УДК 389.17
ББК 30.10

В.А. Балалаев, В.А. Слаев, А.И. Синяков

П 41 **Потенциальная точность измерений**: Науч. издание — Учебн. пособие / Под ред. В.А. Слаева — С.-Пб.: АНО НПО «Профессионал», 2005 — 104 с.: ил.

Отмечена разница между предельно достижимой точностью (наивысшей достигнутой точностью или предельной чувствительностью) и потенциальной точностью, которая пока еще не достигнута при современном развитии науки, техники и технологий.

На основе системного подхода с использованием теоретико-множественного математического аппарата выделены компоненты измерительной задачи, влияющие на потенциальную точность измерений, а также пространственно-временные ограничения.

Среди компонент измерительной задачи рассмотрены физические ограничения, связанные с дискретностью строения вещества, квантово-механические ограничения и влияния внешних условий измерения.

Рассмотрены и проиллюстрированны на примерах естественные ограничения вследствие флуктуационных явлений, обусловленных дискретной структурой наблюдаемых макроскопических объектов.

Показано, что, поскольку все реально изучаемые физические системы имеют конечную протяженность, как в пространстве, так и во времени, все измеряемые величины или параметры являются усредненными по определенному объему пространства и интервалу времени и подчиняются соотношениям Гейзенберга.

Для научных работников и специалистов, работающих в области метрологии и прецизионного приборостроения. Может быть полезна студентам и аспирантам технических вузов.

Рекомендовано Советом СПФ АСМС
в качестве учебного пособия

ISBN 5-98371-026-5

В.А. Балалаев, В.А. Слаев, А.И. Синяков

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЙ

Под редакцией доктора технических наук,
заслуженного метролога РФ
профессора В.А. Слаева

Санкт-Петербург
«Профессионал»
2005

ных и технических науках, а также в некоторых областях общественных наук.

Ключевой проблемой для метрологии является проблема познания физической реальности, которая рассматривается через призму совокупности физических величин, объективно описывающих реальный мир. В этой связи одной из основных задач метрологии является разработка теоретических и методологических аспектов процедуры достижения точного знания об объектах и процессах окружающего мира, связанных с повышением точности измерений в целом. Как концентрированная и наиболее универсальная форма организующего, целенаправленного опыта, метрология дает возможность проверки достоверности наиболее общих и абстрактных моделей реального мира (в силу того, что измерение, пожалуй, — единственная процедура, реализующая принцип наблюдаемости).

Метрология решает комплекс проблем, в определенном смысле общих с проблемами естественных наук, когда они связаны с процедурой измерения:

- проблема языка, т. е. формализация и интерпретация результатов измерений на уровне единообразия;

ВВЕДЕНИЕ

Метрология по своей структуре может быть отнесена к «вертикально» построенной системе знаний, т. к. на верхнем уровне исследований она непосредственно примыкает к философии естествознания, на среднем уровне выступает как самостоятельный раздел естественных (точных) наук, а на нижнем уровне обеспечивает использование достижений естественных наук для получения решений конкретных измерительных задач, т. е. выполняет функции технической науки. В таком сочетании она охватывает диапазон задач от уровня критерия истинности научного познания до критерия правильности в процессе обмена материальными ценностями (товарообмена).

Метрология как наука о мерах или об измерениях, приводимых к эталонам [12], оперирует одним из наиболее продуктивных понятий — понятием точности измерений, которое используется во всех без исключения естествен-

- проблема структуризации, определяющая, какие данные следует использовать в зависимости от вида решаемой измерительной задачи, и связанная с системным подходом к измерению;
- проблема стандартизации, т. е. нахождения условий, при выполнении которых будет гарантирована точность и правильность результата измерений;
- проблема оценки точности и обеспечения достоверности измерительной информации в различных ситуациях.

В настоящее время в связи с развитием информационных технологий, интеллектуализацией измерительных систем и средств измерений, математизацией социальных, биологических и гуманитарных наук все чаще предпринимаются попытки расширительного толкования метрологии [22] как науки об измерениях не только физических величин, но и как составной части «гносеотехники», информатики, «информологии» и т. д., имеющей своей основной задачей «построение и передачу общезначимых шкал для величин любой природы», в том числе и нефизических. В связи с этим продолжает оставаться актуальным уточнение места метрологии в системе наук и ее предметной области, т. е. ее основных разделов и направлений. Этому вопросу

посвящено довольно большое число публикаций [1, 7, 17, 23, 25 – 27 и др.].

Ограничиваясь только теоретическими основами метрологии, т. е. отвлекаясь от ее законодательной, прикладной и организационной ветвей, и принимая во внимание общепринятую классификацию наук в виде «треугольника» с вершинами, соответствующими философским, естественным и социальным наукам [8], можно проанализировать связи метрологии с другими науками с точки зрения их взаимодействия, взаимной полезности и взаимодополнения. Среди них, в первую очередь, были выделены философия, математика, физика и технические науки. Приведены те разделы упомянутых наук, результаты которых активно используются в теоретической метрологии, предоставляющей им, в свою очередь, материал для осмысления.

Известно, что в предметной области теоретической метрологии можно выделить два раздела: *общую теорию измерений* и *теорию обеспечения единства измерений*.

При этом *общая теория измерений* включает в себя следующие направления:

- исходные положения, понятия, принципы, постулаты, аксиоматика, методология, термины и их определения;

Теория обеспечения единства измерений состоит из следующих направлений:

- теория единиц физических величин, их систем и анализа размерностей;
- теория эталонов;
- теория воспроизведения, хранения и передачи размера единиц физических величин;
- теория оценивания нормируемых метрологических характеристик средств измерений;
- методология проведения метрологических процедур;
- теория метрологической надежности и оценивания межповерочных интервалов;
- теория оценивания качества метрологических систем и методология оптимизации и прогнозирования их развития.

Рассмотрим особенности операций измерительной процедуры по цепочке:

взаимодействие объекта
и средства измерений
↓
различение и селекция сигнала
измерительной информации
↓
преобразование
↓

- моделирование и исследование объектов, условий, методов, средств и методик выполнения измерений;
- теория шкал, мер, метрик, реперов и норм;
- теория измерительных преобразований и преобразователей;
- теория распознавания, идентификации, оценивания наблюдений и обработки данных;
- теория погрешностей результатов измерений;
- теория динамических измерений и восстановления сигнала;
- теория повышения точности, чувствительности и *предельных возможностей измерений, учитывающих квантовые и другие ограничения*;
- автоматизация и интеллектуализация измерительных технологий, интерпретация и использование измерительной информации при подготовке к принятию решений;
- теория оптимального планирования измерительного эксперимента;
- теория метрологических систем;
- теория оценивания качества измерений, а также технической и социально-экономической эффективности метрологической и измерительной деятельности.

↓
сравнение с мерой
↓
отображение результатов измерений

Взаимодействие исследуемого объекта и средства измерений предполагает поиск, обнаружение и восприятие (рецепцию) измеряемой физической величины, а также, при необходимости, некоторые подготовительные операции типа пробоотбора и пробоподготовки, воздействия на объект для получения отклика (стимуляции), определения ориентации и локализации датчиков в пространстве и времени.

Различение или селекция сигнала измерительной информации подразумевают выделение именно того свойства объекта, которому соответствует измеряемая физическая величина, включая выделение полезного сигнала на фоне шумов с использованием методов и средств борьбы с помехами.

Преобразование включает в себя изменение физической природы носителя информации или его формы (усиление, ослабление, модуляция, манипуляция, дискретизация и квантование, аналого-цифровое и цифро-аналоговое преобразования, кодирование и декодирование и др.), а также

передачу сигналов измерительной информации по каналам связи и, при необходимости, запись, хранение и воспроизведение их в устройствах памяти.

Сравнение с мерой может осуществляться как непосредственно, так и опосредованно — с помощью компаратора или через какой-либо физический или технический механизм. Обобщением этой операции является информационное сравнение с образом.

Отображение результатов измерений предполагает обработку данных по выбранному алгоритму, оценку погрешностей измерения, индикацию результатов на цифровом табло, стрелочном приборе, самописце, распечатку или графическое представление, использование их в системах автоматического управления, семантический анализ (оценку) полученных результатов, идентификацию, структурирование и передачу в базы данных и знаний систем искусственного интеллекта.

Важным аспектом при проведении процедуры измерений является использование априорной и апостериорной информации. При этом под априорной информацией понимаются выбранные модели объекта, условий, метода и средств измерений, тип измерительной шкалы, предпола-

Принимая во внимание технологию проведения измерений, включающую в себя перечисленные выше операции взаимодействия объекта и средства измерений, различения и селекции сигнала, преобразования измерительной информации, сравнения с мерой и отображения результатов измерений, можно рассмотреть различные используемые при измерениях шкалы (и соответствующую аксиоматику) — от номинальной до абсолютной, и обсудить соотношение между набором шкал и последовательными этапами процедуры измерений.

На основе анализа связей общей теории измерений, как составной части теоретической метрологии, с философией, математикой, физикой и техническими науками можно выявить следующие ее математические основы [20].

Среди разделов математики, результаты которых используются в метрологии, необходимо упомянуть:

- теорию множеств, в т. ч. меры и метрики;
- теорию чисел, в т. ч. аддитивную и метрическую;
- математический анализ, включающий в себя дифференциальное, интегральное, вариационное, операционное, векторное и тензорное исчисления;

гаемые диапазоны амплитуд и частот измеряемой величины и т. д. Варианты использования апостериорной информации включают в себя уточнение используемых моделей, распознавание образов или их идентификацию, отнесение к классам эквивалентности, структуризацию для пополнения баз данных и знаний, а также подготовку к принятию решений.

К основным процедурам, которым подвергаются средства измерений, относятся проверка, контроль, испытания, градуировка, калибровка, поверка (метрологическая аттестация), сертификация, диагностика и коррекция. Из них к метрологическим можно отнести, в первую очередь, градуировку, калибровку, поверку, сертификацию и аттестацию.

Следует отметить, что попытки создания общей теории измерений с использованием различных подходов предпринимались уже неоднократно. Среди этих подходов можно упомянуть [9, 13, 24, 28 и др.]: энергетический, информационный, термодинамический, алгоритмический, *теоретико-множественный*, теоретико-групповой, статистический, репрезентационный, квантовый, с использованием алгебраических и геометрических инвариантов, и др.

- высшую алгебру, в т. ч. алгебру множеств, мер, функций; теорию групп, колец, тел, полей, решеток и других алгебраических систем; теорию математических моделей и алгебраических инвариантов и т. д.;
- высшую геометрию, в т. ч. евклидову, аффинную, проективную, риманову, Лобачевского, и др.;
- теорию функций и функциональный анализ, включая теорию метрических пространств, норм и представлений;
- спектральный и гармонический анализ, в т. ч. теорию ортогональных рядов и обобщенных функций;
- математическую физику с моделями, а также прямыми, обратными и краевыми задачами;
- теорию вероятностей и математическую статистику, в т. ч. статистический анализ (конфлюэнтный, ковариационный, корреляционный, регрессионный, дисперсионный, дискриминантный, факторный, кластерный); многомерный анализ, а также теорию ошибок, обработки наблюдений и статистического оценивания; теорию оптимального планирования эксперимента и др.;
- теорию игр, включая теорию полезности и многокритериальные задачи;

- теорию систем, в т. ч. динамических; эргодическую теорию, теорию возмущений и устойчивости, теорию оптимального управления, теорию графов, теорию надежности и восстановления, и др.;
- математическую логику, включая теорию алгоритмов и программирования, исчисление предикатов, пропозициональное исчисление, математическую лингвистику, теорию доказательств, теорию обучающих систем, и т. д.;
- вычислительную математику.

Целью измерений, как отмечает известный польский метролог Я. Пиотровский [14], является «формирование некоторого объективного образа действительности» в виде знакового символа, а именно — числа. Поскольку результаты измерения мы хотим получить в виде числа, в частности — именованного, то шкала физической величины должна соответствовать аксиомам [10] используемой числовой системы.

В то же время И. Ньютон [29] для числа дал такое определение: «Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к величине того же рода, принятой за единицу». Это определение в явном виде соответствует пропорциональной шкале или шкале отношений [9, 15].

физической величины на данном этапе развития науки и техники, т. е. наивысшую точность, достигнутую в настоящее время.

Под «*потенциальной точностью измерений*» понимается предельно достижимая точность, которая еще не реализована на современном этапе развития науки, техники и технологии производства.

Известно [19], что средство измерения при взаимодействии с объектом всегда оказывает определенное влияние на объект измерения. До тех пор, пока это взаимодействие находится в области применения классической физики, такое воздействие средства измерений на объект измерения может быть учтено введением в результат измерения соответствующих поправок. Однако в квантовой области это принципиально невозможно, поскольку прибор искажает неконтролируемым образом волновую функцию объекта, и информация о поведении объекта измерений принципиально не может быть получена аппроксимацией неискаженной волновой функции.

Кроме того, необходимо учитывать естественные тепловые флуктуации [11] и другие ограничения.

Несмотря на то, что проблеме «*предельных измерений*», под которыми, по существу, понимается использование средств измерений с предельной чувствительностью, было посвящено ряд работ [3—6, 16, 19 и др.], «*потенциальной точности измерений*» уделялось явно недостаточно внимания. Задачей настоящей книги является восполнение, по возможности, этого пробела.

