ВСЕСОЮЗНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ МЕТРОЛОГИИ им. Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

Справ.

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ

Труды метрологических институтов СССР

ВЫПУСК 134 (194)

ВСЕСОЮЗНЫЙ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
МЕТРОЛОГИИ им. Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ

Труды метрологических институтов СССР

ВЫПУСК 134 (194)

Под редакцией
доктора техн. наук, профессора ***К. П. ШИРОКОВА***

ИЗДАТЕЛЬСТВО СТАНДАРТОВ

МОСКВА — ЛЕНИНГРАД
1972

Ответственный редактор
доктор технических наук профессор
В. О. АРУТЮНОВ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Информативность результатов измерений зависит от их точности, и при необходимости повышения ее уровня на известном этапе приходится прибегать к многократным наблюдениям и обрабатывать последние для нахождения оценок погрешностей получаемых результатов. Опубликовано много работ, излагающих математические основы обработки результатов наблюдений. Однако, к сожалению, до настоящего времени не имеется нормативных документов, позволяющих единообразно выбирать оценки параметров точности результатов измерений и пользоваться единой методикой их вычисления. В связи с этим часто указываются параметры точности результатов, несравнимые друг с другом, вследствие чего теряют в ценности и сами результаты.

Особенно чувствуется отсутствие унифицированной методики обработки результатов наблюдений в области метрологических исследований, в которых точность воспроизведения единиц и передачи их размеров оказывает большое влияние на точность широкого круга средств измерений и тем самым на общий уровень точности всех выполняемых с их помощью измерений. Не требует доказательств актуальность унификации оценок точности и при подготовке к публикации стандартных и справочных данных о свойствах всякого рода веществ и материалов.

ВНИИМ им. Д. И. Менделеева включил в свою тематику разработку рекомендаций по методике обработки наблюдений при измерениях, первым результатом которой явилась рекомендация, относящаяся к прямым измерениям. Она публикуется в настоящем сборнике от имени ее авторов — Ж. Ф. Кудряшовой, С. Г. Рабиновича и К. А. Резника.

Представляется желательным, чтобы в дальнейшем, после соответствующей аппробации, рекомендация была доведена до уровня нормативного документа.

Помимо этого предполагается продолжить работу и охватить те случаи прямых измерений, для которых не подтверждается гипотеза о нормальности распределения наблюдений, а также другие, более сложные, виды измерений, и в первую очередь косвенные измерения.

В заключении приведены пояснения к некоторым принятым в рекомендации положениям.

Замечания, которые могут возникнуть при практическом применении рекомендации, просим направлять по адресу: Ленинград 198005, Московский проспект 19, ВНИИМ им. Д. И. Менделеева, метрологический отдел.

Редактор

УДК 53.08:519.2 (083.96)

Ж. Ф. Кудряшова, С. Г. Рабинович, К. А. Резник
ВНИИМ

РЕКОМЕНДАЦИЯ

по методам обработки результатов наблюдений при прямых измерениях

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

A — истинное значение измеряемой величины;

a_1, a_2, a_3, a_4 — 1-й — 4-й начальные моменты;

b — координата точки прямой регрессии, соответствующая среднему значению аргумента;

d^* — оценка отношения математического ожидания абсолютных значений погрешности к стандартному отклонению (оценка смещенная);

d_i — разности последовательных наблюдений;

$\bar{d}$ — среднее значение разностей последовательных отклонений;

$D(X)$ — дисперсия случайной величины X;

f — число наблюдений в интервале гистограммы;

g_i — веса объединяемых данных;

h — длина интервала группирования данных наблюдений;

H — число уравнений связи;

k — число степеней свободы;

K — коэффициент, используемый при вычислении толерантного интервала;

L — число групп наблюдений; число интервалов при группировании наблюдений; число измеряемых величин в п. 6. 3;

l_1, l_2 — границы доверительного интервала; границы толерантного интервала;

$M(X)$ — математическое ожидание случайной величины X;

m_1, m_2, m_3, m_4 — 1-й — 4-й центральные эмпирические моменты;

n — число данных в группе наблюдений;

N — общее число наблюдений во всех группах;

P — вероятность наступления события;

q — вероятность ненаступления события; уровень значимости критерия;

R_n — размах;

r — число параметров теоретического закона распределения;

S^2 — оценка дисперсии,

S — оценка среднего квадратического отклонения группы наблюдений;

$S_{\bar{x}}$ — оценка среднего квадратического отклонения среднего арифметического;

t_q — q-процентная точка распределения Стьюдента;

$(t_q)_{\bar{x}}$ — q-процентная точка распределения средних арифметических;

$(t_q)_\theta$ — q—q-процентная точка распределения композиции неисключенных остатков систематических погрешностей;

$(t_q)_\Sigma$ — коэффициент, соответствующий q-процентной точке композиции распределения случайных погрешностей и неисключенных остатков систематических погрешностей;

u_i — данное i-го наблюдения с неисключенными систематическими погрешностями;

$\bar{u}$ — предварительный результат измерения;

V_i — значение i-й влияющей величины;

ΔV_i — отклонение i-й влияющей величины от номинального значения;

W_i — частость i-го интервала;

X — случайная величина;

x_i — результат i-го наблюдения;

x_{io} — середина i-го интервала сгруппированных наблюдений;

$\bar{x}$ — среднее арифметическое наблюдений (при отсутствии систематических погрешностей — результат измерения);

$\bar{\bar{x}}$ — совокупное среднее арифметическое;

Z_q — q — процентная точка нормального распределения;

α — доверительная вероятность; параметр сдвига прямой регрессии;

β — угловой коэффициент прямой регрессии;

Δ — абсолютная погрешность;

δ — относительная порешность;

τ_i — коэффициент влияния i-й влияющей величины на погрешность результата;

θ — неисключенный остаток систематической погрешности;

Θ_i — граница неисключенных остатков систематической погрешности из-за i-й влияющей величины;

Θ_Σ — граница суммы неисключенных остатков систематической погрешности;

λ — известная систематическая погрешность;

μ_{xy} — смешанный момент второго порядка;

ν — критерий соответствия Аббе;

ρ — коэффициент корреляции;

σ — среднее квадратическое отклонение;

σ^2 — дисперсия;

τ — относительный коэффициент влияния i-й влияющей величины;

$\Phi(z)$ — интегральная функция нормированного нормального распределения;

$\varphi(z)$ — плотность вероятности нормированного нормального распределения;

χ^2 — критерий соответствия К. Пирсона.

1. Для обозначения случайных величин применены заглавные буквы латинского алфавита (например, X, Y).

2. Символ со знаком «~» обозначает оценку соответствующего параметра. Например, если $D(X)$ — дисперсия X то $\tilde{D}(X)$ — оценка дисперсии X.

3. Символ со знаком «*» обозначает смещенную оценку параметра.

4. Символ со знаком «v» обозначает, что в оценку соответствующего параметра внесены поправки.

---

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Прямое измерение — измерение, при котором измеряемую величину непосредственно сравнивают с мерой этой величины или ее значение отсчитывают по показаниям прибора.

1.2. Наблюдение — экспериментальная операция, выполняемая в процессе измерения, в итоге которой получают одно из значений, подлежащих обработке для получения результата измерения. Различают измерения с однократным и с многократными наблюдениями. При измерении с однократным наблюдением термином «наблюдение» пользоваться не следует.

1.3. Погрешность измерения — отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины.

Однако, поскольку истинное значение измеряемой величины остается неизвестным, на практике погрешность измерения оценивают путем изучения метода измерения и используемых средств измерений.

По способу выражения различают погрешности абсолютные и относительные. Абсолютной называют погрешность, выраженную в единицах измеряемой величины, а относительной — погрешность, выраженную в долях или процентах от истинного значения измеряемой величины.

Систематическая погрешность — это составляющая погрешности измерения, которая при повторных измерениях одной и той же величины, выполняемых при неизменных условиях, остается постоянной или закономерно изменяется.

Случайная погрешность — составляющая погрешности измерения, изменяющаяся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины.

1.4. Резко выделяющееся наблюдение — это наблюдение, отклонение которого от среднего арифметического группы существенно превышает оправданные объективными условиями измерения значения систематических и случайных погрешностей.

1.5. Группа наблюдений — совокупность результатов наблюдений, полученных при одних и тех же условиях.

1.6. Доверительный интервал — интервал со случайными границами, который с заданной вероятностью, называемой доверительной, накрывает истинное значение измеряемой величины. Границы доверительного интервала называют доверительными границами.

1.7. Толерантный интервал — интервал со случайными границами, который с заданной вероятностью накрывает заданную долю генеральной совокупности наблюдений. Границы толерантного интервала называют толерантными границами.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ГРУППЫ НАБЛЮДЕНИЙ

2.1. Результат измерения

За результат измерения принимают среднее арифметическое данных наблюдений, из которых исключены систематические погрешности.

Для вычисления результата измерения следует из каждого наблюдения u_i исключить систематическую погрешность λ_i. В итоге получим исправленный результат i-го наблюдения

$$x_i = u_i - \lambda_i .$$

Затем вычислим среднее арифметическое

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i , \qquad (2.1)$$

где n — число наблюдений.

Если известно, что систематическая погрешность не изменилась в процессе измерения, т. е. если $\lambda_i = \lambda$, то при вычислении результата измерения можно сначала вычислить предварительный результат измерения, под которым понимают среднее арифметическое наблюдений с неисключенными систематическими погрешностями

$$\bar{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i ,$$

а затем исключить систематическую погрешность λ

$$\bar{x} = \bar{u} - \lambda \ .$$

2.2. Характеристики рассеивания наблюдений

Наличие случайных погрешностей вызывает рассеивание наблюдений. В качестве основных числовых характеристик случайного рассеивания наблюдений в рекомендации приняты дисперсия σ^2 или среднее квадратическое отклонение (СКО) σ. Ограниченное число наблюдений позволяет получать лишь оценки этих характеристик.

Несмещенную оценку дисперсии S^2 вычисляют по формуле

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \ . \qquad (2.2)$$

Оценку СКО S группы наблюдений вычисляют по формуле

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \ . \qquad (2.3)$$

При 4—10 наблюдениях их рассеивание можно также характеризовать размахом

$$R_n = x_{макс} - x_{мин} \ , \qquad (2.4)$$

где $x_{макс}$, $x_{мин}$ — соответственно максимальное и минимальное значения из группы наблюдений.

