}$; $\beta z = 6 \cdot 10^{-3}$; $\beta\mu_{н} = 0{,}1 \cdot 10^{-3}$ *град*$^{-1}$; $\mu_{н} = 12$; $A = 1{,}2$.

Температурные коэффициенты даны в интервале температур 0—100° С.

Подставив приведенные выше значения в выражение (16), получим:

$$\beta\mu_{н}\,(P + 1 - A) < 0{,}1 \cdot 10^{-3}\ \textit{град}^{-1},$$

$$3\,(1 - P)\,(\alpha_{ф} - \alpha_{д})\,(4 + P \ln \mu_{н} \approx (0{,}1 \div 0{,}2)\,10^{-3}\ \textit{град}^{-1};$$

$$(\beta\mu_{н2} - \beta\mu_{н1}) < 0{,}1 \cdot 10^{-3}\ \textit{град}^{-1}.$$

Значения этих членов гораздо меньше, чем $\beta\mu_{max}$ и $\beta z$.

Анализ полученного выражения (16) дает возможность заключить, что

$$\beta \operatorname{tg} \delta \approx A\beta\mu_{max} - \beta z \approx -0{,}5 \cdot 10^{-3}\ \textit{град}^{-1}. \qquad (17)$$

Предполагается, что $\beta \operatorname{tg} \delta$ в несколько раз больше $\beta\mu_{н}$. Следовательно, проведенный анализ и полученная зависимость (16) не противоречат этому положению.

Благодаря анализу удалось установить температурную зависимость тангенса угла потерь магнитодиэлектриков на основе карбонильного железа, не прибегая к измерению сопротивления потерь при различных температурах, а также параметры, в наибольшей степени влияющие на температурную зависимость $\operatorname{tg} \delta$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Рабкин Л. И. Высокочастотные ферромагнетики. Физматгиз, 1960.
2. Jordan H. «Elektrik. Nachr. Techn.», 1924, № 1.
3. Поливанов К. М., Колли Я. Н., Соболева Л. П. Проницаемость и потери магнитодиэлектриков. Известия АН СССР, сер. физ., 1959, т. 23, № 3.
4. Толмасский И. С. Проницаемость и потери в магнитодиэлектриках на основе карбонильных ферропорошков. Известия вузов, 1961, № 6.
5. Бозорт Р. Ферромагнетизм. Изд-во иностр. лит., 1956.
6. Вонсовский С. В., Шур Я. С. Ферромагнетизм. ОГИЗ, 1948.


Поступила в редакцию 5.IV.1968 г.

УДК 621.314 : 538.632 : 621.3.089.52

*В. Г. САВЕНКО, А. П. ЩЕЛКИН*

ВНИИМ

# О ТЕМПЕРАТУРНОМ ДРЕЙФЕ НУЛЕВОГО СИГНАЛА ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ХОЛЛА

Температурный дрейф нулевого сигнала преобразователей Холла является одной из наиболее существенных причин, затрудняющих их применение в измерительных приборах высокой чувствительности и точности [1]. Компенсация температурного дрейфа в широком диапазоне температур довольно сложна и не приносит желаемых результатов. Поэтому на практике часто применяют термостатирование измерительного устройства, что значительно усложняет схему и сводит на нет многие преимущества преобразователей Холла.

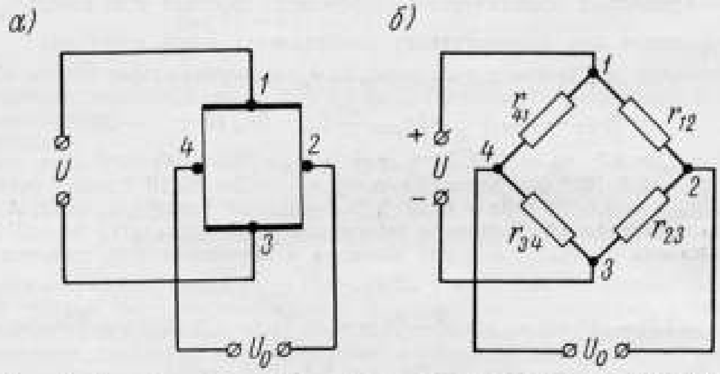


Рис. 1. Преобразователь Холла (*а*) и его эквивалентная схема (*б*):

*1* и *3* — токовые; *2* и *4* — холловские контакты.

Как показывают исследования преобразователей Холла из германия [2], стабильность нулевого сигнала можно повысить при рациональной их конструкции и технологии изготовления. Однако применение указанных в работе [2] рекомендаций при разработке преобразователей из полупроводниковых материалов типа $A_{III}\,B_{V}$ не привело к существенному повышению температурной стабильности. Например, температурный дрейф нулевого сигнала преобразователей Холла из антимонида индия колебался от единиц до десятков микровольт на 1° С.

При выяснении причин возникновения дрейфа авторами было обращено внимание на электрические свойства полупроводника и изменение их по сечению кристалла, из которого изготовлен преобразователь.