Будем понимать под «*предельной точностью измерений*» ту точность, с которой может быть выполнено измерение

Понятие системного подхода

Сущность системного подхода при изучении какого-либо объекта заключается, прежде всего, в рассмотрении (анализе) этого объекта как *системы*, состоящей из взаимосвязанных элементов. Однако помимо вычленения в объекте элементов и установления связей между ними (т. е. определения структуры системы), не менее важным в этом подходе является установление границ системы и ее взаимодействия с «окружающей средой», изучение «входов и выходов» системы и процессов преобразований между ними. Для систем, связанных с человеческой деятельностью (т. е. организационных, управляемых), важным является также определение целей и задач системы, связанных с ее назначением.

Наиболее адекватным математическим аппаратом, используемым при формализованном описании и изучении различных систем, является *аппарат теории множеств.*

Язык теории множеств — это универсальный язык математики: любое математическое утверждение можно сформулировать как утверждение о некотором соотношении между множествами. Напомним некоторые основные элементы этого «языка», необходимые для понимания дальнейшего материала.

СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ ИЗМЕРЕНИЯ

С проблемой потенциальной точности измерений сталкиваются постоянно и физики-экспериментаторы, осуществляющие высокоточные физические эксперименты, и метрологи-исследователи, создающие эталоны единиц измеряемых физических величин. Однако, в отличие от других проблем измерений, эта проблема не получила до сих пор должного систематического изучения и анализа в метрологической литературе и никогда еще не была представлена самостоятельным разделом в метрологических справочниках, пособиях и, тем более, в учебниках.

Это обстоятельство наложило специфический отпечаток на изложение, т. к. потребовало создания определенного подхода к проблеме и введения ряда дополнительных понятий.

Понятие *множества* как исходное, фундаментальное понятие теории множеств, является неопределимым. Интуитивно под множеством понимается совокупность определенных, вполне различимых сущностей (объектов, элементов), рассматриваемая как единое целое. Это фактически эквивалентно также понятию «система». Отдельные сущности, из которых состоит множество, называют *элементами* множества. Общим обозначением множества служит пара фигурных скобок {...}, внутри которых заключены элементы множества.

Конкретные множества обычно обозначаются прописными буквами алфавита, элементы множества — строчными. Принадлежность элемента a множеству M обозначается, как $a \in M$ (a принадлежит M).

Пример 1

$M_1 = \{$Алексеев, ... , Иванов, ... , Яковлев$\}$ — множество студентов в группе;

$M_2 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ — множество всех натуральных чисел;

$M_3 = \{0, 1, 2, 3, \dots, N\}$ — множество всех натуральных чисел, не превосходящих N;

$M_4 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — множество n состояний какой-либо системы X;

M_5 — футбольная команда «Зенит» (т. е. множество ее футболистов);

M_6 — множество всех футбольных команд высшей лиги; очевидно, что $M_5 \in M_6$.

Последний пример показывает, что элементом множества может быть также множество.

Существует два способа задания множеств: *перечисление* и *описание*. Примерами первого способа (перечисление всех входящих в множество элементов) являются задания всех приведенных выше множеств $M_1 \div M_6$.

Описательный способ состоит в том, что указывается характерное свойство $p(x)$, которым обладают все элементы множества: $M = \{x \mid p(x)\}$. Так, множества M_2, M_3, M_5 в примере 1 можно задать следующим описанием:

$M_2 = \{x \mid x$ — целое число$\}$;

$M_3 = \{x \in M_2 \mid x \leqslant N\}$;

$M_5 = \{x \mid x$ — футболист команды «Зенит»$\}$.

Два множества называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Отсюда следует, что порядок элементов в множестве несущественен: $\{3, 4, 5\} = \{4, 3, 5\}$. Отсюда также следует, что в любом множестве не должно быть неразличимых (одинаковых) элементов: запись $\{a, в, c, в\}$ следует считать некорректной и подлежащей замене на $\{a, в, c\}$.

Множество X называется *подмножеством* множества Y, если любой элемент X является и элементом Y. В обозначении: $X \subseteq Y$ символ $\subseteq$ называется знаком включения («Y содержит X»). Так, если M_1 — множество студентов группы, а M_1^0 — множество отличников той же группы, то $M_1^0 \subseteq M_1$, т. к. отличник группы одновременно является и ее студентом.

Множества бывают конечными (т. е. состоят из конечного числа элементов) и бесконечными.

Число элементов в конечном множестве M называется *мощностью множества* и часто обозначается $|M|$.

Важным является понятие *упорядоченного множества* (или *вектора*) — совокупности элементов, в которой каждый элемент занимает определенное место, т. е. совокупности, в которой элементы образуют последовательность. Сами элементы при этом называют *компонентами* (или *координатами*) вектора. Примеры упорядоченных множеств (векторов): множество людей, стоящих в очереди; множе-

ство слов во фразе; числа, выражающие географические долготу и широту точки на местности, и т. п. Для обозначения упорядоченных множеств (векторов) используют угловые $\langle ... \rangle$ или круглые (...) скобки. Мощность таких множеств называют длиной вектора. В отличие от обычных множеств в упорядоченных множествах (векторах) могут быть и одинаковые элементы: два одинаковых слова во фразе и т. п.

Формализованное описание измерительной задачи

Ранее [2] уже были использованы элементы системного подхода. В частности, были рассмотрены отдельные компоненты измерения, определена общая цель любого измерения, выявлены этапы последовательных преобразований в процессе решения измерительной задачи и т. д.

Систематизируя все элементы системного подхода, обратимся сначала к элементам измерения (как системы), появляющимся на этапе постановки измерительной задачи.

Под *измерительной задачей* будем понимать описание (формулировку) проблемной измерительной ситуации, которая предшествует подготовке к проведению измерения, т. е. формулировку задачи: «что мы хотим делать?».

Очевидно, что для этого необходимо знать (указать, определить): какую величину необходимо измерить, на каком конкретно объекте, в каких внешних условиях, с какой точностью, в каких пространственно-временных границах и т. п.

Используя формализм теоретико-множественного аппарата, измерительную задачу можно записать в виде следующего упорядоченного множества (вектора):

$$Z_i \equiv \langle \varphi_i, o_i, \psi_i, \Delta\varphi_i, g_i, t_i, \Delta t_i, \ldots \rangle, \quad (1)$$

где φ_i — измеряемая величина как качество;

o_i — объект изучения (носитель измеряемой величины);

ψ_i — условия измерений (совокупность внешних влияющих факторов);

$\Delta\varphi_i$ — доверительный интервал, в пределах которого необходимо получить искомое значение измеряемой величины (с заданной доверительной вероятностью);

g_i — форма представления результата измерения;

t_i — момент времени проведения измерения;

Δt_i — временной интервал, за который необходимо выполнить измерение.

Здесь перечислены все наиболее общие элементы, существенные для постановки любой измерительной зада-

чи. Важно отметить, что полная и корректная формулировка измерительной задачи представляет сама по себе сложную задачу, что будет видно из приведенных далее примеров. В то же время некорректная и неполная постановка измерительной задачи может привести либо к невыполнимости измерения, либо к его неправильным результатам.

Постановка конкретной измерительной задачи, в свою очередь, зависит от практической (производственной) цели, для достижения которой необходимо принятие решения на основе полученной измерительной информации. Эту практическую цель с измерительной задачей должна связывать цепь (иногда довольно сложная) логических рассуждений, выполняемых потребителем измерительной информации. Корректность и полнота формулировки измерительной задачи целиком зависит от опыта и искусства потребителя измерительной информации. Однако в любом случае эта логическая цепочка должна заканчиваться набором параметров, конкретизирующих элементы множества (1).

Пример 2

Пусть конечная практическая цель — успеть доставить груз из пункта Б в пункт А в заданное время (T_0). Для этого

$$\{Z_i(\varphi)\} = \langle\{o_i\}, \{\psi_i\}, \{\Delta\varphi_i\}, \{g_i\}, \{t_i\}, \ldots\rangle, \quad (2)$$

$$o_i \in \{o_1, o_2, \ldots\}, \psi_i \in \{\psi_1, \psi_2, \ldots\} \text{ и т. д.,}$$

определяемое многообразием реализаций входящих в (2) элементов. На практике, однако, выделяют лишь отдельные группы измерительных задач, близких не только по своим параметрам элементов, но и по способам решения этих задач.

Измерение как процесс решения измерительной задачи

Введя понятие измерительной задачи, естественно весь дальнейший процесс, связанный с измерениями (точнее — с достижением конечной цели измерения — нахождением значения измеряемой величины), рассматривать как процесс решения этой измерительной задачи. В таком процессе обычно выделяются три этапа.

На первом этапе, в соответствии с измерительной задачей, отражающей вопрос «что делать?», разрабатывают *план измерительного эксперимента*, отвечающий на вопрос «как делать?». На этом этапе осуществляют выбор единицы измеряемой физической величины, метода и необходимых

нужно принять решение о том, когда (в какой момент времени) ($T_н$) необходимо отправиться на вокзал с места пребывания (пункт Б). Конкретизируя измерительную задачу, уточняем, прежде всего, что измеряемой величиной должно быть время, точнее — интервал времени ΔT_n, за который можно преодолеть путь от А до Б.

Объектом изучения здесь является процесс передвижения от А до Б; очевидно, что процесс этот должен быть детализирован по способу передвижения (вид транспорта и маршрут). Точность, с которой необходимо определить ΔT, зависит от дефицита времени: если условия позволяют прибыть на вокзал с пятиминутным запасом времени $T_0 - T_н = \Delta T_n + 5$ мин, то достаточно принять доверительный интервал равным ± 1 мин с доверительной вероятностью 0,997. Следовательно, среднее квадратическое отклонение результата измерения должно быть $\sigma_{\Delta T} \cong 20$ с. Предпочтительна цифровая форма представления результата. Момент времени, к которому должен быть получен результат (T_P), должен предшествовать $T_н$, т. е. $T_P \cong T_н - n$ ч, при этом n определяется распорядком дня отъезжающего.

Очевидно, что даже для одной измеряемой величины возможно практически бесконечное множество различных постановок измерительных задач:

На этом же этапе производят (расчетом) предварительную оценку неопределенности ожидаемого результата $\hat{\Delta}\varphi$ (интервал неопределенности значений измеряемой величины) при использовании составленного плана и сравнивают эту оценку с требуемой точностью измерений ($\Delta\varphi$).

На втором этапе измерительного процесса осуществляют собственно измерительный эксперимент, т. е. процесс реальных (физических) преобразований, связанных с физическим взаимодействием выбранных средств измерений с объектом и внешними условиями (при участии оператора), в результате которых средство измерений выдает отклик на измеряемую величину (отсчет x_s).

Наконец, *на третьем,* последнем, *этапе* измерительной процедуры полученный отклик средства измерений преобразуют в значение измеряемой величины и оценивают апостериорную степень его неопределенности (в случае многократных измерений), тем самым достигая конечной цели измерения — получения результата, соответствующего решению поставленной измерительной задачи.

Все преобразования и операции на втором и третьем этапах осуществляют в соответствии с разработанным на первом этапе планом измерительного эксперимента.

средств измерений, уточняют методику их использования, а также методы и средства обработки экспериментальных данных, определяют оператора (экспериментатора), который может выполнить измерительный эксперимент.

Информацию, соответствующую плану измерительного эксперимента, обычно оформляют в виде *методики выполнения измерений*. По аналогии с (1) структурно ее можно формализовать упорядоченным множеством

$$U_z \equiv \langle [\varphi], m, s, v, w, \ldots \rangle, \tag{3}$$

где $[\varphi]$ — единица измеряемой физической величины;

m — выбранный метод измерений (или алгоритм использования выбранных технических средств s и w);

s — средства измерений, используемые для решения данной измерительной задачи;

v — оператор (экспериментатор), реализующий план измерительного эксперимента;

w — средства обработки результатов измерительного эксперимента (или другие вспомогательные средства) (здесь всюду опущен индекс «i», означающий принадлежность множества U_z и каждого его компонента к данной измерительной задаче z_i).

Общая схема измерительного процесса (структура измерительной цепи) изображена на рис. 1.

Формализация измерения как системы

Из приведенного описания структуры измерительной цепи видно, что она содержит как компоненты измерительной задачи (1), так и компоненты плана измерительного эксперимента (3). Объединяя эти множества, получим новое множество:

$$I_Z \equiv \langle Z_i, U_z \rangle, \qquad (4)$$

где $Z_i \subseteq I_z$, $U_z \subseteq I_z$, которое соответствует конкретному отдельному измерению как системе в целом. В описании (4) элементы, содержащиеся в Z_i, являются **неуправляемыми** компонентами измерения (т. е. наперед заданными в данной измерительной задаче), а содержащиеся в U_i — **управляемыми** (выбираемыми при составлении плана измерительного эксперимента).

Относительно формальных описаний (1), (3) и (4) необходимо сделать следующие замечания.