2.3. Характеристики рассеивания результата измерения

Результат измерения, вычисленный по ограниченному числу наблюдений, отягощен случайной погрешностью, и поэтому его значение может меняться в некоторых пределах при переходе от одной группы наблюдений к другой. Оценку дисперсии среднего арифметического находят по формуле

$$S_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \ . \qquad (2.5)$$

Оценку СКО среднего арифметического вычисляют по формулам

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n\,(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \qquad (2.6)$$

или

$$S_{\bar{x}} = S/\sqrt{n} \quad . \qquad (2.7)$$

2.4. Характеристики рассеивания характеристик рассеивания наблюдений

Рассеивание оценки дисперсии S^2 около ее истинного значения σ^2 характеризуется дисперсией дисперсии, оценку которой $\tilde{D}(S^2)$ находят по приближенной формуле

$$\tilde{D}(S^2) = \frac{m_4^* - m_2^{*2}}{n} \quad , \qquad (2.8)$$

где m_2^*, m_4^* — оценки центральных моментов распределения четвертого и второго порядков;

$$m_2^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \ , \qquad (2.9)$$

$$m_4^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^4 \ . \qquad (2.10)$$

Если известно, что генеральная совокупность имеет нормальное распределение, то оценку дисперсии оценки дисперсии находят по приближенной формуле

$$\tilde{D}\ (S^2) \approx 2 \left(\frac{S^4}{n} \right) . \qquad (2.11)$$

Вместо оценки дисперсии оценки дисперсии может быть вычислена оценка СКО оценки СКО, которую находят по приближенной формуле

$$\tilde{\sigma}(S) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_4^* - m_2^{*2}}{n\ m_2^*}} \quad . \qquad (2.12)$$

Если известно, что данные наблюдений распределены по нормальному закону, то оценку СКО оценки СКО определяют по приближенной формуле

$$\tilde{\sigma}(S) = \frac{S}{\sqrt{2n}} \quad . \qquad (2.13)$$

Оценку дисперсии оценки дисперсии среднего арифметического или оценку СКО оценки СКО среднего арифметического вычисляют по формулам (2.8)—(2.13), соответственно, в которые для этого вместо S подставляют $S_{\bar{x}}$.

2.5. Правила округлений

Точность результатов наблюдений и последующих вычислений при их обработке должна быть согласована с необходимой точностью результата измерения.

Погрешность результата измерения следует выражать не более чем двумя значащими цифрами. Две значащие цифры следует удерживать:

а) при точных измерениях;

б) если погрешность выражена числом с цифрой старшего разряда, равной или меньшей 3.

Промежуточные вычисления при обработке наблюдений следует выполнять с таким числом цифр, чтобы погрешности вычислений не могли исказить последнюю значащую цифру результата более чем на половину единицы последнего разряда. Для этого число цифр в результатах промежуточных расчетов обычно должно быть на единицу или две больше, чем в окончательном результате. Погрешности при промежуточных вычислениях должны быть выражены не более чем тремя значащими цифрами. При расчетах следует пользоваться правилами приближенных вычислений [2], а округление выполнять, пользуясь следующими правилами:

1. Округлять результат измерения следует так, чтобы он оканчивался цифрой того же разряда, что и значение погрешности. Если десятичная дробь в числовом значении результата измерения оканчивается нулями, то нули отбрасывают только до того разряда, который соответствует разряду погрешности.

Пример. Число 999,99872142 при погрешности ±0,000005 следует округлять до 999,998721.

2. Если первая (слева направо) из заменяемых нулями или отбрасываемых цифр меньше 5, то остающиеся цифры не изменяют. Лишние цифры в целых числах заменяют нулями, а в десятичных дробях отбрасывают.

Пример. При сохранении четырех значащих цифр число 283 435 должно быть округлено до 283 400; число 384,435 — до 384,4.

3. Если первая из заменяемых нулями или отбрасываемых цифр равна 5, а за ней не следует никаких цифр или идут нули, то округление производят до ближайшего четного числа, т. е.

четную последнюю цифру или нуль оставляют без изменения, нечетную увеличивают на единицу.

Пример. При сохранении трех значащих цифр число 264,50 округляют до 264; число 645,5 округляют до 646.

4. Если первая из заменяемых нулями или отбрасываемых цифр больше 5 или равна 5, но за ней следует отличная от нуля цифра, то последнюю оставляемую цифру увеличивают на единицу.

Пример. При сохранении трех значащих цифр число 17,58 округляют до 17,6; число 18 598 — до 18 600; число 352,521 — до 353.

2. 6. Пример вычисления статистических характеристик при малом числе наблюдений

В результате сличений эталонных мер килограмма Cr $\frac{\text{ЭЯГТ}}{1\ \text{кг}}$ с килограммом В $\frac{\text{ст}}{1\ \text{кг}}$ № 9 получена группа результатов наблюдений, приведенных в столбце 1 табл. 2. 1. В столбце 2 принято $x_{io} = x_i - 999{,}998000$, в столбцах 3—5 рассчитаны вспомогательные величины.

Таблица 2.1

К вычислению статистических характеристик по результатам сличений мер массы

x_i, г	$x_{io} \cdot 10^6$	$(x_{io}-\bar{x}_{io})10^6$	$(x_{io}-\bar{x}_{io})^2 \cdot 10^{12}$	$(x_{io}-\bar{x}_{io})^4 \cdot 10^{24}$
1	2	3	4	5
999,998738	738	+17	289	83 500
998699	699	−22	484	234 300
998700	700	−21	441	194 500
998743	743	+22	484	234 300
998724	724	+ 3	9	00
998737	737	+16	256	65 500
998715	715	− 6	36	1 300
998738	738	+17	289	83 500
998703	703	−18	324	105 000
998713	713	− 8	64	4 100
Сумма	7 210	0	2 676	1 005 000

Массу килограмма Cr$\frac{ЭЯ1Т}{1\ кг}$ принимают равной среднему арифметическому, определяемому по формуле (2.1)

$$\bar{x}=999{,}998000+\bar{x}_{io}=999{,}998721\ г.$$

Оценку СКО вычисляют по формуле (2.3) и данным столбца 4 табл. 2.1.

$$S=\sqrt{\frac{2676}{9}\cdot 10^{-12}}\approx 17\cdot 10^{-6}\ г.$$

Оценку СКО результата измерения вычисляют по формуле (2.7):

$$S_{\bar{x}}=\frac{17\cdot 10^{-6}}{\sqrt{10}}=5\cdot 10^{-6}\ г.$$

Оценку СКО оценки СКО вычисляют по формуле (2.12) и и данным столбца 5 табл. 2.1. Предварительно вычисляют оценку четвертого момента и квадрат оценки второго момента распределения

$$m^{*}_{4}=\frac{1}{10}\sum_{1}^{10}(x_i-\bar{x})^4=100\,600\cdot 10^{-24};$$

$$m_2^{*2}=83\,500\cdot 10^{-24};\quad m_2^{*}=288\cdot 10^{-12};$$

$$\tilde{\sigma}(S)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{100\,600\cdot 10^{-24}-83\,500\cdot 10^{-24}}{10\cdot 288\cdot 10^{-12}}}=1\cdot 10^{-6}\ г.$$

Литература: [2, 7, 8].

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ БОЛЬШОМ ЧИСЛЕ ДАННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ ($n > 50$)

3.1. Гистограмма и полигон распределения наблюдений

Результаты наблюдений записывают в таблицу в порядке их поступления. Пример записи столбцами приведен в табл. 3.1, в которой представлены отклонения напряжения от номинального значения, полученные при изучении стабильности источника напряжения.

Таблица 3.1

Результаты наблюдений, полученные при исследовании источника напряжения

Отклонения напряжения от номинального значения, мВ									
0,06	0,05	0,03	0,07	0,07	0,04	0,03	0,07	0,05	0,12
0,04	0,06	0,03	0,05	0,14	0,05	0,12	0,01	0,09	0,07
0,04	0,05	0,09	0,01	0,10	0,09	0,10	0,05	0,08	0,07
0,08	0,07	0,06	0,15	0,01	0,07	0,09	0,10	0,05	0,10
0,04	0,10	0,08	0,12	0,06	0,07	0,07	0,10	0,03	0,08
0,01	0,07	0,03	0,08	0,08	0,09	0,08	0,02	0,02	0,00
0,08	0,08	0,04	0,04	0,10	0,12	0,00	0,12	0,05	0,14
0,02	0,07	0,06	0,06	0,12	0,08	0,08	0,05	0,13	0,03
0,01	0,04	0,10	0,02	0,12	0,10	0,05	0,09	0,10	0,02
0,09	0,09	0,10	0,08	0,06	0,02	0,07	0,04	0,05	0,02
0,07	0,07	0,04	0,06	0,09	0,10	0,09	0,02	0,02	0,10
0,08	0,06	0,09	0,06	0,00	0,06	0,05	0,06	0,09	0,11
0,09	0,04	0,04	0,07	0,11	0,04	0,03	0,00	0,01	0,03
0,04	0,01	0,01	0,07	0,07	0,09	0,04	0,08	0,06	0,06
0,09	0,07	0,10	0,03	0,03	0,10	0,06	0,10	0,07	0,10

Для построения гистограммы и полигона наблюдения группируют по интервалам и вычисляют число наблюдений, попавших в каждый из них. Рекомендуемые числа интервалов L в зависимости от числа наблюдений приведены в табл. 3. 2.

Таблица 3.2

Число интервалов в зависимости от числа наблюдений

Число группируемых наблюдений	Рекомендуемое число интервалов, L
40—100	7—9
100—500	8—12
500—1 000	10—16
1 000—10 000	12—22

Кроме того, следует иметь в виду, что длина интервала группирования h должна быть больше погрешности округления при записи наблюдений. Эту длину вычисляют по формуле

$$h = \frac{x_{\text{макс}} - x_{\text{мин}}}{L}, \qquad (3.1)$$

где $x_{макс}$, $x_{мин}$ — наибольшее и наименьшее значения данных наблюдений.

Вычисленное по формуле (3. 1) значение длины интервала округляют. Например, для наблюдений, приведенных в табл. 3. 1, $x_{макс}=0{,}15$; $x_{мин}=0{,}00$. Число данных наблюдений 150. Согласно табл. 3. 2, принимают $L=8$, тогда $h=\frac{0{,}15}{8}=0{,}01875\ldots$ Это значение округляют и полагают $h=0{,}02$.

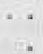
Обычно длину интервала принимают постоянной для всего ряда данных. Однако в случае несимметричных распределений на участках, где частость меняется очень быстро, целесообразно выбирать более мелкие интервалы группирования.

Далее устанавливают границы интервалов. Для этого весь диапазон от $x_{мин}$ до $x_{макс}$ разбивают на интервалы, равные h. При этом значения $x_{мин}$ и $x_{макс}$ округляют.