Если преобразователь Холла (рис. 1, *а*) представить в виде эквивалентной мостовой схемы (рис. 1, *б*) с сопротивлениями плеч $r_{12}$, $r_{23}$, $r_{34}$ и $r_{41}$ и соответственно их температурными коэффициентами $\alpha_{12}$, $\alpha_{23}$, $\alpha_{34}$ и $\alpha_{41}$, то, как известно из теории мостовых схем, напряжение нулевого сигнала на выходе преобразователя (между холловскими электродами) $U_0$ будет являться частью приложенного напряжения $V$:

$$U_0 = U\frac{r_{12}r_{34} - r_{23}r_{41}}{(r_{12} + r_{23})(r_{34} + r_{41})}. \tag{1}$$

Если при некоторой температуре $t = t_0$ преобразователь полностью сбалансирован, так что $r_{12}r_{34} = r_{23}r_{41}$, то $U_0 = 0$.

При изменении температуры от $t_0$ до $t_1$ вследствие неравенства температурных коэффициентов сопротивлений плеч на выходе преобразователя появится напряжение

$$\Delta U_0 = U \frac{r_{12}(1+\alpha_{12}\Delta t)\, r_{34}(1+\alpha_{34}\Delta t) - r_{23}(1+\alpha_{23}\Delta t)\, r_{41}(1+\alpha_{41}\Delta t)}{[r_{12}(1+\alpha_{12}\Delta t) + r_{23}(1+\alpha_{23}\Delta t) \times \\ \times [r_{34}(1+\alpha_{34}\Delta t) + r_{41}(1+\alpha_{41}\Delta t)]}; \qquad (2)$$

где $\Delta t = t_1 - t_0$.

После преобразования выражения (2) получим

$$\Delta U_0 = U \frac{(\alpha_{12}+\alpha_{34}-\alpha_{23}-\alpha_{41})\,\Delta t + (\alpha_{12}\alpha_{34}-\alpha_{23}\alpha_{41})\,\Delta t^2}{2+\frac{r_{41}}{r_{34}}+\frac{r_{23}}{r_{12}} + \\ + \left(\frac{r_{41}}{r_{34}}\alpha_{41}\alpha_{12}+\alpha_{34}\alpha_{12}+\alpha_{41}\alpha_{12}+\alpha_{41}\alpha_{23}+\frac{r_{23}}{r_{12}}\alpha_{23}\alpha_{34}\right)\Delta t^2}. \qquad (3)$$

Так как в большинстве случаев температурный коэффициент сопротивления преобразователя составляет от 0,001 до 0,01 *град*$^{-1}$, то при небольших изменениях температуры $\Delta t$ слагаемыми, содержащими произведения $\alpha$, можно пренебречь. Тогда формула (3) будет иметь вид

$$\Delta U_0 = U \frac{\alpha_{12}+\alpha_{34}-\alpha_{23}-\alpha_{41}}{2+\frac{r_{41}}{r_{34}}+\frac{r_{23}}{r_{12}}}\,\Delta t. \qquad (4)$$

При $r_{12} = r_{23} = r_{34} = r_{41}$ (что в реальных преобразователях выполняется с достаточной точностью)

$$\Delta U_0 = U \frac{\alpha_{12}+\alpha_{34}-\alpha_{23}-\alpha_{41}}{4}\,\Delta t. \qquad (5)$$

Добавив и отняв в числителе уравнения (5) $\alpha_{23}+\alpha_{41}$ и вынеся за скобки $\alpha_{12}+\alpha_{23}+\alpha_{34}+\alpha_{41}$, получим

$$\Delta U_0 = U\left(1-\frac{2(\alpha_{23}+\alpha_{41})}{\alpha_{12}+\alpha_{23}+\alpha_{34}+\alpha_{41}}\right)\frac{\alpha_{12}+\alpha_{23}+\alpha_{34}+\alpha_{41}}{4}\,\Delta t. \qquad (6)$$

Введем обозначения:

$$\chi = \frac{2(\alpha_{23}+\alpha_{41})}{\alpha_{12}+\alpha_{23}+\alpha_{34}+\alpha_{41}}; \qquad \alpha_{\text{ср}} = \frac{\alpha_{12}+\alpha_{23}+\alpha_{34}+\alpha_{41}}{4}, \qquad (7)$$

где $\chi$ — коэффициент, зависящий от степени однородности полупроводникового материала, которая определяется концентрацией примесей и осью выращивания кристалла [3]; $\alpha_{\text{ср}}$ — среднее арифметическое из температурных коэффициентов сопротивлений плеч преобразователя.