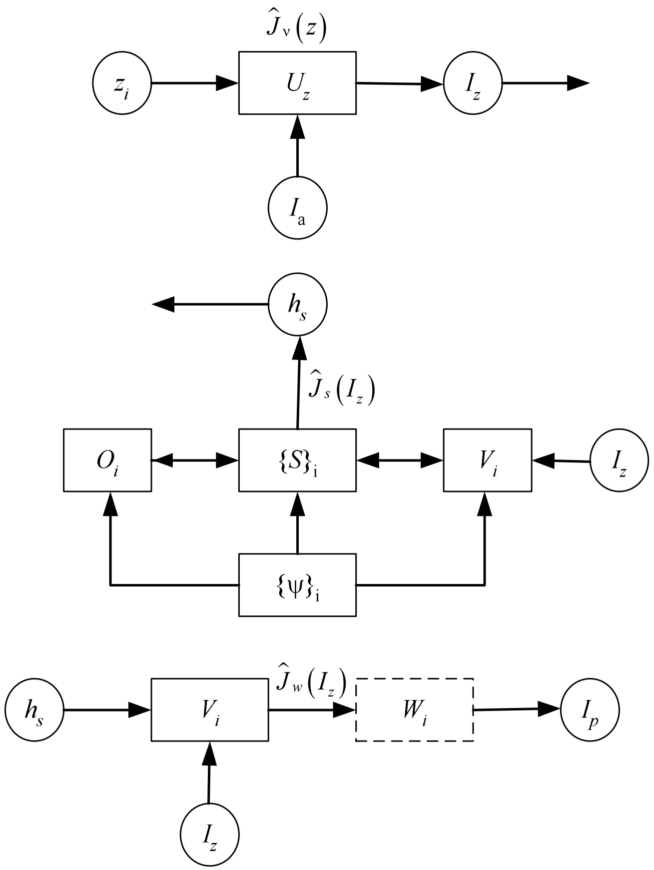

Рис. 1. Этапы измерения как процесса решения измерительной задачи:
$\hat{J}_v(z)$, $\hat{J}_s(I_z)$, $\hat{J}_w(I_z)$ — операторы последовательного преобразования априорной информации I_a в апостериорную на разных этапах процесса измерения;
остальные обозначения ясны из текста

3) В результате анализа измерительной задачи на этапе составления плана измерительного эксперимента может выявиться, что вообще нет необходимости проводить эксперимент как таковой: объем априорной информации может оказаться достаточным, чтобы найти искомое значение измерительной информации *расчетным путем* с требуемой точностью.

4) При составлении плана измерительного эксперимента может быть выявлен не один, а несколько вариантов решения измерительной задачи, удовлетворяющих ее условиям. В этом случае при выборе окончательного варианта руководствуются, как правило, соображениями экономического характера (выбирают вариант, требующий минимума затрат).

Целевая функция системы

Целевая функция системы I_z определяется общим назначением (целью) измерений — получением информации о значении измеряемой величины φ с необходимой (заданной) точностью, характеризующейся интервалом Δφ. Следовательно, цель измерения будет достигнута при выполнении условия

1) Ни одно из указанных множеств никак не подменяет детального, содержательного анализа конкретной измерительной ситуации, которая и вызывает необходимость проведения конкретного измерения. Указанные множества служат *лишь ориентиром для этого анализа*, подчеркивая те компоненты измерений, которые присутствуют в каждом из них и по каждому из которых необходимо иметь вполне определенную информацию.

2) Все компоненты измерения в (4) появляются (с точки зрения информации о них) на этапе постановки измерительной задачи и этапе составления плана измерительного эксперимента, т. е. *до проведения* собственно измерительной операции (эксперимента). Этим еще раз подчеркивается большая, определяющая роль априорной информации при измерениях.

Утверждение о том, что **любое конкретное измерение требует наличия определенной (конечной) априорной информации** о компонентах (4) измерения настолько универсально, что выступает в роли еще одного **постулата метрологии.** Достаточно убедительная иллюстрация этого утверждения дана в предыдущих разделах и будет подкреплена в дальнейшем.

обеспечивающий необходимую точность измерений; при этом методом измерений служит метод непосредственного отсчета оператором, которым является сам отъезжающий.

3) Если есть сомнение в том, что внешние условия при перемещении из пункта Б в пункт А не оказывают случайных воздействий на время передвижения, то производят многократные измерения в разных условиях и находят разброс и среднее квадратическое отклонение измеренных значений $\Delta T_n(i)$.

4) Выше не принимались во внимание различные экстремальные ситуации («пробки» на дорогах, неожиданный гололед, невыход транспорта на маршрут, поломка и т. п.). Этими аномалиями можно пренебречь, если их вероятность $P << (1 - 0{,}997) = 0{,}003$. В противном случае эту вероятность необходимо учитывать в доверительном интервале и из-за его увеличения — увеличивать, соответственно, запас времени для отправления из пункта Б.

$$\Delta\varphi_{\text{зад}} \geqslant \Delta\varphi_{\text{изм}} \cong \left|\varphi_{\text{в}}^{\text{зн}} - \varphi_{\text{н}}^{\text{зн}}\right|, \qquad (5)$$

где $\varphi^{\text{зн}}$ — значение, полученное в результате измерения;

$\Delta\varphi_{\text{изм}}$ — оценка неопределенности полученного значения измеряемой величины;

$\varphi_{\text{в}}^{\text{зн}}$ — верхнее значение диапазона измеряемой величины;

$\varphi_{\text{н}}^{\text{зн}}$ — нижнее значение диапазона измеряемой величины;

Пример 3

Измерительную задачу, описанную в примере 2, можно решить несколькими способами в зависимости от наличия различной априорной информации.

1) Если в наличии имеется четкое (с точностью до минуты) расписание движения транспорта, обеспечивающего доставку отправляемой продукции из пункта Б в пункт А, то по расписанию рассчитывают необходимое время отправления $T_{\text{н}}$ из условия $T_{\text{н}} = T_0 - \Delta T_n - 5$ мин.

2) Если расписание отсутствует, то, выбрав из экономических соображений вид транспорта (автобус или такси, пеший способ и т. д.), выбирают метод, средство измерений и оператора. Средством измерений в данной задаче может служить обычный хронометр (наручные электронные часы),

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ И ПРЕДЕЛЬНАЯ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

Следует различать потенциальную и предельную точность измерений. Под **предельной точностью измерений** понимают предельно достижимую точность, с которой может быть выполнено измерение физической величины на данном этапе развития науки и техники. Предельная точность измерений реализуется как правило, в государственных эталонах, осуществляющих воспроизведение единицы физической величины с наивысшей точностью в рамках страны. Часто ее отождествляют с предельной чувствительностью измерительного прибора.

Под **потенциальной точностью измерений** будем понимать предельно достижимую точность на современном этапе развития научных знаний, техники и технологий. Потенциальная точность технически может быть не реализована на данном этапе развития технологии производства

(в том числе — уникального); сами измерения в этом случае становятся лишь потенциальными.

Предельно достижимая точность, фигурирующая в обоих определениях, подразумевает именно самую высокую точность измерений, однако это требует уточнения при выборе конкретной характеристики (показателя) точности. Наглядно это становится ясно при рассмотрении так называемых *предельных измерений*, т. е. измерений некоторой физической величины на уровне порога чувствительности применяемого средства измерений (измерительного прибора). Так как порог чувствительности, по определению, является минимальным значением измеряемой величины $\varphi_{min}(s_i)$, при котором данное средство измерений s_i еще дает заметный отклик на подаваемую на вход измеряемую величину, то измерение малых уровней величины, сравнимых с порогом чувствительности, имеет высокую точность с точки зрения абсолютной неопределенности, но крайне низкую точность — с точки зрения относительной неопределенности (до 100 %).

$$\frac{\Delta\varphi(s_i)}{\varphi_{min}(s_i)} \cong 1\,.$$

Несмотря на указанное выше различие, потенциальная и предельная точности измерений, имеют существенно общие моменты (что также видно из определений). Поэтому, делая преимущественный упор на рассмотрение *потенциальной* точности измерений, будем касаться и некоторых аспектов *предельной* точности измерений.

Методологической основой для систематического изучения потенциальной (и предельной) точности измерений служит структурное представление измерения как системы, изложенное в предыдущем пункте.

Согласно этому представлению искомое значение измеряемой величины φ определяется всеми компонентами $x_k \in I_z$, оказывающими влияние на искомое значение измеряемой величины

$$\varphi^{зн}(I_z) = f(I_z) = f(\{x_k\}) =$$

$$= f(\varphi, o, \psi, g, t, \ldots \,|\, [\varphi], s, m, \nu, w, \ldots). \qquad (6)$$

Обозначим через $q_{ik} \in x_k$, $i, k = 1, 2, \ldots, l_k$ параметры, характеризующие свойства компонента x_k, влияющего на результат измерения. Если зависимость (6) от этих параметров представлена в аналитическом виде, а сама функция f

дифференцируема, то, вычислив *функции влияния* по каждому параметру q_{ik} как частные производные

$$h_{lk} \equiv \frac{\partial f(I_Z)}{\partial q_{ik}}, \qquad (7)$$

можно найти оценку недостоверности (неопределенности) результата измерений (интервал, в котором с выбранной или заданной вероятностью может находиться измеренное значение) через недостоверности (неопределенности) значений параметров q_{ik} системы I_z:

$$\hat{\Delta}\varphi^{зн}(I_z) = \sqrt{\sum_k \sum_{i_k=1}^{l_k} \left(\frac{\partial f}{\partial q_{ik}} \Delta q_{ik} \right)^2}. \qquad (8)$$

Указанная схема оценки точности измерения по степени неопределенности его результата справедлива для любой измерительной задачи.

Однако специфика ситуации при рассмотрении потенциальной точности измерений позволяет ввести некоторые упрощения, исключающие из рассмотрения отдельные компоненты x_k, связанные, прежде всего, с параметрами экономического и технического (технологического) характера. Так, мы вправе отвлечься от возможности возникновения грубых ошибок (промахов) [12], связанных с просче-

ОГРАНИЧЕНИЯ НА ТОЧНОСТЬ, СВЯЗАННЫЕ С КОМПОНЕНТАМИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

В этом пункте речь пойдет о влиянии компонентов системы I_z, которые реально участвуют в процессе измерений, хотя и появляются формально на этапе постановки измерительной задачи. Это измеряемая величина (φ), объект измерения (*o*), внешние условия (ψ). Отдельно (в подразделе «Пространственно-временные ограничения») будут рассмотрены пространственно-временные ограничения. Все эти компоненты являются неуправляемыми (задаваемыми) в рамках системы I_z. Однако точность их задания (т. е. точность задания характеризующих их параметров) не безгранична и определяется объемом априорной информации о них и степенью ее соответствия реальной действительности.

тами в реализации плана измерительного эксперимента; от несовершенства оператора; от ограничений на точность, связанных с неидеальностью методов и средств обработки полученной измерительной информации, и т. п. Предполагаем здесь также, что потенциально можно свести к пренебрежимо малой величине случайную составляющую погрешности измерений за счет многократности отсчетов, т. е. оставить в рассмотрении лишь неопределенности при однократном измерении.

Таким образом, при рассмотрении потенциальной точности измерений надо проанализировать лишь влияние компонентов φ, *o*, ψ, [φ], *s*, а также пространственно-временных параметров.

Модель измеряемой величины и объекта

Измеряемая величина (как качество) задается своим определением в системе величин и понятий, т. е. на основе соглашений. Соглашения (если они достаточно однозначны), в принципе, можно выполнить абсолютно точно. Однако практически, применительно к конкретной ситуации и определенному объекту изучения, возникают некоторые допущения, конкретизирующие определение измеряемой величины. Рассмотрим это для наиболее важного в метрологии случая физических величин.

В системе физических величин формализованным отражением качества каждой величины (ее определения) является размерность величины, которая отражает связь этой величины с основными величинами системы. Такие определения являются точной (однозначной) информацией о качестве (роде) измеряемых величин при условии удачного выбора основных величин. Так, скорость движения тела определяется производной пути по времени, плотность вещества определяется отношением массы этого вещества к его объему и т. п.

Однако даже для таких наиболее простых производных величин их определения являются абстракциями и отно-

сятся к идеализированным объектам, т. к. любая физическая величина является свойством, в качественном отношении присущим многим объектам. Так, все величины кинематики (перемещение, скорость, ускорение) вводятся для идеализированной «материальной точки»; приведенное выше определение плотности вещества предполагает его однородность и т. д. Еще хуже обстоит дело с основными величинами, которые, по сути дела, являются неопределимыми в системе физических величин (хотя и имеют довольно расплывчатые определения типа «длина есть мера пространственной протяженности тел», «масса есть мера инерционных и гравитационных свойств тела»). Такова диалектика познания: чем больше степень общности понятия, тем оно более абстрактно, т. е. отделено от конкретности.

Поэтому при формулировке измерительной задачи и последующей разработке плана измерительного эксперимента, кроме уяснения измеряемой величины как качества, необходимо детализировать ее применительно к изучаемому объекту, построив модель исследуемого объекта.

Добавим, что при построении этой модели необходимо принять во внимание следующие соображения.

Измеряемой физической величиной обычно служит либо длина (линейное перемещение), либо ускорение a, связанное с x соотношением:

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -x_m\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = -a_m\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Конкретно же измеряемым параметром объекта выбирают (в зависимости от цели измерений и других соображений) либо амплитуду смещения x_m или ускорения a_m, либо «мгновенное» значение смещения $x(t)$ или ускорения $a(t)$, либо средние их значения за определенный интервал времени.