Затем подсчитывают число наблюдений, попадающих в каждый интервал. При этом целесообразно пользоваться обозначениями, приведенными в табл. 3. 3.

Таблица 3. 3

Условные обозначения, применяемые при подсчете числа наблюдений в каждом из интервалов

Число наблюдений	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Условные обозначения										

Результаты подсчетов заносят в табл. 3. 4, которая приведена вместе с данными наблюдений для рассматриваемого примера.

Частость наблюдений в каждом интервале находят делением числа наблюдений, попавших в соответствующий интервал, на общее число наблюдений. Для проверки правильности вычислений частости W_i всех интервалов суммируют. Сумма частостей должна быть близка к единице:

$$\sum_{i=1}^{L} W_i \approx 1.$$

Таблица 3.4

К вычислению частостей по интервалам

Номера интервалов	Границы интервалов		Наблюдения в интервале		Частость
	больше или равно	меньше	обозначение	число	
1	0,00	0,02		9	0,060
2	0,02	0,04		15	0,100
3	0,04	0,06		29	0,193
4	0,06	0,08		35	0,233
5	0,08	0,10		32	0,213
6	0,10	0,12		19	0,127
7	0,12	0,14		8	0,053
8	0,14	0,16		3	0,020
	Сумма			150	0,999

Для построения гистограммы (рис. 1) на оси абсцисс отмечают границы всех интервалов. На каждом интервале, как на основании, строят прямоугольник такой высоты, чтобы его площадь была равна частости этого интервала. Высота (ордината) каждого прямоугольника представляет собой среднюю эмпирическую плотность вероятности того, что значение величины находится в соответствующем интервале. Общая площадь между осью абсцисс и ступенчатой кривой должна быть равна единице. Масштаб графика рекомендуется выбирать так, чтобы высота гистограммы относилась к ее основанию примерно как 3 к 5.

Полигон распределения наблюдений по интервалам (рис. 2), являющейся кусочно-линейной аппроксимацией искомой функ-

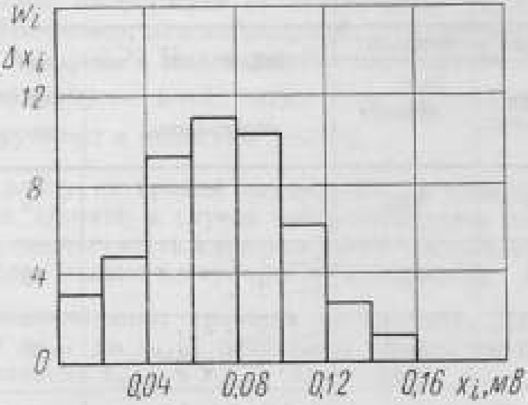


Рис. 1. Гистограмма.

Распределение отклонений напряжения от номинального значения, полученных при изучении стабильности источника напряжения.

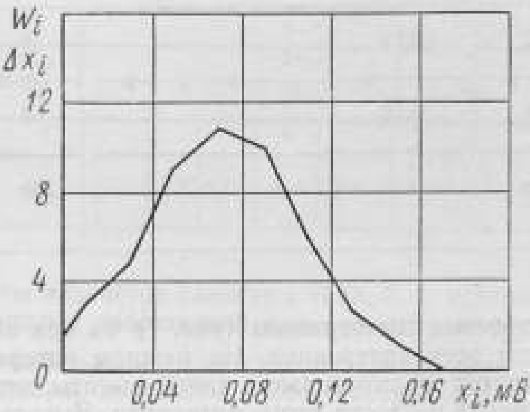


Рис. 2. Полигон.

Распределение отклонений напряжения от номинального значения, полученных при изучении стабильности источника напряжения.

ции плотности вероятности, получают соединением середин верхних сторон прямоугольников гистограммы.

3.2. Моменты

Для вычисления характеристик случайных погрешностей при группированных данных целесообразно использовать центральные моменты распределения, оценки m_j которых находят по формуле

$$m_j = \frac{\sum\limits_{i=1}^{L} (x_{io} - \bar{x})^j \tilde{f}_i}{\sum\limits_{i=1}^{L} \tilde{f}_i}, \quad j = 2, 3, 4, \qquad (2.3)$$

где x_{io} — середина i-го интервала;

$\bar{x}$ — среднее арифметическое наблюдений;

$\tilde{f}_i$ — число наблюдений в i-м интервале.

При $n>50$ вычисление центральных моментов с целью упрощения выполняют следующим образом:

1. Вычисляют абсциссы, соответствующие серединам вспомогательных интервалов, по формуле

$$x^*_{io} = \frac{x_{io} - x_a}{h}, \qquad (3.3)$$

где x_a — условное начало отсчета.

Условное начало отсчета целесообразно принять равным середине интервала группирования с наибольшей частотой наблюдений. Тогда абсцисса этого интервала будет равна нулю, а последующие значения x^*_{io} равны 1, 2, 3 и т. д. и —1, —2, —3 и т. д.

2. Вычисляют начальные моменты a_j для x^*_{io} по формуле

$$a_j = \frac{\sum\limits_{i=1}^{L} (x^*_{io})^j \cdot \tilde{f}_i}{\sum\limits_{i=1}^{L} \tilde{f}_i}.$$

Эти моменты будет называть вспомогательными.

Вычислять вспомогательные моменты целесообразно, пользуясь таблицей, подобной табл. 3.5.

Таблица 3.5

К вычислению вспомогательных моментов

Середины интервалов, x_{i0}	$\tilde{f}_i$	x^*_{io}	$\tilde{f}_i \cdot x^*_{io}$	$\tilde{f}_i \cdot (x^*_{io})^2$	$\tilde{f}_i \cdot (x^*_{io})^3$	$\tilde{f}_i \cdot (x^*_{io})^4$	$x^*_{io}+1$	$\tilde{f}_i \cdot (x^*_{io}+1)^4$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,01	9	−3	−27	81	−243	729	−2	144
0,03	15	−2	−30	60	−120	240	−1	15
0,05	29	−1	−29	29	−29	29	0	0
0,07	35	0	0	0	0	0	1	35
0,09	32	1	32	32	32	32	2	512
0,11	19	2	38	76	152	304	3	1539
0,13	8	3	24	72	216	648	4	2048
0,15	3	4	12	48	192	768	5	1875
Сумма	150		20	398	200	2750		6168

В столбец 1 табл. 3.5 заносят значения абсцисс, соответствующие серединам интервалов;

в столбец 2 — число наблюдений, попавших в каждый интервал;

в столбец 3 — абсциссы середин вспомогательных интервалов, полученные по формуле (3.3);

в столбец 4 — результат перемножения чисел столбцов 2 и 3.

Числа в столбце 5, т. е. значения $\tilde{f}_i(x^*_{io})^2$, получают в результате перемножения чисел столбца 4 на числа столбца 3. Числа столбца 6 получают перемножением чисел столбца 3 на числа столбца 5, а столбца 7 — перемножением чисел столбца 3 на числа столбца 6.

Контролируют правильность предыдущих расчетов с помощью таблицы значений четвертых моментов чисел наблюдений интервала, приведенной в приложении 1 для $\tilde{f}_i$ от 1 до 50.

Например: число наблюдений в первом интервале $\tilde{f}_i = 9$, абсцисса середины интервала x^*_{io}—3, искомое значение $\tilde{f}_i\,(x^*_{io})^4$ $=729$.

Совпадение чисел столбца 7 табл. 3.5 с соответствующими числами приложения 1 свидетельствует о правильности произведенных вычислений.

Затем находят суммы чисел каждого из столбцов 4—7 табл. 3.5 и делят их на общее число наблюдений n. Частное дает значения вспомогательных моментов.

Правильность полученных значений вспомогательных моментов проверяют следующим путем.

Вычисляют четвертый вспомогательный момент со сдвинутым на единицу началом отсчета a_4^*

$$a_4^* = \frac{\overline{f}_l\,(x^*_{l_0}+1)^4}{n}. \qquad (3.4)$$

Числитель этого выражения находят в приложении 1 соответственно каждому значению $\overline{f}_l$ и $(x_{l_0}^*+1)$. Затем вычисляют этот же момент с помощью тождества

$$a_4^{**} = a_4 + 4\,a_3 + 6\,a_2 + 4\,a_1 + 1, \qquad (3.5)$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 — вспомогательные моменты относительно выбранного начала отсчета x_a.

Если значения a_4^* и a_4^{**} совпадают, то вспомогательные моменты вычислены правильно.

Вычислим, например, вспомогательные моменты для данных табл. 3.1:

$$a_1 = \frac{20}{150} = 0{,}1333\,; \qquad a_2 = \frac{398}{150} = 2{,}653.$$

$$a_3 = \frac{200}{150} = 1{,}333\,; \qquad a_4 = \frac{2750}{150} = 18{,}33.$$

Проверим правильность вычислений вспомогательных моментов:

по формуле (3.4)

$$a_4^* = \frac{6168}{150} = 41{,}12\,;$$

по формуле (3.5)

$$a_4^{**} = 18{,}33 + 4\cdot 1{,}333 + 6\cdot 2{,}653 + 4\cdot 0{,}133 + 1 = 41{,}11.$$

Так как разность между полученными значениями a_4^* и a_4^{**} находится в пределах погрешности округления, то следует считать, что вычисления выполнены правильно.

Среднее арифметическое наблюдений и центральные моменты, кроме первого, который равен нулю, вычисляют по вспомогательным моментам при помощи соотношений:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= ha_1 + x_a, \\ m_2 &= h^2(a_2 - a_1^2), \\ m_3 &= h^3(a_3 - 3a_2a_1 + 2a_1^3), \\ m_4 &= h^4(a_4 - 4a_3a_1 + 6a_2a_1^2 - 3a_1). \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

где m_2, m_3, m_4 — 2-й, 3-й и 4-й центральные моменты.

Правильность вычислений третьего и четвертого центральных моментов нужно проверить путем сопоставления результатов, полученных по формулам (3.6) и вычисленных по формулам

$$\left.\begin{aligned} m_3^* &= h^3a_3 - 3hm_2a_1 - h^3a_1^3, \\ m_4^* &= h^4a_4 - 4hm_3a_1 - 6h^2m_2a_1^2 - h^4a_1^4 \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

Правильность вычислений второго момента проверяют без специальных приемов.