После подстановки формул (7) в (6) получим выражения, характеризующие абсолютное $\Delta U_0$ и относительное $\gamma$ изменения нулевого сигнала от температуры:

$$\Delta U_0 = U(1-\chi)\,\alpha_{\text{ср}}\,\Delta t; \qquad (8)$$

$$\gamma = \frac{\Delta U_0}{U\,\Delta t} = (1-\chi)\,\alpha_{\text{ср}}. \qquad (9)$$

Для случая, когда преобразователь питается от источника тока:

$$\Delta U_0 = U(1-\chi)\frac{\alpha_{\text{ср}}\,\Delta t}{1+\alpha_{\text{ср}}\,\Delta t}; \qquad (10)$$

$$\gamma = \frac{\Delta U_0}{U\,\Delta t} = (1-\chi)\frac{\alpha_{\text{ср}}}{1+\alpha_{\text{ср}}\,\Delta t}. \qquad (11)$$

Из выражений (8) — (11) видно, что температурный дрейф нулевого сигнала преобразователя Холла зависит от абсолютной величины температурного коэффициента сопротивления и степени однородности материала. Чтобы температурный дрейф был близок к нулю, необходимо выполнение хотя бы одного из условий $\alpha_{ср} \to 0$ или $\chi \to 1$.

Условие $\alpha_{ср} \to 0$ выполняется для любого полупроводника * при определенных температуре $t'$ и концентрации примесей $n'$. Однако при $t'$, лежащей в области комнатных температур, $n'$ может оказаться настолько большой, что гальваномагнитные эффекты, в том числе и эффект Холла, будут слабо проявляться.

Для экспериментального определения концентрации примесей, соответствующей нулевому температурному коэффициенту сопротивления в области

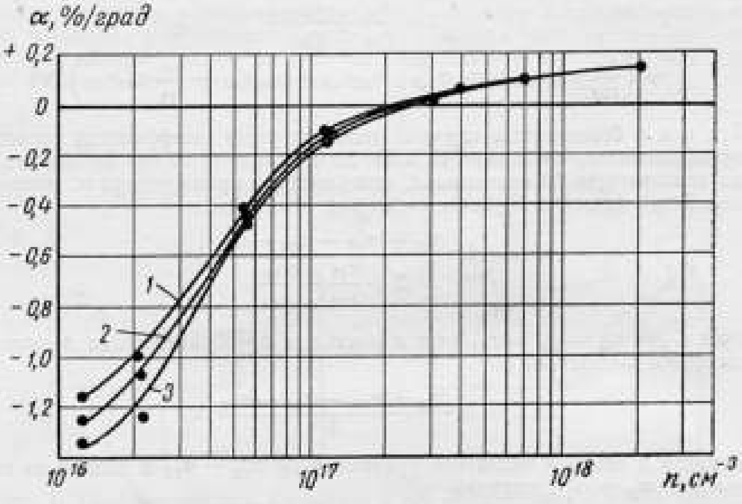


**Рис. 2. Зависимость температурного коэффициента сопротивления антимонида индия от концентрации примесей:**

*1, 2, 3* — соответственно при $t = 45;\ 25;\ 10°$ С.

комнатных температур, были сняты зависимости $\alpha = f(n)$ (рис. 2) для антимонида индия — полупроводника, в котором эффект Холла проявляется наиболее сильно. Из графика видно, что $\alpha$ обращается в нуль при $n = 2{,}6 \cdot 10^{17}$ $см^{-3}$.

Из антимонида индия, легированного теллуром, с различной концентрацией примесей были изготовлены преобразователи Холла, размером $4 \times 2 \times 0{,}02$ *мм*. Усредненные технические характеристики преобразователей из InSb с одинаковой концентрацией примесей приведены в таблице, из которой видно, что наименьший дрейф нулевого сигнала будет при $n = 2{,}6 \cdot 10^{17}$ $см^{-3}$ (т. е. $\alpha_{ср} \approx 0$). В этом случае чувствительность несколько ниже, чем у преобразователей с меньшей концентрацией примесей. Однако проигрыш в чувствительности сравнительно невелик — примерно в два раза (что объясняется уменьшением сопротивления и увеличением тока питания при неизменной рассеиваемой мощности), в то время как температурная стабильность нулевого сигнала возрастает в десятки раз.

Как было отмечено, температурный дрейф нулевого сигнала преобразователя можно также уменьшить повышением однородности полупроводника ($\chi \to 1$). Предварительные эксперименты, проведенные авторами совместно с к. т. н. В. С. Ивлевой (Государственный институт редкометаллической промышленности),

* Точки экстремума на кривых температурного хода проводимостей приведены в работе [4].

показали, что наибольшей однородностью распределения примесей по сечению обладают слитки InSb, выращенные в направлении [211]. Это объясняется выходом фасеточной грани [111] на образующую слитка. Преобразователи Холла, выполненные из такого материала, имеют, как правило, меньший дрейф нулевого сигнала.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Савенко В. Г. Применение эффекта Холла в технике связи. Связьиздат, 1963.
2. Воейков Д. Д. Методы повышения стабильности уравновешивания датчиков Холла, ЖТФ, 1958, т. 28, № 10.
3. Indium Antimonide. A Review of its preparation, properties and device application. «Solid-State Electronics», 1962, v. 5, pp. 211—247.
4. Полупроводники. Под ред. Хеннея Н. Б. Изд-во иностр. лит., 1962.