2) Как уже отмечалось ранее [2], для выполнения измерения необходимо иметь априорную информацию не только о *качественной*, но и о *количественной характеристике* измеряемой величины, ее размере. Чем более точная и, следовательно, более полная априорная информация имеется о размере измеряемой величины, тем больше сил и средств остается на получение более полной апостериорной информации, уточняющей априорную.

3) Измерительный сигнал, поступающий от объекта на вход средства измерений, помимо информации об измеряемой величине может также нести информацию о дру-

1) Построить *модель измеряемой величины* исследуемого объекта означает определить конкретный *измеряемый параметр* объекта, однородный с исследуемой физической величиной. Обычно этот параметр связан с внешней частью (поверхностью) объекта. Ряд примеров при измерении линейных размеров и электрических параметров даны в подразделе «Пространственно-временные ограничения». Приведем еще один пример из области механики.

Пример 4

При измерении параметров вибрации линейно колеблющихся механических систем, где объектом изучения выступает колебательный процесс движения твердого тела, моделью объекта служит чаще всего гармонический закон движения материальной точки

$$x(t) = x_m\sin(\omega t + \varphi_0), \tag{9}$$

где x — смещение определенной точки поверхности тела относительно статического (равновесного) положения;

x_m — максимальное значение (амплитуда) смещения;

ω — частота колебательного процесса;

φ_0 — его начальная фаза.

Неидеальность модели в примере 4 проявляется обычно в отклонении реальной формы колебаний точки поверхности тела от гармонического закона (9).

Для построения более точной модели необходимо знать такие модельные параметры объекта, как расположение центра масс колеблющегося тела относительно точки измерения, упругие свойства объекта и т. п. Более подробный пример, иллюстрирующий влияние неидеальности модели объекта на точность измерений, рассмотрен в подразделе «Пространственно-временные ограничения».

Если построенная модель объекта такова, что позволяет аналитически выразить зависимость измеряемой величины от информативных ($q_{и0}$), неинформативных ($q_{н0}$) и модельных ($q_{м0}$) параметров объекта, то неопределенность результата измерения, обусловленная этими параметрами, может быть определена через соответствующие функции влияния (7) и неопределенности значений этих параметров q_{i0}:

$$\hat{\Delta}_0 \varphi\left(I_z\right) = \sqrt{\sum_{i_0=1}^{I_0}\left(\frac{\partial f\left(q_{i_0}\right)}{\partial q_{i_0}} \cdot \Delta q_{i_0}\right)^2}\,. \qquad (10)$$

Здесь индекс «0» подчеркивает принадлежность рассматриваемых параметров системы к объекту.

гих, так называемых «*неинформативных*» *параметрах* объекта, которые влияют на показания средства измерений. Это особенно характерно при измерениях в динамическом режиме. Так, в примере 4 неинформативным параметром объекта является частота ω, с которой происходят его колебания.

4) Рассмотренные выше «информативные» и «неинформативные» параметры объекта, хотя и отражают его внутренние свойства, но, воплощаясь в параметры измерительного сигнала, испытывают реальные преобразования в измерительной цепи.

Кроме них, любой объект обладает множеством других, «внутренних» свойств, которые не отражаются на параметрах измерительного сигнала, но информация о которых позволяет построить правильную (для данной измерительной задачи) модель объекта, максимально соответствующую реальной действительности. Параметры, характеризующие такие свойства объекта, которые влияют на модельные представления о нем, будем называть *модельными параметрами* объекта.

Так, при точных измерениях плотности или вязкости вещества необходимо знать его состав, распределение примесей по объему, его температуру, сжимаемость и т. д.

Физические ограничения, связанные с дискретностью строения вещества

Все более уточняя (по мере накопления знаний) значения параметров изучаемого объекта q_{i0} (т. е. все более уменьшая их неопределенность Δq_{i0}), мы можем, казалось бы, постепенно, но непрерывно уменьшать неопределенность результата измерения, связанную с этими параметрами: $\hat{\Delta}_0 \varphi \to 0$ при $\Delta q_{i0} \to 0$ — см. (10). Имеется, однако, определенный вид физических знаний об объектах окружающего нас мира, который заставляет говорить о *принципиальных пределах точности*, с которой можно получить количественную информацию о большинстве измеряемых физических величин.

Первый круг таких знаний связан с молекулярно-кинетическим представлением о строении вещества, теория которого описывается в курсах молекулярной физики, термодинамики и статистической физики.

Молекулярно-кинетическая теория исходит из рассмотрения вещества в виде движущихся по законам механики составляющих его молекул (микроскопических частиц). Все реальные физические объекты, с которыми приходится сталкиваться на практике (будь то газы, жидкости или твер-

дые тела) имеют дискретную структуру, т. е. состоят из огромного количества частиц (молекул, ионов, электронов). Так, например, в 1 см^3 металла находится ~ 10^{22} ионов и столько же свободных электронов; в 1 см^3 воздуха при комнатной температуре и атмосферном давлении содержится ~ $3{\cdot}10^{19}$ молекул; даже при высоком вакууме (давление в миллион раз меньше атмосферного) в 1 см^3 воздуха находится ~ 10^{12} молекул. При этом размеры частиц имеют порядок ~ 10^{-10} м = 10^{-8} см.

Хотя законы механики позволяют точно описывать поведение каждой отдельной частицы в системе, однако огромное число частиц системы не дает ни технических, ни физических возможностей описать поведение системы в целом. В этих условиях единственную возможность дает только *вероятностное описание* состояния сложной системы (ансамбля из множества частиц). Статистическая физика основывается на этих представлениях и, используя методы и приемы математической статистики, устанавливает *статистические закономерности* поведения сложных систем, состоящих из большого числа частиц, и на основе которых изучает макроскопические свойства таких систем.

Благодаря большому числу микрочастиц, составляющих объекты физического исследования, все их свойства,

$$\rho\left(E_k\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(kT\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot e^{-\frac{E_k}{kT}}\cdot\sqrt{E_k}\ ,$$

где k — постоянная Больцмана ($k = 1{,}38{\cdot}10^{-23}$ Дж/К);

T — абсолютная температура газа, К.

Таким образом, средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул идеального газа служит мерой его абсолютной температуры (как термодинамического параметра системы).

В любой реальной физической системе, даже если характеризующие ее состояния макроскопические величины считаются не зависящими от времени, т. е. постоянными, благодаря непрерывному движению микрочастиц происходят самопроизвольные изменения значений макроскопических (наблюдаемых) параметров около своего среднего равновесного значения $\overline{\varphi}$. Эти случайные отклонения от среднего характеризуют *флуктуации физической величины на объекте.* Мерой флуктуации обычно служит среднее квадратическое отклонение от среднего:

$$\Delta\varphi=\sqrt{\overline{\left(\varphi-\overline{\varphi}\right)^2}} \qquad (12)$$

или относительная флуктуация

рассматриваемые как случайные величины, усредняются, что дает возможность характеризовать эти свойства некоторыми макроскопическими (наблюдаемыми) параметрами, такими как плотность, давление, температура, заряд и др., которые относятся к *термодинамическим* параметрам системы, не учитывающим их связь со структурой вещества. Такая связь, однако, проявляется при описании указанных термодинамических параметров через *статистические средние значения* соответствующих величин, которые вводятся по обычным правилам образования среднего (интегрирование производится по всем состояниям системы):

$$\overline{\varphi}=\int\varphi\cdot\rho\left(\varphi\right)d\varphi\ , \qquad (11)$$

где φ — усредняемая величина, характеризующая состояние системы;

$\rho(\varphi)$ — плотность распределения вероятности значений величины φ (состояний системы).

Так, средняя кинетическая энергия молекул одноатомного газа

$$\overline{E_k}=\int_0^\infty E_k\rho\left(E_k\right)dE_k=\frac{3}{2}kT\ ,$$

находится из закона распределения молекул по энергиям

В частности, в качестве x могут быть взяты все $6N$ (где N — число частиц системы, а 6 — число степеней свободы для одной частицы) микроскопических переменных системы. Тогда, согласно статистической физике, для изотермической (с постоянной температурой) системы, находящейся в термостате, функция распределения, называемая *каноническим распределением Гиббса*, имеет следующий вид:

$$\rho(x) = e^{\frac{\psi - H(x,a)}{\theta}}, \tag{15}$$

где ψ и θ — некоторые постоянные;

$H(x,a)$ — полная энергия системы (функция Гамильтона);

a — внешние по отношению к системе параметры.

Любая средняя величина при каноническом распределении определяется как средняя по всему фазовому пространству Γ, элемент которого — $(dx)^{6N}$:

$$\overline{\varphi} = \int_{\Gamma} \varphi(x,a) e^{\frac{\psi - H}{\theta}} (dx)^{6N}. \tag{11-2}$$

Здесь θ имеет смысл статистической температуры $\theta = kT$, а параметр ψ — смысл «свободной энергии» системы. Важную роль играет также интеграл

$$\delta\varphi = \frac{\Delta\varphi}{\overline{\varphi}} = \sqrt{\frac{\overline{(\varphi - \overline{\varphi})^2}}{\overline{\varphi}^2}}. \tag{13}$$

Из свойств дисперсии случайной величины

$$\overline{(\varphi - \overline{\varphi})^2} = \overline{\varphi^2} - 2\overline{\varphi}\cdot\overline{\varphi} + \overline{\varphi}^2 = \overline{\varphi^2} - \overline{\varphi}^2,$$

следует, что для вычисления флуктуаций нужны две величины: средний квадрат флуктуаций $\left(\overline{\varphi^2}\right)$ и квадрат среднего значения $\left(\overline{\varphi}^2\right)$.

Так как флуктуации связаны с большим числом малых случайных отклонений от среднего, то эти отклонения подчиняются нормальному (гауссовскому) закону распределения. Если рассматриваемая величина φ является функцией другой случайной величины x, то обе они подчиняются одному закону распределения, поэтому вместо (11) можно записать

$$\overline{\varphi(x)} = \int \varphi(x)\rho(x)dx \tag{11-1}$$

а средний квадрат флуктуации будет определяться как

$$\overline{\varphi^2} = \int \varphi^2(x)\rho(x)dx. \tag{14}$$

$$Z = \int_{\Gamma} e^{-\frac{H}{kT}} \left(dx\right)^{6N}, \tag{16}$$

называемый *интегралом состояний*, отражающий внутреннее состояние системы; через него выражается свободная энергия системы $\psi = -kT \ln Z$ и ряд других термодинамических параметров и функций системы.

Пример 5

Пусть N молекул газа находятся в объеме V под поршнем, к которому приложено внешнее давление p. Требуется найти флуктуацию объема V. В этом случае давление p рассматривается как внешний параметр a, соответствующий объему $V(x)$, а изучаемая величина V зависит только от координаты x системы, вдоль которой действует давление. Записывая полную энергию системы (функцию Гамильтона) как

$$H(p,x) = H(x) + pV(x)$$

и используя свойства канонического распределения, получим

$$\overline{\left(V - \bar{V}\right)^2} = -kT\frac{\partial V}{\partial p}. \tag{17}$$

Производную $\dfrac{\partial V}{\partial p}$ находим из уравнения Менделеева — Клапейрона:

$$pV = NkT, \text{ т. е. } \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\frac{NkT}{p^2}.$$

Тогда дисперсия объема равна

$$\overline{\Delta V^2} = \overline{\left(V - \bar{V}\right)^2} = \frac{k^2T^2N}{p^2} = \frac{V^2}{N},$$

а относительная флуктуация объема

$$\delta V \equiv \frac{\Delta V}{V} = \sqrt{\frac{\overline{\left(\Delta V\right)^2}}{\bar{V}^2}} = \sqrt{\frac{V^2}{NV^2}} = \frac{1}{\sqrt{N}}, \tag{18}$$

т. е. обратно пропорциональна квадратному корню из числа частиц системы.

Если учесть, что $N \sim 10^{20}$, то неопределенность измеряемого объема объекта (газовой среды под давлением p) вследствие его флуктуации будет иметь порядок

$$\delta V = \frac{\Delta V}{V} \approx 10^{-10}. \tag{18-1}$$

Вообще, если система состоит из N независимых частей, то относительная флуктуация любой функции φ состояния системы обратно пропорциональна квадратному корню из числа ее частей

$$\delta\varphi = \sqrt{\frac{\overline{(\Delta\varphi)^2}}{\bar{\varphi}^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{N}} . \tag{18-2}$$

Это справедливо как для аддитивных (экстенсивных) величин $\varphi_э$, для которых $\varphi_э \sim N$, так и для неаддитивных (интенсивных) величин $\varphi_и$, для которых $\varphi_и \neq f(N)$. Легко убедиться, что при этом

$$\overline{(\Delta\varphi_э)^2} \approx N, \text{ а } \overline{(\Delta\varphi_и)^2} \approx \frac{1}{N} .$$

Примерами экстенсивных величин, характеризующих термодинамические свойства систем, являются объем вещества и его энергия; к интенсивным величинам относятся температура и давление системы.

Рассмотрим теперь на примерах размеры флуктуаций для некоторых других величин.

Пример 6. Длина

Реальные твердые тела не являются абсолютно твердыми (с бесконечной жесткостью), но обладают определенной упругостью (изменяют свои размеры и форму под действи-

ем внешних сил). Упругие свойства стержня при малых деформациях описываются законом Гука:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l(F) - l(0)}{l(0)} = \frac{1}{E_s} F , \tag{19}$$

где Δl — удлинение стержня под действием силы F;

E — модуль упругости вещества, из которого состоит стержень;

s — площадь сечения стержня.