Вычислим, например, среднее арифметическое и центральные моменты для данных табл. 3.1 и проверим результаты:

$\bar{x} = 2 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}1333 + 0{,}07000 = 0{,}07266$ мВ;

$m_2 = 4 \cdot 10^{-4}(2{,}653 - 0{,}1333^2) = 10{,}54 \cdot 10^{-4}$ мВ^2;

$m_3 = 8 \cdot 10^{-6}(1{,}333 - 3 \cdot 2{,}653 \cdot 0{,}1333 + 2 \cdot 0{,}1333^3) = 2{,}22 \cdot 10^{-6}$ мВ^3;

$$m_4 = 16 \cdot 10^{-8}(18{,}33 - 4 \cdot 1{,}333 \cdot 0{,}1333 + 6 \cdot 2{,}653 \cdot 0{,}1333^2 - 3 \cdot 0{,}1333^4) = 286{,}4 \cdot 10^{-8} \text{ мВ}^4.$$

Проверка с помощью формул (3.7):

$$m_3^* = 8 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}333 - 2 \cdot 10^{-2} \cdot 3 \cdot 10{,}54 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}1333 - 8 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}1333^3 = 2{,}22 \cdot 10^{-6} \text{ мВ}^3$$

$$m_4^* = 16 \cdot 10^{-8} \cdot 18{,}33 - 4 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 2{,}22 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}1333 - 6 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 10{,}54 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}1332^2 - 16 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}1333^4 = 286{,}4 \cdot 10^{-8} \text{ мВ}^4.$$

Примечание. Правильность вычислений моментов m_3 и m_4 рекомендуется проверять непосредственно после вычислений каждого из них.

Значения моментов, вычисленные выше, иногда несколько отличаются от значений моментов несгруппированного распределения, так как при группировании предполагается, что частости сосредоточены в средних точках интервалов. С целью устранения ошибок, возникающих в связи с этим, используют поправки Шеппарда. Их вносят в случаях, когда:

а) основная часть частостей приходится на средние интервалы распределения и частости в крайних интервалах малы;

б) $h > 0{,}5\sqrt{m_2}$.

Примечание. Если $h < 0{,}5\sqrt{m_2}$, то погрешность $S = \sqrt{m_2}$ из-за группирования не превышает 1%.

Исправленные центральные моменты вычисляют по формулам:

$$\left.\begin{aligned}\check{m}_2 &= m_2 - h^2/12,\\ \check{m}_3 &= m_3,\\ \check{m}_4 &= m_4 - m_2 h^2/2 + h^4\cdot 7/240.\end{aligned}\right\} \quad (3.8)$$

В приведенном выше примере ширина интервала $h=0{,}02$ мВ, $\sqrt{m_2}=3{,}25\cdot 10^{-2}$ мВ. Так как $0{,}020>0{,}016$, то следует ввести поправки Шеппарда.

$$\check{m}_2 = 10{,}54\cdot 10^{-4} - 0{,}23\cdot 10^{-4} = 10{,}21\cdot 10^{-4}\ \text{мВ}^2;$$

$$\check{m}_3 = 2{,}22\cdot 10^{-6}\ \text{мВ}^3;$$

$$\check{m}_4 = 286{,}4\cdot 10^{-8} - \frac{4\cdot 10^{-4}}{2}\cdot 10{,}54\cdot 10^{-4} + \frac{7\cdot 16\cdot 10^{-8}}{240} = 265{,}8\cdot 10^{-8}\ \text{мВ}^4.$$

3. 3. Вычисление характеристик случайных погрешностей

Статистические характеристики по исправленным центральным моментам вычисляют с помощью формул:

$$\left.\begin{aligned} S^2 = \check{m}_2\ ;\ S = \sqrt{\check{m}_2}\ ;\\ S_{\bar{x}} = S/\sqrt{n}\ ;\\ \tilde{\sigma}(s) = \frac{1}{2S}\sqrt{\frac{\check{m}_4 - \check{m}_2^2}{n}} \end{aligned}\right\} \quad (3.9)$$

Для данных, приведенных в табл. 3.1, получим

$\bar{x}=0{,}073$ мВ; $S^2=10{,}21\cdot 10^{-4}$ мВ^2; $S=3{,}2\cdot 10^{-2}$ мВ;

$$S_{\bar{x}} = \frac{3{,}2\cdot 10^{-2}}{\sqrt{150}} = 3\cdot 10^{-3}\ \text{мВ};$$

$$\tilde{\sigma}(S) = \frac{1}{2\cdot 3{,}2\cdot 10^{-2}}\sqrt{\frac{(265{,}8-10{,}21^2)\cdot 10^{-8}}{150}} = 2\cdot 10^{-3}\ \text{мВ}.$$

Литература: [1, 4, 7].

4. ПОСТРОЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ

4. 1. О возможности установления доверительных интервалов

При решении многих практических задач распределение случайных погрешностей измерений можно достаточно хорошо аппроксимировать нормальным распределением. Поэтому приводимый ниже статистический анализ наблюдений основывается на гипотезе о нормальном их распределении. Эта гипотеза может быть проверена с помощью критериев, приведенных в пп. 4. 2 и 4. 3.

Следует заметить, что излагаемые в этих параграфах критерии (как и большинство других критериев подобного рода) не являются специфическими критериями нормальности, но позволяют проверить близость тех или иных числовых характеристик исследуемой совокупности к соответствующим характеристикам нормального распределения.

Если гипотеза о нормальности распределения экспериментальных данных отвергается, то в настоящее время не представляется возможным рекомендовать общую методику статистической обработки наблюдений. В этих случаях часто даже не известно, какая характеристика распределения может служить эффективной оценкой истинного значения измеряемой величины.

4. 2. Проверка гипотезы о нормальности распределения при $10 < n < 50$

Гипотезу проверяют с помощью двух критериев.

Критерий I. По данным наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вычисляют статистику d по формуле

$$\tilde{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n S^*}, \qquad (4.1)$$

где S^* — смещенная оценка СКО, вычисляемая по формуле

$$S^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}}. \qquad (4.2)$$

Принимаем, что гипотеза о нормальности согласуется с данными наблюдений, если

$$d_{1-q/2} \leqslant d \leqslant d_{q/2}\,. \qquad (4.3)$$

где $d_{1-q/2}$ и $d_{q/2}$ — процентные точки распределения статистики d, которые находят из приложения 2 по n и $q/2$ и $(1-q/2)$, причем q — выбираемый заранее уровень значимости критерия.

В противном случае гипотеза о нормальности должна быть отвергнута. В приложении 2 приведены значения $d_{1/2}$, $d_{1-q/2}$ для $q/2=1$; 5 и 10% и $(1-q/2)=90$; 95; 99% при $n=11\div1001$. Для отсутствующих значений n следует пользоваться линейной интерполяцией.

При $n>50$ распределение статистики d может быть принято за нормальное, математическое ожидание $M(d)$ которого и СКО $\sqrt{D(d)}$ приведены также в приложении 2.

Критерий II. Принимаем, что гипотеза о нормальности согласуется с данными наблюдений, если не более m разностей $(x_i-\overline{x})$ превзошли значение $Sz_{\alpha/2}$, где S определено по формуле (2.3), а $z_{\alpha/2}$ — верхняя 100 $\alpha/2$-процентная точка нормированной функции Лапласа (определяемая по приложению 4). α (n, q) определяют по n и уровню значимости q критерия как корень уравнения

$$1-\sum_{k=0}^{m} C_n^k\,(1-\alpha)^k\cdot\alpha^{n-k}=q\,, \qquad (4.4)$$

где α — доверительная вероятность.

В противном случае гипотеза о нормальности должна быть отвергнута.

Для нахождения значений α составлена таблица с входами n, q для значений $m=1$ и 2 (приложение 4).

При числе наблюдений $10<n\leqslant20$ следует принимать $m=1$; при $20<n\leqslant50$ принимают $m=2$.

Если при проверке гипотезы по одной и той же группе наблюдений для критерия I выбран уровень значимости q_{I}, а для критерия II — уровень значимости q_{II}, то уровень значимости составного критерия

$$q\leqslant q_{\text{I}}+q_{\text{II}}\,. \qquad (4.5)$$

При проверке гипотезы с помощью критериев I и II по данным двух независимых групп наблюдений уровень значимости суммарного критерия будет равен

$$q=1-(1-q_{\text{II}})\,(1-q_{\text{I}})=q_{\text{I}}+q_{\text{II}}-q_{\text{I}}\,q_{\text{II}}\,.$$

Пример. В табл. 4.1 приведены результаты наблюдений, полученные при измерении напряжения исследуемого источника с помощью потенциометра.

Таблица 4.1

Результаты наблюдений, полученные при измерении напряжения источника и предварительные вычисления

Номер наблюдения i	Показания потенциометра x_i, В	$(x_i-\overline{x})\cdot 10^4$	$(x_i-\overline{x})^2\cdot 10^8$	Номер наблюдения i	Показания потенциометра x_i, В	$(x_i-\overline{x})\cdot 10^4$	$(x_i-\overline{x})^2\cdot 10^8$
1	2	3	4	1	2	3	4
1	2,7997	+ 3	9	19	2,7988	— 6	36
2	7991	— 3	9	20	7999	+ 5	25
3	7990	— 4	16	21	7998	+ 4	16
4	7997	+ 3	9	22	7996	+ 2	4
5	7992	— 2	4	23	7992	— 2	4
6	7976	—18	324	24	8000	+ 6	36
7	7984	—10	100	25	7993	— 1	1
8	7999	+ 5	25	26	7988	— 6	36
9	7990	— 4	16	27	7993	— 1	1
10	7989	— 5	25	28	7982	—12	144
11	7997	+ 3	9	29	7999	+ 5	25
12	7993	— 1	1	30	7997	+ 3	9
13	8000	+ 6	36	31	7999	+ 5	25
14	8006	+12	144	32	7992	— 2	4
15	7998	+ 4	16	33	7999	+ 5	25
16	7995	+ 1	1	34	7989	— 5	25
17	7992	— 2	4	35	7994	0	0
18	8011	+17	289	36	7999	+ 5	25

Проверим, можно ли считать, что приведенные данные принадлежат совокупности, распределенной нормально.

1. Найдем оценки характеристик группы наблюдений

$$\overline{x} = \frac{1}{36}\sum_{1}^{36} x_i = 2,7994 \text{ В},$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{35}\sum_{1}^{36}(x_i-\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1478\cdot 10^{-8}}{35}} = 6{,}52\cdot 10^{-4} \text{ В.}$$

$$S^* = \sqrt{\frac{1}{36}\sum_{1}^{36}(x_i-\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1478\cdot 10^{-8}}{36}} = 6{,}41\cdot 10^{-4} \text{ В.}$$

2. Применим критерий I. Для этого вычислим оценку параметра d, пользуясь формулой (4.1):

$$\tilde{d} = \frac{174\cdot 10^{-4}}{36\cdot 6{,}41\cdot 10^{-4}} = 0{,}754,$$

где $\sum_{1}^{36} |x_i - \bar{x}| = 174\cdot 10^{-4}$

Выбрав уровень значимости $q_1 = 2\%$, из приложения 2 находим $d_{1\%} = 0{,}877$ и $d_{99\%} = 0{,}717$.