Поступила в редакцию 22.II.1967 г.

УДК 621.314 : 538.632 : 536.016.35

*А. П. ЩЕЛКИН*
ВНИИМ

# ПОВЫШЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОЙ СТАБИЛЬНОСТИ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ХОЛЛА ИЗ АНТИМОНИДА ИНДИЯ

Преобразователи Холла из InSb привлекают все большее внимание исследователей и инженеров. Экстремально высокие значения подвижности носителей и постоянной Холла открывают возможности для создания на их основе простых магнитометрических устройств с низким порогом чувствительности.

Однако практическому использованию таких устройств препятствует значительный температурный дрейф параметров преобразователей Холла из InSb (изменение постоянной Холла и проводимости), что вызывает изменение чувствительности и снижает точность измерения. Для повышения точности магнитометров, основанных на эффекте Холла, применяют схемы компенсации изменений постоянной Холла, а преобразователь питается от источника тока. Первое приводит к сниже-

| Материал | | | Преобразователь* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| концентрация примесей $n$ $см^{-3}$ | удельное сопротивление $\rho$ $ом \cdot см$ | Температурный коэффициент сопротивления $\alpha$ *град* | сопротивления между электродами, *ом* | | номинальный ток $I_{ном}$ *а* | чувствительность $S$ к полю** *мкв/э* | дрейф нулевого сигнала** *мкв/град* |
| | | | токовыми $R_т$ | холловскими $R_х$ | | | |
| $1,1 \cdot 10^{14}$ | $5,2 \cdot 10^{-3}$ | —1,96 | 27,5 | 25,0 | 0,06 | 215 | 17 |
| $1,2 \cdot 10^{14}$ | $5,1 \cdot 10^{-3}$ | — | 16,5 | 17,0 | 0,08 | 220 | — |
| $1,4 \cdot 10^{14}$ | $4,93 \cdot 10^{-3}$ | —1,58 | 11,5 | 12,1 | 0,095 | 210 | 13 |
| $2,2 \cdot 10^{16}$ | $3,65 \cdot 10^{-3}$ | —0,72 | 10,7 | 10,0 | 0,097 | 195 | 7 |
| $5,7 \cdot 10^{16}$ | $3,13 \cdot 10^{-3}$ | —0,50 | 8,5 | 7,9 | 0,110 | 165 | 3 |
| $2,6 \cdot 10^{17}$ | $1,08 \cdot 10^{-3}$ | —0,02 | 2,9 | 4,0 | 0,185 | 96 | 0,5 |
| $9,0 \cdot 10^{17}$ | $2,9 \cdot 10^{-4}$ | +0,1 | 0,8 | 1,5 | 0,35 | 45 | 1,5 |

* Номинальная мощность преобразователя $P_{ном} = 0,1$ *вт*.

** При $I = I_{ном}$

нию чувствительности, второе намного уменьшает к. п. д. приборов. В то же время температурная нестабильность чувствительности в ряде случаев остается очень большой.

Цель настоящей статьи — показать возможность повышения температурной стабильности преобразователей Холла, выполненных из JnSb.

Известно *, что э. д. с. Холла $e_X$ и чувствительность $S$ к магнитному полю преобразователя Холла определяются выражениями:

$$e_X = \frac{R}{d} IH; \quad S = \frac{e_X}{H} = \frac{R}{d} I,$$

где $R$ — постоянная Холла; $d$ — толщина преобразователя; $I$ — ток питания; $H$ — напряженность измеряемого поля.

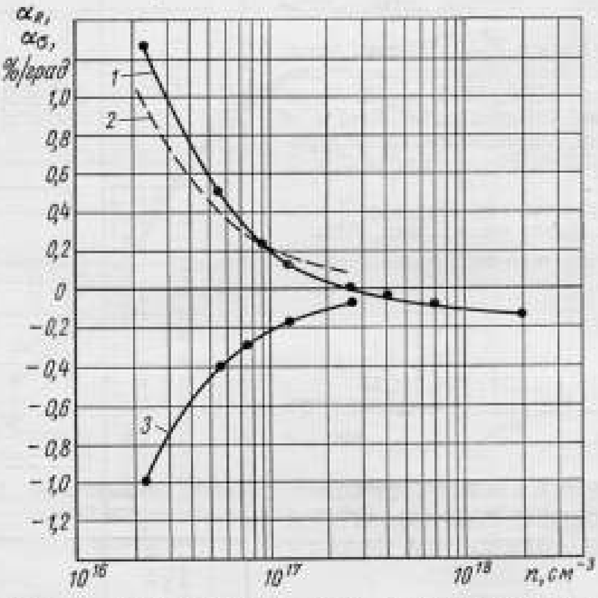


Рис. 1. Зависимости температурных коэффициентов проводимости $\alpha_\sigma$ (кривая 1) и постоянной Холла $+\alpha_R$ и $-\alpha_R$ (кривые 2 и 3) от концентрации примесей.