Потенциальная энергия упругой деформации стержня

$$\Delta W_n = -F \cdot \Delta l = \frac{Es\Delta l}{l_0} \Delta l = \frac{Es}{l_0} (\Delta l)^2 .$$

Так как рассматриваются случайные малые колебания длины стержня относительно среднеравновесного положения l_0, то среднее значение потенциальной энергии по ансамблю $\overline{\Delta W_n} = \frac{Es}{2l_0} \overline{(\Delta l)^2}$ равно среднему значению кинетической энергии упругих колебаний, обусловленных тепловым движением микрочастиц

$$\overline{\Delta W_k} = \frac{kT}{2} .$$

Отсюда следует:

$$\overline{(\Delta l)^2} = \frac{kT}{Es} l_0 . \tag{20}$$

При $T \approx 300$ K, $E \approx 10^{11}$ Н/м^2, s = 3 см·3 см $\approx 10^{-3}$ м^2, $l_0 \approx 1$ м имеем $\sqrt{\overline{(\Delta l)^2}} \approx 10^{-14}$ м, т. е. среднеквадратичные флуктуации длины метрового стержня, обусловленные тепловыми движениями при комнатной температуре и упругими свойствами материала стержня (средними для благородных металлов) имеют порядок 10^{-14} м = 10^{-8} мкм, что существенно меньше атомных размеров (~10^{-10} м = 10^{-4} мкм) и сравнимо с размерами атомного ядра.

Отметим, что полученное упрощенным способом выражение (20) совпадает с точным выводом флуктуации стержня из законов статистической физики и термодинамики.

Приведем для примера этот вывод, воспользовавшись выражениями (15), (11-2) и (19).

Заметим, что интеграл распределения (15) по всему фазовому ансамблю $Г$ рассматриваемого объекта равен 1:

$$\int_Г e^{\frac{\psi - H}{\theta}} (dx)^{6N} = 1 . \tag{21}$$

Здесь $\theta = kT$ — постоянная (модуль распределения), одинаковая для всех систем ансамбля; $\psi = \psi(a, \theta)$ зависит от внешних параметров a и модуля θ, т. е. тоже одинакова для всех систем ансамбля, а именно — не зависит от координат x в фазовом пространстве $Г$; $H = H(x, a)$ — полная механическая энергия одной системы из ансамбля, зависящая от координат x и внешних параметров a.

Возьмем частную производную от (21) по параметру a:

$$\frac{\partial}{\partial a} \int_Г e^{\frac{\psi - H}{\theta}} (dx)^{6N} = \int_Г \frac{\partial}{\partial a} \left(e^{\frac{\psi(a,\theta) - H(x,a)}{\theta}} \right) (dx)^{6N} =$$
$$= \frac{1}{\theta} \int_Г \frac{\partial \psi}{\partial a} e^{\frac{\psi - H}{\theta}} (dx)^{6N} - \frac{1}{\theta} \int_Г \frac{\partial H}{\partial a} e^{\frac{\psi - H}{\theta}} (dx)^{6N} = 0 ,$$

откуда $\int_Г \frac{\partial \psi}{\partial a} e^{\frac{\psi - H}{\theta}} (dx)^{6N} = \int_Г \frac{\partial H}{\partial a} e^{\frac{\psi - H}{\theta}} (dx)^{6N}$.

Учитывая определение среднего значения по ансамблю (11-2) и независимость ψ от координаты x, имеем

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial a} \right)_\theta = \overline{\left(\frac{\partial H}{\partial a} \right)_\theta} . \tag{22}$$

Найдем теперь производную по a от среднего (11-2) произвольной величины $\varphi(x)$ при каноническом распределении (15):

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\int_{\Gamma}\varphi(x,a)e^{\frac{\psi-H}{\theta}}(dx)^{6N} =$$

$$= \int_{\Gamma}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial a}e^{\frac{\psi-H}{\theta}} + \frac{\varphi(x,a)}{\theta}e^{\frac{\psi-H}{\theta}}\frac{\partial\psi}{\partial a} - \varphi(x,a)\frac{1}{\theta}e^{\frac{\psi-H}{\theta}}\frac{\partial H}{\partial a}\right](dx)^{6N} =$$

$$= \overline{\frac{\partial\varphi}{\partial a}} + \frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial a}\bar{\varphi} - \overline{\varphi\frac{\partial H}{\partial a}}\right).$$

(Здесь мы еще раз воспользовались определением среднего).

Подставляя в полученное выражение $\frac{\partial\psi}{\partial a}$ из (22), получим:

$$\left(\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial a}\right)_{\theta} = \left(\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial a}}\right)_{\theta} + \frac{1}{\theta}\left(\overline{\frac{\partial H}{\partial a}}\bar{\varphi} - \overline{\varphi\frac{\partial H}{\partial a}}\right),$$

а учитывая, что для любых случайных величин A и B справедливо

$$\overline{(A-\bar{A})(B-\bar{B})} = \overline{AB} - \bar{A}\bar{B}, \qquad (23)$$

окончательно имеем:

$$\left(\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial a}\right)_{\theta} = \overline{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right)_{0}} - \frac{1}{\theta}\overline{(\varphi-\bar{\varphi})\left(\frac{\partial H}{\partial a} - \overline{\frac{\partial H}{\partial a}}\right)}. \qquad (24)$$

Применим теперь полученное выражение для рассматриваемого случая флуктуации длины металлического (упру-

гого) стержня, когда $\varphi(x) = l(x)$, $\bar{\varphi} = l_0$, $a = F$ (сила, как внешний параметр).

Полная механическая энергия $H(x, F)$ одной системы из ансамбля, описывающего возможные упругие состояния стержня (уравнение состояния стержня):

$$H(x,F) = Fl(x). \qquad (25)$$

Здесь мы пренебрегаем тепловым расширением стержня $l(T) = l(0)\cdot[1 + \alpha(T - T_0)]$, т. к. это несущественно для рассмотрения упругих флуктуаций, тем более, что можно положить $T = T_0$.

Тогда среднее значение производной от $l(x)$ по F в (24)

$$\overline{\left(\frac{\partial l(x)}{\partial F}\right)_{\theta}} = 0,$$

т. к. $l(x)$ не зависит от F; производные от H по F согласно (25) равны:

$$\frac{\partial H}{\partial F} = l, \quad \overline{\frac{\partial H}{\partial a}} = l_0,$$

а производная по F от среднего значения l (как макроскопической длины системы) находится из закона Гука (19):

Довольно сложные расчеты с применением электродинамики и статистической физики показывают, что

$$\overline{\varepsilon_{\text{ш}}^2}(\nu) = 4kTR(\nu)\Delta\nu, \qquad (26)$$

где $\Delta\nu$ — полоса частот электромагнитных волн, в которой изучаются (наблюдаются) флуктуации напряжения на сопротивлении.

Формула (26) называется *формулой Найквиста*. Иногда записывают ее через флуктуацию мощности $P(\nu)$, выделяемой на сопротивлении R:

$$\sqrt{\overline{P^2(\nu)}} = \frac{\overline{\varepsilon^2}}{R} = 4kT\Delta\nu\,. \qquad (26\text{-}1)$$

Флуктуационная электродвижущая сила мала, хотя и наблюдаема на высокоомных сопротивлениях (например, фоторезисторах). Так, при $R \approx 10^8$ Ом = 100 МОм и комнатных температурах в диапазоне частот до нескольких десятков герц значение флуктуационной электродвижущей силы имеет порядок единиц мкВ (1 мкВ = 10^{-6} В).

Квантовомеханические ограничения

Помимо рассмотренных выше естественных ограничений из-за флуктуационных явлений, связанных с дискрет-

$$l = l_0 - \frac{l_0}{Es}F, \qquad (19\text{-}1)$$

т. е.
$$\left(\frac{\partial \bar{l}}{\partial F}\right)_{\theta} = -\frac{l_0}{Es}\,.$$

Подставляя новые переменные и найденные производные в (24), имеем

$$\frac{l_0}{Es} = \frac{1}{kT}\overline{(l-l_0)(l-l_0)} = \frac{\overline{(\Delta l)^2}}{kT}$$, откуда и получим (20).

Рассмотрим теперь флуктуации в электрических цепях, связанные с флуктуациями электрического тока из-за теплового движения носителей заряда — электронов в проводнике.

Пример 7. Флуктуации в электрических цепях

Флуктуации электрического тока в проводнике вызывают появление на сопротивлении R соответствующей *флуктуационной электродвижущей силы*, называемой напряжением шума:

$$\varepsilon_{\text{ш}} = \sqrt{\overline{\varepsilon_{\text{ш}}^2}} = R\sqrt{\overline{(\Delta I)^2}}\,.$$

ной структурой наблюдаемых макроскопических объектов, имеются ограничения на точность измерений еще более фундаментального характера. Они связаны с квантовомеханическими (дискретными) свойствами поведения объектов микромира.

Приведенные в подразделе «Физические ограничения, связанные с дискретностью строения вещества» уравнения являются следствием применения законов классической физики. Законы *классической механики* и термодинамики лишь обобщаются и специфицируются применительно к дискретной (молекулярно-кинетической) природе строения вещества, состоящего из огромного числа микрочастиц, которые описываются как ансамбль множества состояний (подсистем) изучаемого объекта. Каждое состояние системы (объекта) соответствует точке в фазовом пространстве состояний и *изменяется непрерывно* по этому пространству.

В отличие от этих классических представлений, *квантовая физика* учитывает дискретные свойства самих микрообъектов, которые проявляются в том, что некоторые величины, характеризующие свойства микрочастиц, могут изменяться только дискретно, определенными порциями или

квантами. К таким величинам относятся энергия системы E, вектор момента количества движения $\overline{M}$, вектор магнитного момента $\vec{\mu}$, а также проекции этих векторов на любое выделенное направление. Сугубо квантовым параметром является так называемый *спин* (собственный момент количества движения) частицы. Квантование этих величин связано с наличием минимальной порции (кванта) действия $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, называемой *постоянной Планка*.

Так, энергия излучения гармонического осциллятора (частицы, колеблющейся под действием упругой силы) согласно квантовой механике может принимать лишь определенные *дискретные* значения, отличающиеся друг от друга на целое число элементарных порций — *квантов энергии*:

$$E_\nu = h\nu, \tag{27}$$

где ν — частота излучения, связанная с циклической собственной частотой ω колебания осциллятора соотношением $\omega = 2\pi\nu$.

Квантовая физика не только выявила дискретные (корпускулярные) свойства у традиционно непрерывных объектов (полей, волн, излучений), но и установила волновые (непрерывные) свойства у дискретных образований — частиц, сопоставив каждой частице с массой m, движущейся со скоростью v, соответствующую длину волны

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p}, \tag{28}$$

которая называется *длиной волны де Бройля*. Тем самым был установлен *корпускулярно-волновой дуализм* в свойствах микрообъектов как общее проявление взаимосвязи двух форм материи — вещества и поля.

Для того чтобы математически описать эти особенности свойств микромира, пришлось каждой физической величине сопоставить определенный оператор Λ, который показывает, какие действия необходимо произвести над функцией ψ, описывающей состояние квантовой системы. Эта функция называется *волновой функцией* системы. Она имеет особый физический смысл, так как квадрат ее модуля $\left|\psi(q)\right|^2$, где q — координаты системы, связан с вероятностью найти квантовую систему в элементе пространства координат $dq = (q_1, q_2, \ldots, q_N)$ соотношением

$$dw(q_1, q_2, \ldots, q_N) = \left|\psi\right|^2 dq_1 dq_2 \ldots dq_N, \tag{29}$$

т. е. $\left|\psi\right|^2$ является плотностью распределения вероятности системы по состояниям $(q_1, q_{2, \ldots,} q_N)_i$.

Таким образом, квантовая механика уже в своей основе содержит *статистические* (*вероятностные*) *представления*.

Наиболее важным оператором в квантовой механике является *оператор Гамильтона H*, отображающий полную энергию системы

$$H = E_k + U = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi + U(q), \tag{30}$$

где первое слагаемое — оператор кинетической энергии, показывающий, что волновую функцию необходимо дважды продифференцировать по каждой координате x, y, z;

$U(q)$ — потенциальная энергия системы, зависящая от координат системы x, y, z и, вообще говоря, от времени t;

$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с;

m — масса частицы.

Основным уравнением квантовой механики, описывающим поведение (движение) микрочастиц, является *уравнение Шредингера*

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi, \tag{31}$$

которое является аналогом уравнения Ньютона при классическом описании движения материальной точки (в форме канонических уравнений Гамильтона). Для стационарных (т. е. неизменных во времени) процессов уравнение (31) записывается в виде

$$H\psi_n = E_n\psi_n, \qquad (31\text{-}1)$$

где E_n — собственные значения оператора H;

ψ_n — собственные волновые функции частицы (или системы частиц), которые находят из решения уравнения (31-1).

Уравнение Шредингера при описании систем из множества частиц (т. е. макросистем) позволяет, в лучшем случае, получить только спектр возможных состояний системы — $\{\psi_n\}$. Однако ответить на вопрос, в каком именно состоянии находится квантовая система в данный момент, не представляется возможным.