Так как $0{,}717 < 0{,}754 < 0{,}877$, то критерий I выполняется.

3. Применим критерий II. Выбрав уровень значимости $q_{11} = 0{,}05$, для числа наблюдений $n = 36$ из приложения 4 находим $d = 0{,}98$. Из приложения 3 находим $z_{\alpha/2} = 2{,}33$.

Тогда $Sz_{\alpha/2} = 6{,}52\cdot 10^{-4}\cdot 2{,}33 = 15{,}3\cdot 10^{-4}$.

Согласно критерию II, не более двух разностей $|x_i - \bar{x}|$ могут превзойти $15{,}3\cdot 10^{-4}$. По данным табл. 4.1 видим, что только для наблюдений $i=6$ и $i=18$ разности $|x_i - \bar{x}|$ превосходят $15{,}3\cdot 10^{-4}$. Следовательно, гипотеза о нормальности согласуется с данными наблюдений.

Уровень значимости составного критерия $q \leqslant 0{,}02 + 0{,}05 = 0{,}07$, т. е. гипотеза о нормальности согласуется с данными наблюдений с вероятностью не менее 0,93.

4.3. Проверка гипотезы о нормальности распределения при $n \geqslant 50$

При числе наблюдений $n \geqslant 50$ для проверки гипотезы о нормальности распределения применяют критерий согласия К. Пирсона. Вычисления целесообразно проводить по следующей схеме.

1. Данные наблюдений группируют по интервалам, вычисляют середины интервалов и соответствующие им эмпирические частоты (согласно п. 3.1).

2. Вычисляют среднее арифметическое значение $\bar{x}$ и оценку СКО S.

3. Для каждого интервала определяют

$$z_i = \frac{x_{i0} - \bar{x}}{S}, \qquad (4.6)$$

где x_{i0} — абсцисса, соответствующая середине i-го интервала.

4. Для вычисленных значений z_i по приложению 5 находят значения плотности вероятности

$$\varphi(z_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z_i^2}{2}\right).$$

5. По теоретической кривой распределения $\varphi(z_i)$ вычисляют теоретическое число наблюдений f_i в каждом интервале:

$$f_i = n\frac{h}{S}\varphi(z_i), \qquad (4.7)$$

где n — общее число данных;

h — длина интервала.

6. Объединяют соседние интервалы, эмпирическое число наблюдений в которых меньше 5.

7. Для каждого интервала после объединения вычисляют χ_i^2:

$$\chi_i^2 = \frac{(\tilde{f}_i - f_i)^2}{f_i}. \qquad (4.8)$$

8. Вычисляют χ^2, просуммировав χ_i^2 по всем L интервалам:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{L} \left[\frac{(\tilde{f}_i - f_i)^2}{f_i}\right], \qquad (4.9)$$

где L — общее число интервалов, оставшееся после объединения интервалов с малыми частотами.

9. Определяют число степеней свободы

$$k = L - r - 1, \qquad (4.10)$$

где r — число оцениваемых по выборке параметров теоретического распределения.

Для нормального распределения по выборке определяют среднее арифметическое $\bar{x}$ и оценку дисперсии S^2, поэтому $r=2$ и

$$k = L - 3. \qquad (4.11)$$

10. Выбрав уровень значимости критерия q, при полученном k, приняв $P(\chi^2 > \chi^2_{н}) = 1 - q/2$ и $P(\chi^2 > \chi^2_{в}) = q/2$, из приложения 6 находят $\chi^2_{н}$ и $\chi^2_{в}$. Принимают, что гипотеза о нормальности подтверждается, если

$$\chi^2_{н} < \chi^2 < \chi^2_{в}.$$

Таблица 4.2

К вычислению χ^2

Номер интервала, i	Середина интервала, x_{io}	Эмпирическое число наблюдений в интервале, $\tilde{f}_i$	$x_{io}-\overline{x}$	$Z_i=\frac{x_{io}-\overline{x}}{S}$	$\varphi(z_i)$	Вероятность $\frac{h}{S}\varphi(z_i)$	Теоретическое число наблюдений в интервале, f_i	χ^2_i
1	−0,14	3 } 11	−0,1116	−2,17	0,038	0,015	3,0 } 9,4	0,27
2	−0,12	8	0916	−1,78	082	032	6,4	
3	−0,10	11	0716	−1,39	174	068	13,6	0,50
4	−0,08	20	0516	−1,00	242	094	18,8	0,03
5	−0,06	27	0316	−0,61	333	130	26,0	0,04
6	−0,04	36	0116	−0,23	388	151	30,2	1,11
7	−0,02	29	+0,0084	0,16	394	154	30,8	0,10
8	00,0	15	0284	0,55	343	134	26,8	2,89
9	0,02	17	0484	0,94	256	099	19,8	0,40
10	0,04	17	0684	1,33	165	064	12,8	1,38
11	0,06	8	0884	1,72	091	035	7,0	0,14
12	0,08	4	1084	2,10	044	017	3,4	
13	0,10	1 } 6	1284	2,49	018	007	1,4 } 5,2	0,12
14	0,12	1	1484	2,88	006	002	0,4	
Сумма		200	~0				200,1	7,03

4.4. Пример применения критерия К. Пирсона для проверки гипотезы о нормальности распределения

Положим, что в результате измерений получено 200 отклонений размера детали от номинального значения. Разобьем их на 14 интервалов. Вычисления дали среднее отклонение от номинального значения $\bar{x} = -0{,}0284$ и оценку СКО $S = 0{,}0515$.

Результаты последующей обработки данных наблюдений, выполненной по приведенному выше плану, сведены в табл. 4.2. В итоге получаем $\chi^2 = 7{,}03$.

Число степеней свободы k вычислим по формуле (4.1), приняв $L=11$, так как вся совокупность была разбита на 14 интервалов, но первый со вторым и три последних объединены ввиду того, что в каждый из них попало меньше 5 наблюдений,

$$k = 11 - 3 = 8.$$

Выберем вероятность выхода за каждую границу $q/2 = 0{,}05$ Тогда вероятность $P(\chi^2 > \chi^2_{н}) = 1 - q/2 = 0{,}95$ и вероятность $P(\chi^2 > \chi^2_{в}) = q/2 = 0{,}05$. Из приложения 6 при вероятностях 0,95 и 0,05 и $k=8$ находим соответственно нижнее $\chi^2_{н} = 2{,}73$ и верхнее $\chi^2_{в} = 15{,}5$ граничные значения. Так как $2{,}73 < 7{,}03 < 15{,}5$, то гипотеза о нормальности распределения принимается.

4.5. Доверительный интервал для истинного значения измеряемой величины

При нормальном распределении наблюдений истинное значение измеряемой величины A с доверительной вероятностью α находится внутри интервала

$$[\bar{x} - t_q S_{\bar{x}} ;\ \bar{x} + t_q S_{\bar{x}}], \qquad (4.12)$$

где t_q — q-процентная точка распределения Стьюдента.

Коэффициент t_q зависит от числа наблюдений n и выбранной доверительной вероятности α. Его определяют с помощью таблицы q-процентных точек распределения Стьюдента, приведенной в приложении 7. Таблица имеет два входа: $k = n - 1$ и $q = 1 - \alpha$.

При $n > 30$ следует использовать последнюю строку таблицы (для $n = \infty$) или таблицу функции Лапласа из приложения 3.

Пример. В п. 2.6. по десяти наблюдениям были вычислены значение массы эталона килограмма $Cr\frac{ЭЯ1Т}{1\ кг}$, равное $\bar{x} = 999{,}998721$ г, и оценки $S = 17 \cdot 10^{-6}$ г и $S_{\bar{x}} = 5 \cdot 10^{-6}$ г.

Найдем доверительный интервал при выбранной нами доверительной вероятности $\alpha=0{,}975$ и $n=10$. Число степеней свободы $k=10-1=9$; $q\%=(1-0{,}975)\cdot100=2{,}5\%$.

Из приложения 7 для указанных k и q находим $t_q=2{,}685\approx2{,}68$. Следовательно, $t_q\, S_{\bar{x}}=2{,}68\cdot5\cdot10^{-6}\approx13\cdot10^{-6}$ г.

Истинное значение измеряемой величины с вероятностью 0,975 накрывается интервалом

[999,998708 г; 999,998734 г] .

Если метод измерений предварительно изучен и известно его СКО σ, то доверительный интервал для истинного значения измеряемой величины A при доверительной вероятности α равен

$$\left[\bar{x}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\ \bar{x}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right], \qquad (4.13)$$

где $z_{\alpha/2}$—аргумент функции Лапласа, который находят по приложению 4 для вероятности α.

4.6. Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения

Доверительный интервал для σ при $n\leqslant30$ имеет границы

$$l_1=\frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\chi_{н}}\ ;\qquad l_2=\frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\chi_{в}}\ . \qquad (4.14)$$

Значения $\chi^2_{в}$ и $\chi^2_{н}$ находят по таблицам q-процентных точек, приведенным в приложении 6.

Таблицы имеют два входа: число степеней свободы $k=n-1$ и значения вероятности $P(\chi^2>\chi^2_{\alpha})$. Значение $\chi^2_{в}$ находят из таблиц при $P_1=\frac{1+\alpha}{2}$, а значение $\chi^2_{н}$—при $P_2=\frac{1-\alpha}{2}$, где α — выбранная доверительная вероятность.

При $n>30$ доверительные границы l_1 и l_2 для СКО вычисляют по формулам

$$l_1=S-z_{\alpha/2}\,\tilde{\sigma}(S)\ ;\ \ l_2=S+z_{\alpha/2}\,\tilde{\sigma}(S), \qquad (4.15)$$

где параметр $z_{\alpha/2}$ находят по приложению 3, как аргумент функции Лапласа при вероятности $\alpha/2$.

Продолжим использованный в п. 4.5 пример. Найдем доверительный интервал для σ при $n=10$. Задаваясь $\alpha=0{,}9$, получим $P_1=0{,}95$ и $P_2=0{,}05$. По приложению 6 при $k=9$ и $P_1=0{,}95$ имеем $\chi^2_{в}=3{,}32$; при $P_2=0{,}05$ получим $\chi^2_{н}=16{,}9$. Доверительный интервал для σ будет

[$12{,}4\cdot10^{-6}$ г; $28\cdot10^{-6}$ г].