Если преобразователь питается от источника напряжения,

$$S = \frac{R}{d} \sigma U = KR\sigma,$$

где $\sigma$ — проводимость преобразователя; $U$ — э. д. с. источника; $K$ — коэффициент пропорциональности.

Так как $R$ и $\sigma$ зависят от температуры, то

$$S = KR(t)\,\sigma(t);$$

$$dS = \left[K\sigma(t)\frac{\partial R(t)}{\partial t} + KR(t)\frac{\partial \sigma(t)}{\partial t}\right] dt.$$

---

* Богомолов В. Н. Устройства с датчиками э. д. с. Холла и датчиками магнитосопротивления. ГЭИ, 1961.

Чтобы чувствительность не зависела от температуры, дифференциал должен быть равен нулю, т. е. необходимо выполнить условие

$$\sigma(t)\frac{\partial R(t)}{\partial t} = -R(t)\frac{\partial \sigma(t)}{\partial t} \text{ или } \frac{\partial R(t)}{R\,\partial t} = -\frac{\partial \sigma(t)}{\sigma\,\partial t}.$$

Переходя к конечным приращениям и обозначив $\frac{\Delta R}{R\,\Delta t} = \alpha_R$; $\frac{\Delta \sigma}{\sigma\,\Delta t} = \alpha_\sigma$ ($\alpha_R$ и $\alpha_\sigma$ — температурные коэффициенты постоянной Холла и проводимости соответстветственно), найдем окончательное условие постоянства чувствительности преобразователя Холла к полю:

$$\alpha_R = -\alpha_\sigma.$$

Антимонид индия — единственный в настоящее время полупроводниковый материал с высоким значением постоянной Холла, для которого полученное условие практически выполнимо при выборе соответствующей концентрации примесей.

На рис. 1 приведены экспериментально снятые кривые (1—3) $\alpha_\sigma$, $-\alpha_R$ и $+\alpha_R$ как функции концентрации носителей $n$ при $t = 20°$ С. Из графика видно, что при $n = 9\cdot10^{16}$ $см^{-3}$ температурный коэффициент проводимости $\alpha_\sigma$ равен по абсолютной величине и противоположен по знаку температурному коэффициенту постоянной Холла $\alpha_R$. Строго говоря, это условие выполняется только при определенной температуре. Однако при концентрации носителей $n \geqslant 9\cdot10^{16}$ $см^{-3}$ зависимостью $\alpha_\sigma$ и $\alpha_R$ от температуры практически можно пренебречь.

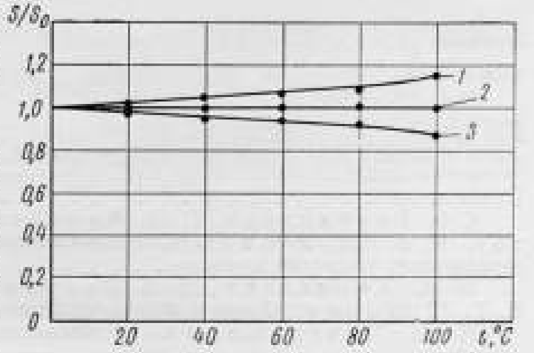


Рис. 2. Относительное изменение чувствительности преобразователей Холла от температуры:

1, 2, 3 — концентрации примесей, равные соответственно $2{,}2\cdot10^{16}$; $9\cdot10^{16}$ и $2{,}6\cdot10^{17}$ $см^{-3}$.

Из антимонида индия, легированного теллуром, с указанной концентрацией носителей было изготовлено на ферритовой подложке несколько преобразователей Холла, технические характеристики которых приведены в таблице. Из таблицы видно, что относительное изменение чувствительности преобразователей не превышало 0,02%/*град*.

| Размер преобразователя Холла, *мм* | Сопротивление между токовыми электродами, *ом* | Номинальный ток $I_{ном}$ *а* | Чувствительность при $I = I_{ном}$ *мкв/э* | Относительное изменение чувствительности $\frac{\Delta S}{S\,\Delta t}$, %/*град* |
|---|---|---|---|---|
| 4×2×0,02 | 4,2 | 0,15 | 450 | 0,01 |
| 4×2×0,02 | 3,9 | 0,16 | 447 | 0,015 |
| 4×2×0,02 | 3,7 | 0,17 | 374 | 0,012 |
| 4×2×0,02 | 4,5 | 0,15 | 520 | 0,02 |
| 3×2×0,02 | 3,9 | 0,16 | 400 | 0,01 |
| 3×2×0,02 | 3,8 | 0,16 | 384 | 0,017 |
| 3×2×0,02 | 4,2 | 0,15 | 450 | 0,01 |

На рис. 2 показаны сравнительные характеристики изменения чувствительности преобразователей Холла из InSb с различной концентрацией носителей при питании их от источника напряжения.

Дальнейшее повышение температурной стабильности $S$ рассмотренным выше способом вряд ли возможно в настоящее время. Это связано с трудностью изготовления полупроводников с точно заданной концентрацией примесей (определяющей и концентрацию носителей) и неоднородным распределением примесей по сечению полупроводникового кристалла.