Так же, как и в случае описания системы микрочастиц классической механикой, для этого нужно знать закон распределения вероятностей отдельных состояний, с помощью которого уже можно определять средние значения различных параметров (физических величин) системы. На помощь опять приходят методы математической статистики (применительно к квантовым системам).

Волновая функция, описывающая состояние квантовой системы из N частиц, может зависеть либо только от

координат $\psi(q_1, q_2, ..., q_N)$, либо только от импульсов $\psi(p_1, p_2, ..., p_N)$.

Особенностью квантовой статистики является то, что одному состоянию квантовой системы в фазовом пространстве состояний Γ соответствует не точка, а некоторый минимальный объем этого пространства Γ_{min}. Такое соответствие есть следствие корпускулярно-волнового дуализма в поведении микрочастиц: поскольку понятие «координата» для волны лишено определенного физического смысла, также лишено обычного смысла и понятие «траектория» частицы. Любая микрочастица оказывается как бы «размазанной» по пространству состояний.

Вытекающая отсюда принципиальная неразличимость или *тождественность частиц* в квантовой механике приводит к соотношению, которое отражает *принципиальную неопределенность* в определении значений ряда измеряемых физических величин. Действительно, минимальный объем фазового пространства, соответствующий одному состоянию системы, связан с постоянной Планка соотношением

$$\Gamma_{min} = h^{3N},$$

где $3N$ — число обобщенных координат или импульсов системы из N частиц.

А поскольку объем любого элемента фазового пространства есть произведение размеров координат и импульсов (т. е. всех параметров состояния) этого элемента

$$\Gamma = (\Delta p_1 \Delta q_1)(\Delta p_2 \Delta q_2)\ \dots\ (\Delta p_N \Delta q_N),$$

$$\text{то} \quad (\Delta p_1 \Delta q_1)(\Delta p_2 \Delta q_2)\ \dots\ (\Delta p_N \Delta q_N) \geq h^{3N}. \tag{32}$$

Применяя соотношение (32) для случая одной частицы ($N = 1$), движущейся в направлении одной координаты x, получаем

$$\Delta x \Delta p_x \geq h. \tag{32-1}$$

Неравенство (32-1) (в общем случае — (32)), связывающее неопределенности одновременного определения координаты Δx и проекции импульса Δp_x частицы, называется *соотношением неопределенности Гейзенберга*. Это соотношение указывает на то, что чем точнее определены координаты частицы (т. е. чем меньше Δx или Δy, Δz), тем менее точно могут быть определены значения проекций ее импульса (т. е. тем больше Δp_x, или Δp_y, Δp_z). Абсолютно точно определенным координатам соответствует полная неопределенность соответствующих проекций импульса частицы.

Следствием соотношения (32-1) является ряд аналогичных соотношений неопределенностей между другими, так

называемыми канонически сопряженными величинами. В частности, имеет место соотношение

$$\Delta E \Delta t \geq h, \tag{33}$$

которое указывает, что уменьшение времени наблюдения (Δt) над системой (или его неопределенности) приводит к увеличению неопределенности значения энергии этой системы, и наоборот, изучаемая система может иметь точные значения энергии лишь за неопределенно большие интервалы времени (т. е. только в стационарных случаях).

Соотношение (33) накладывает принципиальные ограничения на точность измерений, в которых используются *методы спектрального анализа* излучения вещества. Это связано с тем, что любое излучение является следствием преобразований состояний в квантовомеханической системе, т. е. обусловлено переходом системы из одного дискретного состояния с энергией E_1 в другое дискретное состояние с энергией E_2 (рис. 2):

$$E_\nu = h\nu = E_1 - E_2 = \Delta E_{1-2}.$$

Если состояние E_2 является основным состоянием системы, т. е. состоянием с наименьшей возможной энергией, то $\Delta E_2 = 0$, так как система может пребывать в этом состоянии

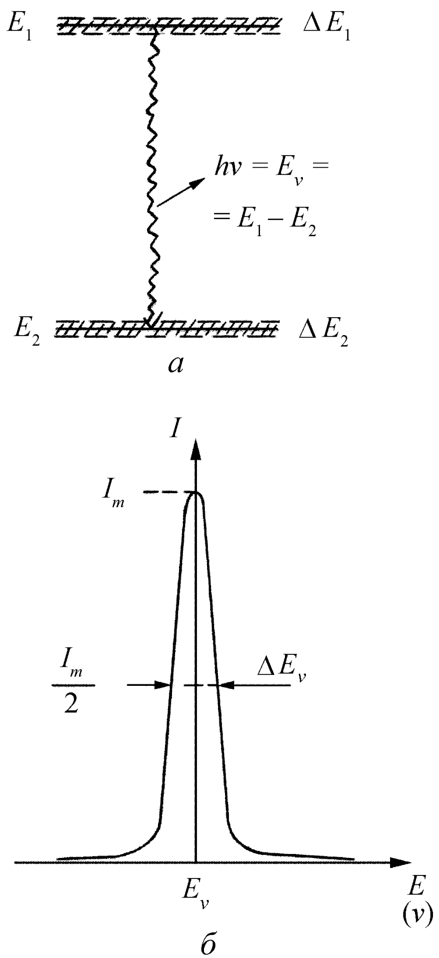

Рис. 2. Энергетические переходы между двумя возможными состояниями квантовомеханической системы (*а*) и ширина соответствующей спектральной линии излучения (кванта $h\nu$), вызванного этим переходом (*б*)

бесконечно долго и $\Delta t = \infty$. Однако любое другое энергетическое состояние E_i квантовомеханической системы является ее возбужденным состоянием, в котором она может пребывать ограниченное (конечное) время $\tau_i = \Delta t_i$ (*время жизни* возбужденного состояния), и в соответствии с соотношением (33) имеет конечную энергетическую неопределенность ΔE_i.

Так, в атомных системах время жизни возбужденных энергетических состояний $\Delta t_i \sim 10^{-8}$ с, что соответствует интервалу неопределенности $\Delta E_i \sim 10^{-7}$ эВ ~ $1{,}6{\cdot}10^{-26}$ Дж (1 Эв = $= 1{,}6{\cdot}10^{-19}$ Дж). Такую же неопределенность имеют спектральные линии электромагнитного излучения атома (в оптической области спектра, где $\nu \sim 10^{14}$ Гц, а $h\nu$ ~ эВ). В ядерных системах те же электромагнитные взаимодействия приводят к γ-излучению (жесткое электромагнитное излучение) с энергией $h\nu$ ~ МэВ и $\nu \sim 10^{20}$ Гц; время жизни ядерных энергетических уровней составляет $\tau_ж \sim 10^{-8} \div 10^{-15}$ с, что соответствует неопределенности $\Delta E = \Delta(h\nu) \sim 10^{-7} \div 10^{-14}$ эВ. Это очень малые величины.

потребляемой от объекта измерений, и времени установления результата измерений и не может быть уменьшен ниже $C = 3{,}5 \cdot 10^{-20}$ Дж.

Вообще все квантовомеханические ограничения на точность измерений имеют существенно меньший порядок, чем ограничения, обусловленные молекулярно-кинетическим строением вещества (подраздел «Физические ограничения, связанные с дискретностью строения вещества»), ввиду чрезвычайной малости постоянной Планка $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж по сравнению с постоянной Больцмана $k = 1{,}37 \cdot 10^{-23}$ Дж/К (если это сравнение проводить для реальных макроскопических систем, где $t \sim 1$ с, а T составляет единицы градусов).

Однако флуктуации измеряемых величин, обусловленные классическим (тепловым) движением частиц термодинамической системы, уменьшаются с понижением ее температуры, тогда как квантовые флуктуации могут проявлять совершенно иную (нетепловую) природу, и в реальной системе могут существовать условия, при которых квантовые флуктуации становятся преобладающими.

Это следует из обобщенной *формулы Найквиста* для флуктуационной (шумовой) мощности в термодинамически

Пример 8. Потенциальная точность совместных измерений зависимости электрического напряжения от времени

Используя соотношение неопределенностей для энергии и времени (33):

$$\Delta E \Delta t \geq h,$$

где ΔE и Δt можно рассматривать как погрешности измерения энергии и времени соответственно [21], представим энергию в виде произведения qU. Выбирая в качестве q элементарный заряд (заряд электрона $e \sim 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл), эту формулу можно записать в виде

$$\Delta U \Delta t \geq \frac{h}{e} \sim 4 \cdot 10^{-15} \text{ В} \cdot \text{с}.$$

Подставляя вместо Δt время измерения $\tau_{изм}$ [18], получим, что потенциально достижимая погрешность измерения мгновенного значения электрического напряжения составляет

$$\Delta U \geq \frac{h}{e \tau_{изм}},$$

т. е. $\Delta U \geq 4 \cdot 10^{-6}$ В при $\tau_{изм} = 1 \cdot 10^{-9}$ с.

Это коррелирует с теорией, развитой в [13], где показано, что энергетический порог чувствительности средства измерений пропорционален его погрешности, мощности, равновесной системе с дискретными уровнями энергии $E_i = h\nu_i$:

$$\sqrt{\overline{p_{\text{ш}}^2}} = \left[\frac{2h\nu_i}{e^{\frac{h\nu_i}{kT}} - 1} + h\nu_i \right] \Delta\nu_i . \qquad (34)$$

Здесь первое слагаемое определяет собственно тепловой шум, а второе обусловлено «нулевыми колебаниями вакуума». При условии $h\nu_i \gg kT$ (что, в частности, справедливо для области оптических частот и выше) формула (34) преобразуется к виду

$$\sqrt{\overline{p_{\text{ш}}^2}} = \left(h\nu + 2kT \right) \Delta\nu \approx h\nu\Delta\nu, \qquad (34\text{-}1)$$

т. е. фактически не содержит зависимости от температуры. В общем случае квантовые флуктуации начинают проявляться, когда $h\nu \gtrsim kT$.

Влияние внешних условий измерения

Ранее на примерах было показано влияние внешних факторов, к которым относятся условия измерений, на результат измерения и рассмотрены отдельные приемы их учета. Здесь важно еще раз подчеркнуть, что ни один объ-

ект, никакая система не могут быть полностью изолированы от окружающей их среды. Сказанное относится ко всем материальным компонентам измерения: изучаемому объекту; применяемым средствам измерений, реализующим измерительный эксперимент; субъекту (оператору) или вспомогательным техническим средствам, управляющим ходом эксперимента.

Рассмотрим этот вопрос методологически в общем виде, сначала — применительно к изучаемому объекту.

Влияние какого-либо параметра ψ_i, характеризующего окружающую (объект) среду, на измеряемую величину φ определяется в явном виде зависимостью между ними

$$\varphi = f(\psi_i)$$

и может быть учтено через обобщенные функции влияния

$$h_i = \frac{\partial f\left(\psi_i\right)}{\partial \psi_i} .$$

Если за время измерений Δt параметр ψ_i остается неизменным (постоянным), т. е. $\Delta\psi_i = 0$, то полученный результат измерения $\varphi^{\text{зн}}$ можно считать точным относительно этого параметра для поставленной измерительной задачи. Однако реально за время Δt происходят конечные неконтрония [т. е. первых членов ряда (36)], на первый план начинают выступать последовательно все новые и новые составляющие. Это является наглядным проявлением философского принципа неисчерпаемости наших знаний об окружающем мире.

Отсюда следует важное методологическое правило: полученное при точных измерениях значение измеряемой величины должно обязательно сопровождаться указанием значений существенных параметров внешних влияющих условий, к которым приведен полученный результат (либо — при которых выполнены измерения). В противном случае измерения, выполненные на одинаковых объектах, будут иметь несопоставимые результаты.

лируемые изменения параметра ψ_i, и результат измерения имеет некоторую неопределенность из-за влияния этого параметра

$$\Delta_i \varphi^{\text{зн}} = \Delta\psi \frac{\partial f(\psi_i)}{\partial \psi_i}. \qquad (35)$$

Расположим составляющие неопределенности полученного результата измерений по разным параметрам внешних условий в порядке их убывания

$$\Delta\psi_1 \frac{\partial f(\psi_1)}{\partial \psi_1} > \Delta\psi_2 \frac{\partial f(\psi_2)}{\partial \psi_2} > \ldots > \Delta\psi_i \frac{\partial f(\psi_i)}{\partial \psi_i} > \ldots . \qquad (36)$$

Для любой конкретной измерительной задачи, в которой задан уровень неопределенности искомого результата ($\Delta\varphi$), ряд (36) приобретает конечный характер, т. к. использование правила пренебрежимой составляющей [12] приводит к тому, что реальный вклад в результирующую погрешность дают лишь несколько первых членов ряда (обычно не более 3—5).

Однако при анализе потенциальной точности измерений всегда следует иметь в виду, что ряд (36) принципиально не ограничен и по мере повышения точности, т. е. последовательного учета, исключения или компенсации наиболее существенных факторов, влияющих на результат измере-

Об этом уже говорилось при рассмотрении измерений применительно к случайным процессам и полям. В подразделе «Квантовомеханические ограничения» приведены соотношения Гейзенберга (32-1) и (33), связывающие неопределенность пространственной или временной локализации микрообъекта, соответственно, с неопределенностью его импульса или энергии, что также связано со случайным (принципиально вероятностным) характером поведения квантовомеханических объектов.