4. 7. Толерантный интервал

Толерантный интервал вычисляют в тех случаях, когда по данным выполненных наблюдений нужно оценить интервал возможного их рассеивания при дальнейших наблюдениях тем же методом и в тех же условиях.

Нижнюю l_1 и верхнюю l_2 толерантные границы вычисляют по формулам

$$l_1=\bar{x}-KS;\ l_2=\bar{x}+KS, \tag{4.16}$$

где K — толерантный множитель.

Для определения толерантных границ l_1 и l_2 следует сначала вычислить $\bar{x}$ и S. Затем одним из изложенных ниже методов найти такое K, чтобы с доверительной вероятностью α, близкой к единице, интервал $[x-KS;\ \bar{x}+KS]$ содержал заданную долю P_0 генеральной совокупности.

Толерантный множитель K для фиксированных значений $\alpha=0{,}90$; $0{,}95$; $0{,}99$ и $P_0=0{,}90$; $0{,}95$; $0{,}997$ можно найти из приложения 8. В общем случае его можно вычислить по формуле

$$K = Z_\infty\left(1+\frac{Z_\alpha}{\sqrt{2n}}+\frac{5\ Z_\alpha^2+10}{12\ n}\right), \tag{4.16}$$

где n — число наблюдений;

Z_∞ — абсцисса нормированной функции Лапласа $\Phi_0(z)$, приведенной в приложении 3, определяемая из условия

$$P_0 = 2\ \Phi_0\ (z_\infty)\ ;$$

Z_α — абсцисса нормированной функции Лапласа $\Phi_0(z)$, определяемая из условия

$$\Phi_0\ (z_\alpha) = \alpha - 0{,}5.$$

Пример. Для данных наблюдений табл. 3.1 имеем $\bar{x}=0{,}073$ мВ, $S=3{,}2\cdot10^{-2}$ мВ, $n=150$, $k=n-1=149$, где k—число степеней свободы.

Определим толерантный интервал, в котором с вероятностью $\alpha=0{,}9$ заключена доля генеральной совокупности $P_0=0{,}997$.

По приложению 8 находим, что для $\alpha=0{,}9$, $P_0=0{,}997$ и $k=149$ толерантный множитель $K=3{,}4$.

Отсюда границы толерантного интервала для заданной доли генеральной совокупности равны:

$l_1=0{,}073-3{,}4\cdot3{,}2\cdot10^{-2}\approx-0{,}04$ мВ,

$l_2=0{,}073+3{,}4\cdot3{,}2\cdot10^{-2}\approx0{,}18$ мВ.

Следовательно, с доверительной вероятностью 0,9 из всех будущих наблюдений 99,7% будут находиться в интервале [—0,04 мВ; 0,18 мВ].

Литература: [1, 5, 7].

5. ПРОВЕРКА ОДНОРОДНОСТИ ГРУПП НАБЛЮДЕНИЙ

5.1. Общие положения

Наряду с рассмотренным в разделах 2, 3 и 4 простейшим случаем, когда измерение состояло из одной группы наблюдений, в метрологической практике часто встречаются измерения, которые выполняют в несколько этапов, проводимых в разное время и в разных условиях. За счет изменения условий измерения числовые характеристики групп могут отличаться друг от друга. Если оценки средних арифметических и дисперсий, вычисленные для отдельных групп наблюдений, не имеют значимых смещений относительно друг друга, то такие группы наблюдений называют однородными.

Измерения, при которых получают однородные группы наблюдений, называют статистически подконтрольными. Однородные группы наблюдений можно рассматривать как единую совокупность эмпирических данных, и ее числовые характеристики могут быть вычислены на основе всей суммы наблюдений $N=\sum_{i=1}^{L} n_i$, где n_i—число наблюдений в i-й группе, L—число групп.

Если группы наблюдений неоднородны, то их обработка усложняется. Она может быть выполнена методами, изложенными в разделах 6 и 7.

Проверка однородности приводимыми в пп. 5.2—5.5 методами возможна только в случае нормального распределения генеральной совокупности. Поэтому предварительно следует убедиться в том, что обрабатываемые группы наблюдений являются выборками из нормально распределенных совокупностей. После этого проверяют однородность оценок дисперсий, а затем — средних арифметических.

5.2. Проверка допустимости различия между оценками дисперсий двух групп наблюдений

Для проверки допустимости различия несмещенных оценок дисперсий двух групп наблюдений с числом данных n_1 и n_2, результаты которых распределены нормально, используют F-распределение Р. Фишера.

Различие оценок дисперсий считается допустимым, если выполняется условие, что отношение бо́льшей из них к меньшей с выбранной вероятностью $(1-q)$ находится между верхним $F_в$ и нижним $F_н$ предельными значениями:

$$P\left\{ F_н < \frac{S_1^2}{S_2^2} < F_в \right\} = 1 - q\,, \qquad (5.1)$$

Число степеней свободы для S_1 равно $k_1 = n_1 - 1$, для S_2 оно равно $k_2 = n_2 - 1$, причем S_1^2, S_2^2 — соответственно бо́льшая и меньшая из двух оценок дисперсии. Верхние предельные значения $F_в$ в зависимости от числа степеней свободы k_1 и k_2 для $q/2 = 0{,}01$ и $0{,}05$ находят по таблицам приложения 9. Для других уровней значимости критические точки можно найти в таблицах, приведенных в работе [3].

Нижние предельные значения $F_н$ вычисляют по формуле

$$F_н = F_в^{-1}\,. \qquad (5.2)$$

5.3. Проверка допустимости рассеивания оценок дисперсий нескольких групп наблюдений

Допустимость рассеивания оценок дисперсий групп проверяют при помощи критерия М. Бартлетта, если число групп $L \geqslant 3$ и число наблюдений в каждой группе $n_l \geqslant 3$.

Для проведения указанной проверки сначала вычисляют несмещенные оценки дисперсий групп S_1^2; S_2^2; . . . ; S_l^2; . . ; S_L^2, и среднее значение оценок дисперсии

$$S^2_{c} = \frac{1}{N-L} \sum_{l=1}^{L} S_l^2 (n_l - 1), \qquad (5.3)$$

где

$$N = \sum_{l=1}^{L} n_l\,.$$

Затем находят значение χ^2 по формуле

$$\chi^2 = \frac{2{,}303}{C}\left[(N-L)\lg S^2_{ср} - \sum_{l=1}^{L}(n_l - 1)\lg S^2_l\right], \qquad (5.4)$$

где

$$C = 1 + \frac{1}{3(L-1)}\left(\sum_{l=1}^{L}\frac{1}{n_l - 1} - \frac{1}{N-L}\right). \qquad (5.5)$$

Далее, задаваясь некоторой доверительной вероятностью, например, $\alpha = 0{,}95$, определяют верхний предел $\chi^2_{макс}$ по распределению χ^2 с $(L-1)$ степенями свободы при $P(\chi^2 \geqslant \chi^2_q) = 1-\alpha$

(см. приложение 6). Если выполняется неравенство $\chi^2 \leqslant \chi^2_{\text{макс}}$, то различия между оценками дисперсий групп допустимы. Если во всех группах $n_i \geqslant 30$, то можно считать $C=1$.

5.4. Проверка допустимости разлия между средними арифметическими двух групп наблюдений

Если две группы наблюдений состоят из данных, имеющих нормальное распределение, то в зависимости от числа наблюдений в группах применяют следующие способы проверки допустимости различия между их средними арифметическими:

1) Группы наблюдений содержат большое число данных ($n_i > 30$). При этом $S^2 = \sigma^2$.

Для решения задачи сначала вычисляют СКО для разности средних арифметических значений обеих групп:

$$\sigma(\bar{y}-\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sigma^2(x)}{n_x} + \frac{\sigma^2(y)}{n_y}}, \tag{5.6}$$

где $\bar{x}$, $\bar{y}$ — средние значения для групп x_i и y_i соответственно:

$$\bar{x} = \frac{1}{n_x}\sum_{i=1}^{n_x} x_i\ ; \quad \bar{y} = \frac{1}{n_y}\sum_{i=1}^{n_y} y_i\ . \tag{5.7}$$

Затем, выбрав определенный уровень значимости q, вычисляют $\alpha = 1 - q$. Далее по приложению 3 находят $\Phi_0(z) = \alpha/_2$ и по нему — значение аргумента $z_{\alpha/_2}$. Различие между средними значениями двух групп наблюдений считается допустимым, если $|\bar{x}-\bar{y}| \leqslant z_{\alpha/_2} \cdot \sigma(\bar{y}-\bar{x})$.

2) Число наблюдений в какой-либо из групп или в обеих группах мало ($n_i \leqslant 30$).

В этом случае задача может быть решена только в предположении, что обе группы имеют одинаковые дисперсии

$$\sigma^2(x) = \sigma^2(y).$$

Для решения задачи вычисляют значение параметра

$$t = \frac{|\bar{y}-\bar{x}|}{\sqrt{n_x S^2_x - n_y S^2_y}} \sqrt{\frac{n_x n_y (n_x + n_y - 2)}{n_x + n_y}}. \tag{5.8}$$

Далее, задаваясь уровнем значимости q, по таблице значений q-процентных точек для распределения Стьюдента при числе степеней свободы $k = n_x + n_y - 2$ находят предельное значение $t_{q,k}$ (приложение 7). Различие между средними значениями двух малых групп наблюдений считается допустимым, если $t \leqslant t_{q,k}$.

5. 5. Проверка допустимости рассеивания средних арифметических по методу Р. Фишера

При проверке допустимости рассеивания средних арифметических групп наблюдений пользуются критерием Фишера лишь в тех случаях, если априори известно, что дисперсии всех групп равны или последнее подтверждено проверкой по п. 5. 3.

Сущность метода Фишера состоит в следующем. Находят оценку межгрупповой дисперсии $S^2{}_{\Sigma L}$:

$$S^2{}_{\Sigma L} = \frac{1}{L-1} \sum_{l=1}^{L} n_l \, (\bar{x}_l - \bar{\bar{x}})^2 \, . \tag{5.9}$$

Число степеней свободы здесь равно $k_1 = L - 1$.

Далее находят среднее значение внутригрупповых оценок дисперсии $\bar{S}^2{}_{nL}$:

$$\bar{S}^2{}_{nL} = \frac{1}{N-1} \sum_{l=1}^{L} \sum_{j=1}^{n_l} (x_{lj} - \bar{x}_l)^2 \, . \tag{5.10}$$

Число степеней свободы здесь равно $k_2 = N - L$.