## СОДЕРЖАНИЕ

## РЕФЕРАТЫ СТАТЕЙ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В СБОРНИКЕ

УДК 621.3.014.081.3 : 538

### К ВОСПРОИЗВЕДЕНИЮ АБСОЛЮТНОГО АМПЕРА ЧЕРЕЗ ЧАСТОТУ ПРЕЦЕССИИ ПРОТОНОВ

*С. В. Горбацевич, Т. Н. Маляревская, С. А. Спектор, Н. В. Студенцов*

*ТРУДЫ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ СССР. ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ МАГНИТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ*, вып. 113 (173), 1971 г., стр. 5—7.

Показано, что две установки для измерения гиромагнитного отношения протона в сильном магнитном поле электромагнита и слабом поле расчетной катушки могут быть использованы как единая установка для воспроизведения ампера, если катушка и рамка, служащая для измерения индукции в зазоре электромагнита, соединены последовательно.

УДК 621.3.013.089.68

### СОЗДАНИЕ ЭТАЛОНА ЕДИНИЦЫ МАГНИТНОГО ПОТОКА

*В. А. Каравагва, Е. А. Соколова, В. Н. Хорев, Е. Г. Шрамков*

*ТРУДЫ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ СССР. ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ МАГНИТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ*, вып. 113 (173), 1971, стр. 7—22.

Описаны изготовление, сборка и измерение геометрических размеров и приведен расчет первичного эталона единицы магнитного потока в виде катушки Кемпбелла. Эталон представляет собой сочетание первичной однослойной катушки, состоящей из двух последовательно соединенных поясов со вторичной многослойной, находящейся в плоскости симметрии, между поясами. Катушки коаксиальны, их обмотки навиты на два склеенных каркаса из непрозрачного плавленого кварца.

Постоянная эталона $K_Ф = 0{,}01001756$ *вб/а* рассчитана на основании его геометрических размеров, относительная средняя квадратическая погрешность постоянной $9 \cdot 10^{-4}\%$. Таблиц 3, иллюстраций 6, библиографий 9.

УДК 53.081.7 : 539.12

### СОГЛАСОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ КОНСТАНТ

*Л. Д. Чечелашвили*

*ТРУДЫ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ СССР. ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ МАГНИТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ*, вып. 113 (173), 1971 г., стр. 23—26.

Обоснована необходимость нового согласования констант и описан его метод. Приведены новые значения постоянной тонкой структуры $\alpha$ числа Авогадро $N$, заряда электрона $e$ и переводного коэффициента Зигбана $\Lambda$.

Библиографий 6.

УДК 539.184.25 : 538

## О НАИБОЛЕЕ ВЕРОЯТНОМ ЗНАЧЕНИИ ПОСТОЯННОЙ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ

*Л. Д. Чечелашвили*

*ТРУДЫ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ СССР. ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ МАГНИТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ*, вып. 113 (173), 1971 г., стр. 27—28.

Рассмотрены три эксперимента, каждый из которых дает значение постоянной тонкой структуры $\alpha^{-1} = 137{,}0359$. Приведены результаты нового согласования констант, где также $\alpha^{-1} = 137{,}0359$. Новое значение $\alpha$ является наиболее вероятным.

УДК 530.145.5.08 : 539.12

## ОБ ИЗМЕРЕНИИ ОТНОШЕНИЯ ПОСТОЯННОЙ ПЛАНКА К ЗАРЯДУ ЭЛЕКТРОНА (Обзор)

*Л. П. Губин, В. В. Жуков, К. А. Краснов*

*ТРУДЫ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ СССР. ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ МАГНИТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ*, вып. 113 (173), 1971 г., стр. 29—37.

Дан обзор наиболее важных, выполненных за рубежом в 1961—1966 гг. экспериментов по определению отношения постоянной Планка к заряду электрона $h/e$ с помощью стационарного и нестационарного эффектов Джозефсона. Наиболее перспективным представляется метод определения отношения $h/e$, основанный на применении нестационарного эффекта. Погрешность этого метода составляет в настоящее время 0,0005%.

Рассмотрен вопрос об объединении двух независимых в настоящее время (из-за недостатка экспериментальных данных) частей системы уравнений для согласования фундаментальных физических констант.

Иллюстраций 7, библиографий 20.

УДК 621.317.441.001.24 : 621.3.013

## ВЫБОР РАЗМЕРОВ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ КАТУШЕК ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОСТОЯННОЙ КАТУШЕК ГЕЛЬМГОЛЬЦА И СОЗДАНИЯ МЕР МАГНИТНОГО ПОТОКА

*Н. В. Студенцов*

*ТРУДЫ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ СССР. ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ МАГНИТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ*, вып. 113 (173), 1971 г., стр. 37—41.