Однако аналогичные соотношения имеют место и для случая детерминированных процессов в макроскопических системах. Рассмотрим две характерные ситуации при изучении гармонических колебаний.

Пример 9

Пусть процесс колебания какого-либо объекта происходит в течение ограниченного промежутка времени Δt, но на этом промежутке подчиняется гармоническому закону (рис. 3, *а*):

$$x(t) = \begin{cases} x_0 e^{i2\pi\nu_0 t} & \text{при } -\dfrac{\Delta t}{2} \le t \le \dfrac{\Delta t}{2}; \\ 0 & \text{при остальных } t. \end{cases} \qquad (37)$$

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ

Известно, что пространство и время являются наиболее общими, универсальными характеристиками материальных систем и в философии рассматриваются как неотъемлемые свойства (формы существования) материи. С точки зрения изучения потенциальной точности измерений важно подчеркнуть (как аксиому), что все реально изучаемые физические системы имеют *конечную протяженность как в пространстве, так и во времени.*

Конечную — это значит и не бесконечную, и не нулевую, даже если мы стремимся максимально точно локализовать в пространственно-временном континууме и изучаемое свойство объекта, и используемые средства измерений. Следовательно, все измеряемые величины или параметры изучаемых систем являются *усредненными* по определенному объему пространства (Δp) и интервалу времени (Δt).

Такой ограниченный во времени колебательный процесс имеет место при акте излучения «цуга» волн и практически — в любом реальном колебательном процессе, который мы обычно считаем чисто гармоническим (или монохроматическим, т. е. с единственной частотой ν_0). На самом деле он уже является не только немонохроматическим, но и вообще — непериодическим.

Для таких (непериодических) процессов спектральный анализ (разложение в спектр частот) производят через *интеграл Фурье*

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x_\nu \cdot e^{i2\pi\nu t}d\nu, \tag{38}$$

$$x_\nu=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi\nu t}dt. \tag{39}$$

Частотная составляющая (плотность спектра) x_ν с учетом (37) имеет вид:

$$x_\nu=\int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} x(t)e^{-i2\pi\nu t}dt = x_0\int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} e^{i2\pi(\nu_0-\nu)t}dt\ .$$

Так как $\int e^{ay}dy=\frac{1}{a}e^{ay}$, $a=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\sin z$, то имеем

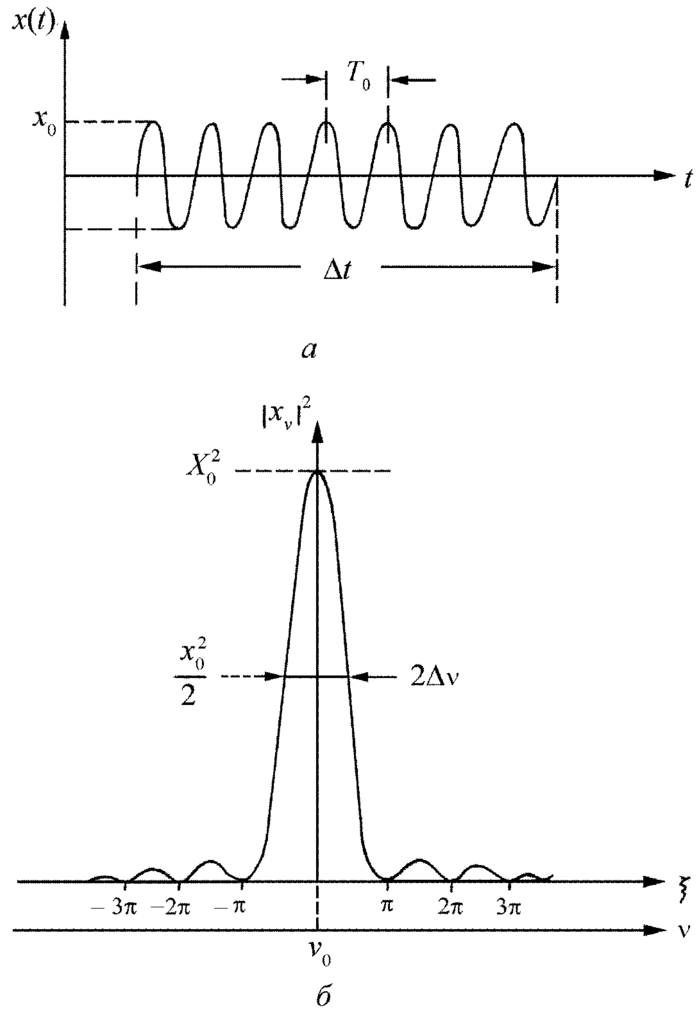

Рис. 3. Ограниченный во времени колебательный (квазимонохроматический) процесс (*а*) и спектр этого процесса (*б*)

кого процесса тем выше, чем больше интервал Δt времени его реализации или наблюдения. Отсюда следует, что точность определения частоты квазигармонического процесса обратно пропорциональна времени его существования или наблюдения.

Пример 10

Рассмотрим теперь другой случай, когда исследуется «структура» периодического процесса, т. е. изучается сама зависимость $x = x(t)$ путем последовательного измерения значений величины x_i в моменты времени t_i.

Из-за конечности времени измерения Δt измеренные значения x_i, относящиеся к моменту t_i, являются усредненными значениями $\overline{x(t_i)}$ на интервале от $\left(t_i - \frac{\Delta t}{2}\right)$ до $\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}\right)$ (см. рис. 4), т. е.

$$\overline{x(t_i)} = \frac{1}{\Delta t}\int\limits_{t_i-\Delta t/2}^{t_i+\Delta t/2} x(t)\,dt\,, \tag{43}$$

причем $x(t_i) = x_0 \cdot \sin\omega t_i$ — действительные значения измеряемой величины X в моменты времени t_i в случае чисто гармонического процесса

$$x_\nu = x_0 \frac{\sin\pi(\nu_0 - \nu)\Delta t}{\pi(\nu_0 - \nu)} = X_0 \frac{\sin\xi}{\xi}, \tag{40}$$

где введены обозначения $X_0 = x_0\Delta t$ и $\xi = \pi(\nu_0 - \nu)\Delta t$.

Распределение интенсивности в спектре $x(t)$ определяется квадратом его плотности, т. е.

$$I(\nu) = |x_\nu|^2 = X_0^2\left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2 = (x_0\Delta t)^2\left[\frac{\sin\pi(\nu_0 - \nu)\Delta t}{\pi(\nu_0 - \nu)\Delta t}\right]^2. \tag{41}$$

Вид этого распределения изображен на рис. (3, *б*); $I(\nu)$ имеет максимум, равный X_0^2, при $\nu = \nu_0$, т. е. при частоте квазимонохроматических колебаний, и обращается в 1-й нуль при $\xi = \pm\pi$. Отсюда

$$\Delta\nu_1 \equiv \nu_0 - \nu_1 = \frac{1}{\Delta t}.$$

При $\xi = \pm 2\pi$ $\Delta\nu_2 \equiv \nu_0 - \nu_2 = \frac{2}{t}$ и т. д.

Таким образом, $\Delta\nu\Delta t$ 1. (42)

Полученное для вполне детерминированного процесса незатухающих квазигармонических колебаний (37) соотношение (42) означает, что степень монохроматичности та-

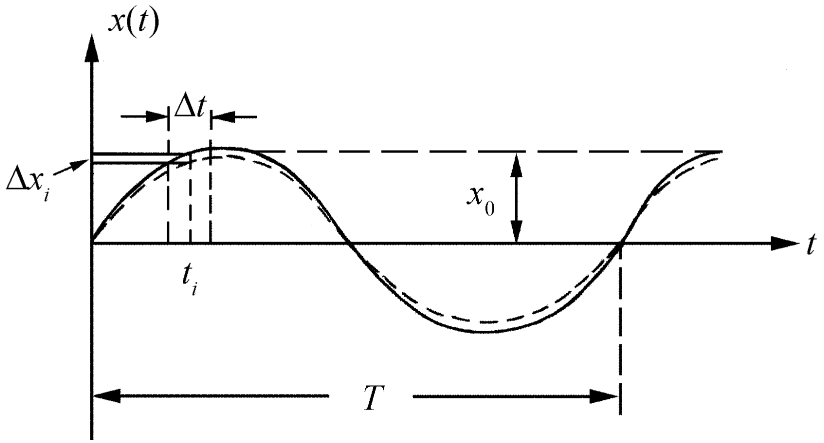

Рис. 4. Модель измерения «мгновенных» значений величины, изменяющейся по гармоническому закону

Таким образом, в результаты измерений «мгновенных» значений x_i изменяющегося с периодом T параметра x гармонического процесса следует вносить поправку

$$\theta\left(t_i\right) = \Delta x_i = x_0 \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{\Delta t}{T}\right)^2 \sin\omega t_i, \qquad (45\text{-}1)$$

изменяющуюся по тому же гармоническому закону, что и измеряемая величина X, но с амплитудой, зависящей от соотношения времени измерения Δt и периода процесса T, причем в квадратичной зависимости от этого соотношения.

$$\overline{x\left(t_i\right)} = \frac{x_0}{\Delta t}\int\limits_{t_i-\Delta t/2}^{t_i+\Delta t/2} \sin\omega t dt = \frac{x_0}{\omega\Delta t}\left[\cos\omega\left(t-\frac{\Delta t}{2}\right) - \cos\omega\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)\right].$$

Так как

$$\cos\left(\alpha-\beta\right) - \cos\left(\alpha+\beta\right) = -2\sin\frac{\alpha-\beta+\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta-\alpha-\beta}{2} =$$

$$= 2\sin\alpha\cdot\sin\beta,$$

то получаем

$$\overline{x\left(t_i\right)} = \frac{2x_0}{\omega\Delta t}\cdot\sin\omega t_i\cdot\sin\omega\frac{\Delta t}{2}. \qquad (43\text{-}1)$$

Найдем разность между действительным и измеренным (усредненным) значениями x_i:

$$\Delta x_i \equiv x\left(t_i\right) - \overline{x\left(t_i\right)} = x_0\sin\omega t_i - \frac{2x_0}{\omega\Delta t}\sin\omega t_i \sin\omega\frac{\Delta t}{2} =$$

$$= x_0\sin\omega t_i\left(1 - \frac{\sin\omega\frac{\Delta t}{2}}{\omega\frac{\Delta t}{2}}\right). \qquad (44)$$

Поскольку $\sin\limits_{\alpha\to 0}\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \ldots$, т. е.

$\sin\alpha \cong \alpha\left(1-\frac{\alpha^2}{3!}\right) = \alpha\left(1-\frac{\alpha^2}{6}\right)$, то получаем

$$\Delta x = \frac{x_0}{6}\sin\omega t\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)^2 = x_0\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{\Delta t}{T}\right)^2\sin\omega t. \qquad (45)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отмечена разница между предельно достижимой точностью (наивысшей достигнутой точностью) и потенциальной точностью, которая пока еще не достигнута при современном развитии науки, техники и технологий.

Под *предельной достижимой точностью* измерений понимают предельную точность, с которой может быть выполнено измерение физической величины на данном этапе развития науки и техники. Предельная точность измерений реализуется, как правило, в государственных эталонах, осуществляющих воспроизведение единицы физической величины с наивысшей точностью в рамках страны. Часто ее отождествляют с предельной чувствительностью измерительного прибора.

Под *потенциальной точностью измерений* понимается предельно достижимая точность на современном этапе развития научных знаний и техники. Потенциальная точность

Отдельно стоит вопрос о пространственно-временной однородности фундаментальных физических констант, используемых в уравнениях измерений. Их постоянство устанавливается на основе физических опытов, связанных с измерениями, однако дальнейшее постулирование постоянства не должно приводить к забвению (особенно для случая потенциальных измерений) того факта, что степень этого постоянства фундаментальных физических констант устанавливается экспериментально, путем измерений, и имеет конечную неопределенность.

та при рассмотрении потенциальной точности измерений необходимо проанализировать лишь влияние компонентов: φ (измеряемая величина как качество), *o* (объект изучения как носитель измеряемой величины), ψ (условия измерений или совокупность внешних влияющих факторов), [φ] (единица измеряемой физической величины), *s* (средства измерений, используемые для решения данной измерительной задачи), а также пространственно-временных параметров.

Подчеркнуто, что *любое конкретное измерение требует наличия определенной (конечной) априорной информации* о перечисленных компонентах измерения.

В результате анализа измерительной задачи на этапе составления плана измерительного эксперимента может выявиться, что эксперимент, как таковой, проводить вовсе нет необходимости: объем априорной информации может оказаться достаточным, чтобы найти искомое значение измерительной информации *расчетным путем* с требуемой точностью.

Для выполнения измерения необходимо иметь априорную информацию не только *о качественной*, но и о *количественной характеристике* измеряемой величины, ее размере. Чем более точная и, следовательно, более обширная

технически может быть не реализована на современном этапе развития технологии производства (в том числе уникального); сами измерения в этом случае становятся лишь потенциальными.