В формулах (5. 9) и (5. 10) принято

$$\bar{x}_l = \frac{1}{n_l} \sum_{j=1}^{n_l} x_{lj} \, ; \tag{5.11}$$

$$N = \sum_{l=1}^{L} n_l \, ;$$

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{L} \sum_{j=1}^{n_l} x_{lj} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{L} n_l \, \bar{x}_l \, . \tag{5.12}$$

Обе оценки дисперсий распределены по закону χ^2 с числом степеней свободы соответственно k_1 и k_2. Их отношение имеет распределение Фишера $F_{k1,\,k2}$ с теми же числами степени свободы k_1, k_2.

Рассеивание средних арифметических считают допустимым, если отношение оценки межгрупповой дисперсии к среднему значению внутригрупповых оценок дисперсий находится в пределах, определяемых по таблицам процентных пределов распределения Р. Фишера ($F_{k1,\,k2}$)

$$P \left\{ F_{\text{н}} \leqslant \frac{S^2{}_{\Sigma L}}{\bar{S}^2{}_{nL}} \leqslant F_{\text{в}} \right\} = 1 - q.$$

Верхние пределы распределения Фишера $F_{\text{в}}$ приведены в приложении 9. Нижние пределы вычисляют по формуле

$$F_н = F_в^{-1}.$$

Если значение F находится вне интервала ($F_н$, $F_в$,) то это означает, что между средними арифметическими групп имеются недопустимые смещения. В этом случае целесообразно выяснить, монотонно или случайно изменяются средние значения групп. Для этого строят графики изменения средних значений групп или используют критерий Э. Аббе (п. 5. 6).

5. 6. Проверка допустимости рассеивания средних арифметических с помощью критерия Э. Аббе

Метод Аббе менее чувствителен к рассеиванию средних, чем метод Фишера, но позволяет отличать монотонные смещения средних от их случайного рассеивания. Этот метод можно использовать при числе групп $L \geqslant 4$ и если дисперсии групп одинаковы. Последнее должно быть предварительно проверено с помощью критерия Бартлетта (п. 5. 3).

Средние арифметические значения групп данных располагают в той последовательности, с которой эти группы были получены:

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_i, \ldots, \bar{x}_L .$$

Затем составляют ряд последовательных разностей этих значений:

$$d_1 = \bar{x}_2 - \bar{x}_1 \ \ldots \quad d_i = \bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i \ \ldots \quad d_{L-1} = \bar{x}_L - \bar{x}_{L-1} .$$

Несмещенная оценка дисперсии ряда средних арифметических, вычисленная с помощью этих разностей, будет равна

$$S^2{}_d = \frac{1}{2(L-1)} \sum_{i=1}^{L-1} d^2{}_i . \qquad (5.13)$$

Обычную же несмещенную оценку этой дисперсии находят по формуле

$$S^2{}_{\bar{x}} = \frac{1}{L-1} \sum_{i=1}^{L} (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2 , \qquad (5.14)$$

где

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{L} n_i \bar{x}_i , \ N = \sum_{i=1}^{L} n_i$$

Затем составляют отношение

$$\nu = \frac{S^2_d}{S^2_{\bar{x}}} . \tag{5.15}$$

Считают, что средние арифметические групп имеют систематическое смещение, если

$$\nu < \nu_{\text{мин}} . \tag{5.16}$$

Значения $\nu_{\text{мин}}$ в зависимости от уровня значимости q (q=0,001; 0,01; 0,05) и числа групп L приведены в приложении 10.

Примечание. Метод Аббе можно применить для обнаружения монотонных смещений между наблюдениями одной группы. Для этого в приведенных выше формулах следует заменить $\bar{x}_i$ на x_i; $\bar{\bar{x}}$ на $\bar{x}$ и L на n.

5. 7. Проверка допустимости рассеивания средних арифметических групп при разных внутригрупповых дисперсиях

Изложенные в пп. 5.4 и 5.5 методы проверки близости средних арифметических основаны на предположении, что все группы данных имеют одну и ту же дисперсию. Если же проверка по п. 5.3 показывает, что дисперсии групп не равны, то для определения возможности принять взвешенное среднее в качестве результата измерения необходимо убедиться, что средние арифметические групп являются оценками одного и того же истинного значения. Для решения этой задачи следует сначала преобразовать данные наблюдений так, чтобы дисперсии преобразованных групп были равны. Последующую проверку производят согласно указаниям п. 5. 5.

Пусть имеется несколько групп данных

$$\left.\begin{matrix} x_{11};\ x_{12};\ \ldots;\ x_{1j};\ \ldots;\ x_{1n} \\ x_{i1};\ x_{i2};\ \ldots;\ x_{ij};\ \ldots;\ x_{im} \\ x_{k1};\ x_{k2};\ \ldots;\ x_{kj};\ \ldots;\ x_{kl} \end{matrix}\right\} \tag{5.17}$$

со средними арифметическими групп $\bar{x}_1; \ldots; \bar{x}_i; \ldots; \bar{x}_k$ и оценками средних квадратических отклонений $S_1; \ldots; S_i; \ldots; S_k$.

Функция преобразования данных наблюдений будет

$$\varphi(x) = C \int \frac{dx}{f(x)} , \tag{5.18}$$

где C — произвольно выбранное постоянное значение среднего квадратического отклонения, общее для всех групп данных;

$f(\overline{x})$ — функция, определяющая зависимость внутригруппового среднего квадратического отклонения $\varphi_i(x)$ от средних арифметических групп $\overline{x}_i$.

Аналитическую форму функции $f(\overline{x})$ находят путем построения по точкам зависимости $S_i(\overline{x}_i)$ и подбором аппроксимирующей функции. Найдя функцию $\varphi(x)$, следует вычислить ее значения при всех x_{ij}. Тогда вместо групп данных (5.17) получим:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x_{11});\ \varphi(x_{12});\ \ldots;\ \varphi(x_{1j});\ \ldots;\ \varphi(x_{1n})\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varphi(x_{i1});\ \varphi(x_{i2});\ \ldots;\ \varphi(x_{ij});\ \ldots;\ \varphi(x_{im})\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varphi(x_{k1});\ \varphi(x_{k2});\ \ldots;\ \varphi(x_{kj});\ \ldots;\ \varphi(x_{kl})\end{array}\right\} \qquad (5.19)$$

Для этих данных следует вычислить средние по группам

$$\overline{\varphi}(x_i) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\varphi(x_{ij})$$

и общее среднее

$$\overline{\overline{\varphi}}(x) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\overline{\varphi}(x_i)\ .$$

Эти преобразованные средние следует подставить в формулу (5.9): соответственно $\overline{\varphi}(x_i)$ вместо $\overline{x}_i$ и $\overline{\overline{\varphi}}(x)$ вместо $\overline{\overline{x}}$, и вычислить оценку межгрупповой дисперсии $S^2_{\Sigma L}$. Все внутригрупповые дисперсии постоянны и равны $S^2_{nL} = C^2$.

Далее, следуя п. 5. 5 проверяют с выбранной доверительной вероятностью $(1-q)$ выполнение неравенства

$$F_{н} \leqslant \frac{S^2_{\Sigma L}}{C^2} \leqslant F_{в}, \qquad (5.20)$$

где $F_{в}$ и $F_{н}$ — соответственно верхний и нижний пределы распределения Фишера (подробнее см. п. 5).

Выполнение неравенства (5.20) свидетельствует о том, что рассеивание средних арифметических групп $\overline{x}_1;\ \overline{x}_2;\ \ldots;\ \overline{x}_i;\ \ldots;\ \overline{x}_k$ является допустимым для объединения этих групп в соответствии с п. 6. 5.

5.8. Исключение грубых погрешностей

Причинами промахов являются: неправильный отсчет показания по шкале измерительного прибора, неправильная запись отдельного результата, неправильное использование прибора или неисправность его при одном из наблюдений, кратковременное резкое изменение условий наблюдений и т. п.

Если стало известно, что некоторые резко выделяющиеся наблюдения являются результатом промахов, то их следует исключить, не прибегая к статистическому анализу.

Если же причины появления резко выделяющихся наблюдений установить нельзя, то для решения вопроса о возможности их исключения используют статистические методы.

Статистический критерий обнаружения резко выделяющихся наблюдений основан на предположении о том, что выборка взята из генеральной совокупности, распределенной нормально. Последнее позволяет использовать распределение наибольшего по абсолютному значению нормированного отклонения

$$t_{т} = \frac{\text{макс}\,|x_i - \bar{x}|}{S}, \tag{5.21}$$

где $t_{т}$ — теоретическое значение параметра.

Для того, чтобы в группе из n наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ отбросить наблюдение $x_{макс}$, надо выполнить следующие операции:

1. Вычислить дробь

$$t_{макс} = \frac{|x_{макс} - \bar{x}|}{S},$$

где $\bar{x}$ — среднее арифметическое группы данных;

S — оценка СКО группы.

2. Найти теоретическое значение $t_{т}$. При $n \leq 50$ значения $t_{т}$ в зависимости от n и выбираемого уровня значимости q приведены в приложении 11.

При $n > 50$

$$t_{т} = z_{\alpha/2}\sqrt{1 - 1/n}, \tag{5.22}$$

где $z_{\alpha/2}$ — аргумент кривой нормального распределения, значение которого находят из приложения 4 для вероятности

$$\frac{\alpha}{2} = 0{,}5 - \frac{q}{2n}.$$

3. Сравнить вычисленное по п. 1 значение $t_{макс}$ с $t_{т}$.

Если $t_{макс} > t_{т}$, то наблюдение $x_{макс}$ следует отбросить как промах.

Если после исключения одного резко выделяющегося наблюдения вызывает подозрение какое-либо другое наблюдение, то указанный порядок действий можно повторить, но уже для сокращенной группы наблюдений.

Пример. Получены следующие данные наблюдений при измерении силы тока (в миллиамперах): 10, 07; 10,10; 10,15; 10,16; 10,17; 10,20; 10,40; 10,13; 10,12; 10,08.

Проверим, не является ли седьмое наблюдение (10,40 мА) промахом:

$$\bar{x} = \frac{101,58}{10} = 10,16 \text{ мА} \quad ;$$

$$S^2 = 0,0089; \quad S = 0,094 \text{ мА};$$

$$t_{\text{макс}} = \frac{10,40-10,16}{0,094} = 2,55.$$

Примем $\alpha = 0,90$, тогда $q = 10\%$. По приложению 11 находим, что для $n = 10$ и $q = 10\%$ значение $t_т = 2,29$. Так как $t_{\text{макс}} > t_т$, то это наблюдение следует отбросить.