Дан расчет параметров цилиндрических измерительных катушек, обеспечивающих наименьшую погрешность при определении постоянной колец Гельмгольца или создании мер магнитного потока в сочетании с кольцами Гельмгольца. Показано, что при отношении длины измерительной катушки к ее диаметру, составляющем 0,5308, диаметр последней можно выбирать равным радиусу колец Гельмгольца.

Приведены формулы для расчета сцепления витков однослойной и многослойной измерительных катушек с магнитным потоком, создаваемым кольцами Гельмгольца.

УДК 621.317.42.001.24 : 621.318.371

## РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СОЛЕНОИДА

*Н. В. Студенцов, В. Я. Шифрин*

*ТРУДЫ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ СССР. ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ МАГНИТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ*, вып. 113 (173), 1971 г., стр. 41—46.

Выведены сравнительно простые формулы для расчета напряженности магнитного поля длинных прямоугольных и квадратных катушек. Дана поправка на конечное сечение обмотки квадратной катушки.

Полученные формулы позволяют вычислить распределение напряженности магнитного поля в пространстве, окружающем центр симметрии катушки.

Иллюстраций 2, библиографий 2.

УДК 538.12 : 621.318.4

## СИСТЕМА КВАДРАТНЫХ КАТУШЕК ДЛЯ СОЗДАНИЯ ВЫСОКООДНОРОДНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

*Т. Н. Маляревская, Н. В. Студенцов*

*ТРУДЫ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ СССР. ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ МАГНИТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ*, вып. 113 (173), 1971 г, стр. 46—51.

Дан расчет симметричной системы из трех квадратных соосных катушек приблизительно одинакового размера для создания высокооднородного магнитного поля. Система имеет следующие параметры: отношение стороны каждой крайней катушки к стороне средней составляет 1,0033191; отношение расстояния между крайними катушками к их стороне 0,807980, а отношение витков средней и крайней катушек 37/81.

Иллюстраций 2, библиографий 4.

УДК 539.125.4.088

## ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ЧАСТОТЫ СВОБОДНОЙ ПРЕЦЕССИИ ПРОТОНОВ

*Н. В. Студенцов, В. Я. Шифрин*

*ТРУДЫ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ СССР. ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ МАГНИТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ*, вып. 113 (173), 1971 г., стр. 51—53.

Рассмотрены погрешности измерения частоты прецессии протонов, обусловленные экспоненциальным убыванием амплитуды сигнала. Дана количественная оценка погрешностей.

Иллюстрация 1.

УДК 621.317.441.001.24

## РАСЧЕТ ПОСТОЯННОЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ КАТУШЕК МАЛЫХ РАЗМЕРОВ С ОДНОСЛОЙНОЙ ОБМОТКОЙ

*В. А. Караваева*

*ТРУДЫ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ СССР. ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ МАГНИТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ*, вып. 113 (173), 1971 г., стр. 53—56.

Приведен уточненный расчет постоянной однослойных измерительных катушек малых размеров с каркасами различной формы. Определены значения поправок, учитывающих толщину провода. Показано, что значение поправки не зависит от формы и размера каркаса, а определяется только радиусом провода.

Иллюстраций 2.

УДК 621.317.444 : 546.35 : 536.58

## СИСТЕМЫ КОНТРОЛЯ ТЕМПЕРАТУРЫ И ИНТЕНСИВНОСТИ СВЕТА В ПАРОЩЕЛОЧНОМ МАГНИТОМЕТРЕ

*А. П. Наумов*

*ТРУДЫ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ СССР. ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ МАГНИТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ*, вып. 113 (173), 1971 г., стр. 57—59.

Рассмотрены системы регулирования температуры камеры поглощения и контроля интенсивности света спектрального источника макета парорубидиевого магнитометра.

Заданная температура 59 $\pm 0{,}5^\circ$ C поддерживалась постоянной двухступенчатым терморегулятором. Интенсивность света накачки воспроизводили в пределелах $\pm 5\%$ регулированием питания генератора возбуждения.

При работе макета в магнитном поле Земли сдвиги резонансной частоты не превышали $0{,}5 \cdot 10^{-10}$ *тл*.

Иллюстраций 2, библиографий 2.

УДК 621.3.078.6 : 621.317.444 : 546.35

## АВТОМАТИЧЕСКАЯ ПОДСТРОЙКА ЧАСТОТЫ В ПАРОЩЕЛОЧНОМ МАГНИТОМЕТРЕ

*А. П. Наумов*

*ТРУДЫ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ СССР. ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ МАГНИТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ*, вып. 113 (173), 1971 г., стр. 59—66.

Рассмотрена система автоматической подстройки частоты в парощелочном магнитометре с помощью серводвигателя. Показано, что система в реальных условиях обладает погрешностью, не превышающей $5 \cdot 10^{-8}$ при работе рубидиевого магнитометра на магнитном поле Земли.

Иллюстраций 3, библиографий 8.