Специфика ситуации при рассмотрении потенциальной точности измерений позволяет ввести некоторые упрощения, исключающие из рассмотрения отдельные компоненты измерительной задачи, связанные, прежде всего, с параметрами экономического и технического (или технологического) характера. Так, представляется оправданным отвлечься от возможности возникновения грубых ошибок (промахов), связанных с просчетами в реализации плана измерительного эксперимента, от несовершенства оператора, от ограничений на точность, связанных с неидеальностью методов и средств обработки полученной измерительной информации и т. п.

Разумно предположить также, что потенциально можно свести к пренебрежимо малой величине случайную составляющую погрешности измерений за счет многократности отсчетов, т. е. оставить в рассмотрении лишь неопределенности при однократном измерении.

Таким образом, на основе системного подхода с использованием теоретико-множественного математического аппарааприорная информация имеется о размере измеряемой величины, тем больше сил и средств остается на получение более полной апостериорной информации, уточняющей априорную.

Измерительный сигнал, поступающий от объекта на вход средства измерений, помимо информации об измеряемой величине может также нести информацию о других, так называемых «*неинформативных*» *параметрах* объекта, которые влияют на показания средства измерений. Это особенно характерно при измерениях в динамическом режиме.

Казалось бы, все более уточняя (по мере накопления знаний) значения параметров изучаемого объекта (т. е. все более уменьшая их неопределенность), можно постепенно, но непрерывно, уменьшать неопределенность результата измерения, связанную с этими параметрами.

Имеется, однако, определенный вид физических знаний об объектах окружающего нас мира, который заставляет говорить о *принципиальных пределах точности*, с которой мы можем получить количественную информацию о большинстве измеряемых физических величин.

Первый круг таких знаний связан с молекулярно-кинетическим представлением о строении вещества.

В любой реальной физической системе, даже если характеризующие ее состояния макроскопические величины считаются не зависящими от времени, т. е. постоянными, благодаря непрерывному движению микрочастиц происходят самопроизвольные изменения значений макроскопических (наблюдаемых) параметров около своего среднего равновесного значения. Эти случайные отклонения от среднего характеризуют *флуктуации физической величины на объекте.*

Если система состоит из *N* независимых частей, то относительная флуктуация любой функции состояния системы обратно пропорциональна корню квадратному из числа ее частей.

Это справедливо как для аддитивных (экстенсивных), так и для неаддитивных (интенсивных) величин. Примерами экстенсивных величин, характеризующих термодинамические свойства систем, являются объем вещества и его энергия; к интенсивным величинам относятся температура и давление системы.

Приведены оценки флуктуаций физической величины на примерах объема газа под поршнем, длины металлического стержня и напряжения электрического тока из-за те-

Вытекающая отсюда принципиальная неразличимость или *тождественность частиц* в квантовой механике приводит к соотношению, которое отражает *принципиальную неопределенность* в определении значений ряда измеряемых физических величин.

Неравенства, связывающие неопределенности одновременного определения координаты и проекции импульса частицы, выражаются *соотношением неопределенности Гейзенберга*. Это соотношение указывает на то, что, чем точнее определены координаты частицы, тем менее точно могут быть определены значения проекций ее импульса. Абсолютно точно определенным координатам соответствует полная неопределенность соответствующих проекций импульса частицы.

Следствием соотношения неопределенности Гейзенберга является ряд аналогичных соотношений неопределенностей между другими, так называемыми канонически сопряженными величинами. В частности, имеет место соотношение, которое указывает, что уменьшение времени наблюдения над системой (или — его неопределенности) приводит к увеличению неопределенности значения энергии этой системы, и наоборот — изучаемая система может

плового движения носителей заряда — электронов в проводнике.

Помимо рассмотренных естественных ограничений из-за флуктуационных явлений, связанных с дискретной структурой наблюдаемых макроскопических объектов, имеются ограничения на точность измерений еще более фундаментального характера. Они связаны с квантовомеханическими (дискретными) свойствами поведения объектов микромира.

Квантовой механикой был установлен *корпускулярно-волновой дуализм* в свойствах микрообъектов как общее проявление взаимосвязи двух форм материи — вещества и поля.

Особенностью квантовой статистики является то, что одному состоянию квантовой системы в фазовом пространстве состояний соответствует не точка, а некоторый минимальный объем этого пространства. Это является следствием корпускулярно-волнового дуализма в поведении микрочастиц: поскольку понятие «координата» для волны лишено определенного физического смысла, также лишено обычного смысла понятие «траектория» частицы. Любая микрочастица оказывается как бы «размазанной» по пространству состояний.

измерения: изучаемому объекту, применяемым средствам измерений, реализующим измерительный эксперимент, субъекту (оператору) или вспомогательным техническим средствам, управляющим ходом эксперимента.

Используя функции влияния, расположим составляющие неопределенности полученного результата измерений в виде ряда по разным параметрам внешних условий в порядке их убывания.

Для любой конкретной измерительной задачи, в которой задан уровень неопределенности искомого результата, такой ряд приобретает конечный характер, т. к. использование правила пренебрежимой составляющей приводит к тому, что реальный вклад в результирующую погрешность дают лишь несколько первых членов ряда (обычно не более 3 — 5).

Однако при анализе потенциальной точности измерений всегда следует иметь в виду, что построенный ряд принципиально не ограничен и по мере повышения точности, т. е. последовательного учета, исключения или компенсации наиболее существенных факторов, влияющих на результат измерения, на первый план начинают выступать последовательно все новые и новые составляющие.

иметь точные значения энергии лишь за неопределенно большие интервалы времени (т. е. только в стационарных случаях).

Необходимо отметить, что все квантовомеханические ограничения на точность измерений существенно меньший порядок, чем ограничения, обусловленные молекулярно-кинетическим строением вещества, ввиду чрезвычайной малости постоянной Планка по сравнению с постоянной Больцмана.

Однако флуктуации измеряемых величин, обусловленные классическим (тепловым) движением частиц термодинамической системы, уменьшаются с понижением ее температуры, тогда как квантовые флуктуации могут проявлять совершенно иную (нетепловую) природу, и в реальной системе могут существовать условия, при которых квантовые флуктуации становятся преобладающими. Сказанное проиллюстрировано приведенными примерами.

Рассматривая роль влияния внешних факторов, к которым относятся условия измерений, на результат измерения, важно подчеркнуть, что ни один объект, никакая система не могут быть полностью изолированы от окружающей их среды. Это относится ко всем материальным компонентам соотношение означает, что степень монохроматичности такого процесса тем выше, чем больше интервал времени его реализации или наблюдения. Отсюда следует, что точность определения частоты квазигармонического процесса обратно пропорциональна времени его существования или наблюдения.

Показано также, что в результаты измерений «мгновенных» значений x_i изменяющегося с периодом T параметра x гармонического процесса следует вносить поправку, изменяющуюся по тому же гармоническому закону, что и измеряемая величина X, но с амплитудой, зависящей от соотношения времени измерения Δt и периода процесса T, причем в квадратичной зависимости от этого соотношения.

С точки зрения изучения потенциальной точности измерений важно подчеркнуть, что все реально изучаемые физические системы имеют *конечную протяженность как в пространстве, так и во времени*, и все измеряемые величины или параметры являются *усредненными* по этим объему пространства и интервалу времени и подчиняются соотношениям Гейзенберга.

Конечную — это значит и не бесконечную, и не нулевую, даже если мы стремимся максимально точно локализовать в пространственно-временном континууме и изучаемое свойство объекта, и используемые средства измерений. Приведенные соотношения Гейзенберга связывают неопределенность пространственной или временной локализации микрообъекта, соответственно, с неопределенностью его импульса или энергии, что подчеркивает случайный (принципиально вероятностный) характер поведения квантовомеханических объектов.

Однако аналогичные соотношения имеют место и для случая детерминированных процессов в макроскопических системах.

Полученное в примере для вполне детерминированного процесса незатухающих квазигармонических колебаний

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Александров В.С., Себекин А.П., Слаев В.А.* Основные направления развития научных исследований в области метрологии // Труды III сессии Междунар. научн. школы «Современные фундаментальные проблемы и прикладные задачи теории точности и качества машин, приборов, систем» TAPAQMDS'98. С.-Пб., 1998. С. 103—104.

2. *Балалаев В.А., Слаев В.А., Синяков А.И.* Теория систем воспроизведения единиц и передачи их размеров. Науч. издание — Учеб. пособие / Под ред. В.А. Слаева. С.-Пб.: АНО НПО «Профессионал», 2004. 160 с.

3. *Брагинский В.Б.* Физические эксперименты с пробными телами. М.: Физматгиз, 1970. 136 с.

4. *Брагинский В.Б., Манукин А.Б.* Измерение малых сил в физических экспериментах. М.: Наука, 1974. 151 с.

5. *Василенко Г.И.* Теория восстановления сигналов: О редукции к идеальному прибору в физике и технике. М.: Сов. радио, 1979. 272 с.

6. *Воронцов Ю.И.* Теория и методы макроскопических измерений: Уч. рук-во / Под ред. В.Б. Брагинского. М.: Наука, 1989. 280 с.

7. *Исаев Л.К.* О месте метрологии в системе наук и еще раз о ее постулатах // Измерительная техника. № 8. 1993. С. 10—11.

8. *Кедров Б.М.* Классификация наук. Т. 2. М.: Мысль, 1965.

9. *Кнорринг В.Г.* Развитие репрезентационной теории измерений // Измерение, контроль, автоматика. Вып. 11—12 (33—34). 1980. С. 3—9.

10. *Ложников В.Я.* Аксиоматические основы метризации // Тез. докладов II Всесоюзного совещания по теоретической метрологии. Л., 1983. С. 13—14.

11. *Мак-Дональд Д.* Введение в физику шумов и флуктуаций / Пер. с англ. М.: ИИЛ, 1964. 158 с.

12. *Маликов М.Ф.* Основы метрологии. Ч. 1. Учение об измерении. М.: Комитет по делам мер и измерительных приборов при СМ СССР, 1949. 479 с.

13. *Новицкий П.В.* Основы информационной теории измерительных устройств. Л.: Энергия, 1968. 248 с.

14. *Пиотровский Я.* Теория измерений для инженеров / Пер. с польск. М.: Мир, 1989. 335 с.

15. *Пфанцагль И.* Теория измерений. М.: Мир, 1976. 248 с.

16. *Рабинович С.Г.* Фотогальванометрические компенсационные приборы. М.; Л.: Энергия, 1972. 248 с.

17. *Семенов Л.А., Грановский В.А., Сирая Т.Н.* Обзор основных проблем теоретической метрологии // Фундаментальные проблемы метрологии. Л.: НПО «ВНИИМ им. Д.И. Менделеева», 1981. С. 13—23.

18. *Синяков А.И., Федоров А.М.* Оценка погрешностей методик выполнения измерений напряжения / В кн. LVIII научно-технической конференции, посвященной Дню радио. СПб.: Издательство СПбГЭТУ ЛЭТИ, 2003. С. 233—234.

19. *Слабкий Л.И.* Методы и приборы предельных измерений в экспериментальной физике. М.: Наука, 1973. 272 с.

20. *Слаев В.А.* Математические аспекты теории измерений // Тезисы докладов научн.-техн. конф. «Датчик-96». Т. 1. Гурзуф, 1996. С. 14—15.

21. *Слаев В.А.* Метрологическое обеспечение аппаратуры магнитной записи: Научное издание. СПб.: НПО «Мир и Семья», 2004. 174 с.

22. *Слаев В.А.* Метрологические проблемы информационных технологий // Измерительная техника. № 11. 1994. С. 4—8.

23. *Слаев В.А.* О месте теоретической метрологии в системе наук и ее предметной области // Тезисы докладов научн.-техн. конф. «Диагностика, информатика и метрология — 95». СПб., 1995. С. 23—24.

24. *Стахов А.П.* Введение в алгоритмическую теорию измерения. М.: Сов. радио, 1977. 288 с.

25. *Тарбеев Ю.В.* Актуальные задачи научных метрологических исследований // Измерительная техника. № 3. 1983. С. 3—6.

26. *Тарбеев Ю.В.* Пути дальнейшего развития теоретических основ метрологии // Труды метрологических институтов СССР. Вып. 237 (297). Л., 1979. С. 3—8.

27. *Тарбеев Ю.В., Довбета Л.И.* Содержание метрологии и ее место в системе наук // Фундаментальные проблемы метрологии. Л.: НПО «ВНИИМ им. Д.И. Менделеева», 1981. С. 4—12.

28. *Цветков Э.И.* Основы теории статистических измерений. Л.: Энергоатомиздат, 1986. 256 с.

29. *Newton I.* Arithmetica universales, 1707.

Балалаев Владимир Алексеевич
Слаев Валерий Абдуллович
Синяков Алексадр Игнатьевич

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЙ

Издание подготовлено в АНО НПО «Профессионал»
191023, Санкт-Петербург, ул. Садовая, 28—30, корп. 35
Тел./Факс: 321-67-38, 710-59-91, 715-14-35
mail@naukaspb.ru, mis95@mail.com
www.naukaspb.ru

Ответственный за издание: *Полуда А.А.*
Ответственный за подготовку: *Жадобина Т.И.*
Ответственный редактор: *Белканова Л.В.*
Редактор: *Чернухо Л.Д.*
Компьютерная верстка: *Коробова Н.В.*

Сдано в набор 30.05.2005. Подписано к печати 01.08.2005.
Формат 60×90/16.
Объем 6,5 печ. л. Тираж 300 экз.

ОГЛАВЛЕНИЕ