УДК 621.317.444 : 546.35 : 621.317.421

## НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПАРОРУБИДИЕВОГО МАГНИТОМЕТРА ПРИ ИЗМЕРЕНИИ МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ В ДИАПАЗОНЕ $5\,(10^{-7}-10^{-5})$ *тл*

*В. Д. Ломаный*

*ТРУДЫ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ СССР. ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ МАГНИТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ*, вып. 113 (173), 1971 г., стр. 66—68.

С целью определения метрологических возможностей парорубидиевого магнитометра найдены зависимости отношения сигнала к шуму и полуширины сигнала от температуры камеры поглощения, амплитуды радиочастотного поля, интенсивности поляризованного светового потока и угла наклона оптической оси магнитометрической установки к измеряемому вектору магнитной индукции.

Иллюстраций 2, библиографий 2.

УДК 538.652 : 538.662.15

## МАГНИТОСТРИКЦИЯ И ЕЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ФЕРРОМАГНИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

*Е. А. Соколова*

*ТРУДЫ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ СССР. ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ МАГНИТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ*, вып. 113 (173), 1971 г., стр. 68—73.

Приведены результаты измерения магнитострикции $\lambda$ и ее температурных коэффициентов $\beta$ для образцов сплавов Ю14, К50Ф2, К65 и феррита Ф600 в зависимости от намагниченности (или напряженности намагничивающего поля) и температуры.

Измерения $\lambda$ проводили в диапазоне температур 12,5—442° С для образцов сплавов при намагниченности до $2 \cdot 10^{6}$ *а/м* и (—110) ÷ (+184)° С — для феррита при напряженности поля до 60 *ка/м*.

Погрешность измерения магнитострикции в пределах (1—35) $10^{-6}$ составляла 6—0,5%.

Таблица 1, иллюстраций 5, библиографий 2.

УДК 621.317.374 : 536 : 621.318.153

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ МЕТОДИКИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ТАНГЕНСА УГЛА ПОТЕРЬ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИКОВ

*Г. Г. Карбелашвили*

*ТРУДЫ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ СССР. ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ МАГНИТНЫХ ИЗМЕРЕНИЯ*, вып. 113 (173), 1971 г., стр. 73—79.

Проведен анализ температурной зависимости суммарного тангенса угла потерь и его составляющих магнитодиэлектриков, в результате которого определен удельный вес каждой составляющей потерь в температурном изменении общих потерь. Дана аналитическая зависимость для температурного коэффициента каждой составляющей и суммарного тангенса угла потерь.

Иллюстраций 3, библиографий 6.

УДК 621.314 : 538.632 : 621.3.089.52

## О ТЕМПЕРАТУРНОМ ДРЕЙФЕ НУЛЕВОГО СИГНАЛА ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ХОЛЛА

*В. Г. Савенко, А. П. Щелкин*

*ТРУДЫ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ СССР. ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ МАГНИТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ*, вып. 113 (173), 1971 г., стр. 80—83.

Показано влияние температурного дрейфа нулевого сигнала преобразователя Холла на порог чувствительности измерительных устройств и их точность. Теоретически и экспериментально доказано влияние электрических свойств полупроводника и изменения их по сечению кристалла на температурный дрейф нулевого сигнала. Даны практические рекомендации по выбору кристаллов из арсенида индия для изготовления преобразователей Холла с малым температурным дрейфом нулевого сигнала.

Таблица 1, иллюстраций 2, библиографий 4.

УДК 621.314 : 538.632 : 538.016.35

## ПОВЫШЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОЙ СТАБИЛЬНОСТИ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ХОЛЛА ИЗ АНТИМОНИДА ИНДИЯ

*А. П. Щелкин*

*ТРУДЫ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ СССР. ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ МАГНИТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ*, вып. 113 (173), 1971 г., стр. 83—85.

Рассмотрены принципиальная и практическая возможности создания температурно-стабильных преобразователей Холла из антимонида индия. Показано, что при концентрации примесей $n = 9 \cdot 10^{18}$ $см^{-3}$ температурный коэффициент сопротивления преобразователя равен по абсолютной величине и противоположен по знаку температурному коэффициенту постоянной Холла, что обеспечивает высокую стабильность чувствительности преобразователя Холла при питании его от источника напряжения. Приведены технические характеристики преобразователей из InSb с указанной концентрацией примесей.
Таблица 1, иллюстраций 2.

**ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ МАГНИТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ**

**Труды метрологических институтов СССР**

Выпуск 113 (173)

Редактор *Н. Н. Александрова* Техн. редактор *З. Г. Вагер*
Корректор *Е. Я. Фарберова*

Сдано в набор 17/XI 1970 г. Подписано к печати 25/III 1971 г. М-22185
Бумага типографская № 1, формат бумаги 60×90 1/16. Печ. л. 5,75.
Уч.-изд. л. 7. Бум. л. 2,88. Тираж 2000 экз. Цена 70 коп. Заказ 916

Ленинградское отделение издательства «Энергия», Ленинград, Марсово поле, 1

Ленинградская типография № 6 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
Ленинград, С-144, ул. Моисеенко, 10

Цена 70 коп.