Литература: [3, 7 и 8].

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПО ДАННЫМ НЕСКОЛЬКИХ ГРУПП

6.1. Общие положения

При наличии нескольких групп наблюдений можно с большей точностью вычислить результат измерения, если объединить все группы наблюдений в одну совокупность. При объединении нескольких групп наблюдений следует различать группы равнорассеянных и группы неравнорассеянных наблюдений. Группы наблюдений будем называть равнорассеянными, если их дисперсии равны и, соответственно, неравнорассеянными, если дисперсии различны. Отличить равнорассеянные группы от неравнорассеянных можно методами, изложенными в пп. 5.2 и 5.3.

Перед объединением нескольких групп наблюдений необходимо также проверить допустимость различия между средними арифметическими групп. Методика такой проверки приведена в пп. 5.4 и 5.5. Если различие между средними арифметическими допустимо и группы наблюдений равнорассеяны, то совокупное среднее и оценку его дисперсии вычисляют согласно п. 6.2. Если группы наблюдений неравнорассеяны, то те же характеристики вычисляют согласно п. 6.4. Случаи, когда различия между средними арифметическими групп недопустимо велики, требуют дополнительного исследования для выяснения характера этих различий. Статистические методы такого исследования для частного случая равнорассеянных наблюдений приведены в п. 6.3.

6.2. Равнорассеянные группы наблюдений при незначительном различии средних арифметических

Сначала проводится проверка однородности групп. Если условия однородности по пп. 5.2 и 5.4 для двух групп или по пп. 5.3 и 5.5 для нескольких групп выполняются, то совокупное среднее арифметическое вычисляют по формуле

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{L} n_i \bar{x}_i}{\sum\limits_{i=1}^{L} n_i}, \qquad (6.1)$$

где $\bar{x}_i$ — среднее арифметическое значение i-й группы;

L — число групп;

n_i — число наблюдений в i-й группе.

Оценку дисперсии совокупного среднего арифметического вычисляют по формуле

$$S^2_{\bar{\bar{x}}} = \frac{1}{N(N-1)}\left[\sum_{i=1}^{L}(n_i-1)S_i^2 + \sum_{i=1}^{L} n_i(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2\right], \qquad (6.2)$$

где

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i-1}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2;$$

$$N = \sum_{i=1}^{L} n_i.$$

Если, кроме того, группы содержат равное число наблюдений, то совокупное среднее арифметическое и его дисперсию можно найти по более простым формулам:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{L}\bar{x}_i}{L}; \qquad (6.3)$$

$$S^2_{\bar{\bar{x}}} = \frac{(n-1)\sum\limits_{i=1}^{L} S^2_i}{N(N-1)} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{L}(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2}{L(N-1)}. \qquad (6.4)$$

Приближенно, при $n \gg 1$,

$$S^2_{\bar{\bar{x}}} = \frac{1}{NL} \sum_{l=1}^{L} [S^2_l + (\bar{x}_l - \bar{\bar{x}})^2] . \qquad (6.5)$$

6. 3. Равнорассеянные группы наблюдений при большом различии средних арифметических

Если условия выполнения наблюдений меняются от группы к группе, то это может вызвать значительное рассеивание средних арифметических групп. Различия между средними арифметическими анализируют при помощи методов Р. Фишера и Э. Аббе.

Метод Фишера позволяет ответить на вопрос, оправдано ли рассеивание средних арифметических групп рассеиванием наблюдений внутри групп. Если окажется, что рассеивание средних арифметических слишком велико, то нужно исследовать характер изменения средних арифметических при помощи критерия Аббе (см. п. 5.6). Последний позволяет отличить монотонное смещение средних арифметических групп от их случайных колебаний. Если обнаружено монотонное смещение средних арифметических, то для выяснения формы зависимости используют методы регрессионного анализа (см. п. 7.5). После этого следует попытаться исключить систематические погрешности и затем можно вернуться к вопросу об объединении групп.

В том случае, когда рассеивание средних арифметических, хотя и значимо, но носит случайный характер, в качестве оценки истинного значения измеряемой величины принимают совокупное среднее, вычисляемое по формуле (6.1). Желательно, чтобы все группы имели примерно равное число наблюдений. Оценку дисперсии совокупного среднего находят по формуле (6.2).

Дальнейший анализ рассеивания наблюдений проводят для определения оценки дисперсии дополнительной составляющей $S_0^2\,(\bar{x}_l)$ случайного рассеивания средних арифметических групп. Это необходимо, чтобы обнаружить источник дополнительного рассеивания и ослабить его действие.

С этой целью оценку дисперсии средних арифметических групп $S_0^2(\bar{x}_l)$ представляют состоящей из двух составляющих

$$S_0^2\,(\bar{x}_l) = \bar{S}_1^2\,(\bar{x}_l) + S_2^2\,(\bar{x}_l) \ ,$$

где $\bar{S}_1^2(\bar{x}_l)$ — среднее значение оценки дисперсии среднего арифметического групп за счет рассеивания наблюдений внутри групп.

Вычисление $S_0^2(\bar{x}_i)$ выполняется по формуле

$$S_0^2(\bar{x}_i) = \frac{S^2_{\Sigma L}}{\bar{n}}, \qquad (6.6)$$

где $S^2_{\Sigma L}$ определяется формулой (5.9); $\bar{n}$ — среднее число наблюдений в группе:

$$\bar{n} = \frac{1}{L-1}\left(N - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{L} n_i^2\right).$$

Значение $\bar{S}_1^2(\bar{x}_i)$ вычисляют по формуле

$$\bar{S}_1^2(\bar{x}_i) = \frac{S^2_{nL}}{\bar{n}}, \qquad (6.7.)$$

где S^2_{nL} определяется формулой (5.10).

Затем находят дополнительную составляющую оценки дисперсии

$$S_2^2(\bar{x}_i) = S_0^2(\bar{x}_i) - \bar{S}_1^2(\bar{x}_i). \qquad (6.8)$$

6.4. Неравнорассеянные группы наблюдений при незначительном различии средних арифметических

В качестве оценки истинного значения измеряемой величины принимают среднее взвешенное:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{L} g_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{L} g_i}, \qquad (6.9)$$

где g_i — вес среднего арифметического i-й группы.

Веса средних арифметических вычисляют по формуле

$$g_i = \frac{1}{\sigma^2(\bar{x}_i)} \qquad (6.10)$$

или, если известны не дисперсии $\sigma^2(\bar{x}_i)$ средних арифметических групп, а отношения дисперсий, то веса вычисляют из соотношения

$$g_1 : g_2 : \ldots : g_L = \frac{1}{\sigma^2(\bar{x}_1)} : \frac{1}{\sigma^2(\bar{x}_2)} : \ldots : \frac{1}{\sigma^2(\bar{x}_L)}. \qquad (6.11)$$

Для удобства вычислений найденные веса допускается умножать или делить на одно и то же число.

Оценку дисперсии совокупного среднего (среднего взвешенного) вычисляют по формуле

$$S^2(\bar{\bar{x}}) = \frac{1}{(N-1)\sum_{i=1}^{L} g_i}\left[\sum_{i=1}^{L} g_i \frac{n_i - 1}{n_i} S_i^2 + \sum_{i=1}^{L} g_i (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2\right]. \qquad (6.12)$$

Если веса находят по оценкам, а не по самим дисперсиям, то вычисленное по формуле (6. 9) среднее взвешенное приобретает несколько условный характер. Оценку дисперсии совокупного среднего в этом случае целесообразно вычислять по формуле

$$S^2_{\overline{\overline{x}}} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{L} \frac{1}{S^2_{\overline{x}}}}.$$

6. 5. Пример совместной обработки нескольких групп наблюдений

При определении приведенной площади поршня грузопоршневого барометра путем его сличения с эталонным ртутным барометром было произведено 50 наблюдений, представленных 10 группами данных по 5 в каждой. Полученные данные приведены в столбцах 2—6 табл. 6.1*.

Требуется найти приведенную площадь поршня и оценку среднего квадратического отклонения полученного значения.

В столбце 7 таблицы приведены средние арифметические значения отдельных групп $\overline{x}$. Совокупное среднее значение данных групп $\overline{\overline{x}}$, которое принимается в качестве значения приведенной площади поршня, вычислено по формуле (6. 3). Чтобы убедиться в том, что $\overline{\overline{x}}$ является оценкой истинного значения приведенной площади поршня, проверим статистическую подконтрольность полученных данных.

Для этого сначала проверим, являются ли оценки дисперсий групп оценками одной и той же дисперсии. Применим для этого критерий М. Бартлетта (см. п. 5. 3).

В столбце 8 приведены значения: $\sum\limits_{j=1}^{5} (x_{ij} - \overline{x}_i)^2 \cdot 10^{12}$,

в столбце 9 — значения $S^2_i \cdot 10^{12}$. Среднее значение оценок дисперсии находим по формуле (5. 3), которая при равном числе данных в группе упрощается: $S^2_{\text{ср}} = \sum\limits_{i=1}^{L} S_i^2 / L$.

Значение $S^2_{\text{ср}}$ приведено в нижней строке столбца 9. Значение постоянной C вычисляем по формуле (5. 5):

$$C = 1 + \frac{1}{3\,(10-1)}\left(\frac{10}{5-1} - \frac{1}{50-10}\right) \approx 1{,}094.$$

---

* Материал для примера предоставил Е. Ф. Долинский.

Таблица 6.1

Результаты наблюдений, полученные при измерении приведенной площади поршня грузопоршневого барометра, и вспомогательные вычисления

Номера групп	Измеренные значения площади поршня, см²					$\bar{x}_i$	$\sum_{j=1}^{5}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2\times10^{12}$	$S_i^2\cdot10^{12}$	$\lg S_i^2$	$(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})\cdot10^6$	$(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2\cdot10^{12}$	$(\bar{x}_{i+1}-\bar{x}_i)\times10^6$	$(\bar{x}_{i+1}-\bar{x}_i)^2\cdot10^{12}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1,001288	...240	...294	...292	...248	1,001272	2 740	685	$\overline{10},8357$	+27	729	−42	1 764
2	245	206	201	263	236	230	2 767	692	8401	−15	225	+ 6	36
3	217	211	264	221	267	236	2 956	739	8686	− 9	81	—	—
4	230	275	292	238	248	257	2 720	680	8325	+12	144	+21	441
5	258	209	256	259	215	239	2 526	632	8000	− 6	36	−18	324
6	214	253	250	191	211	224	2 875	719	8567	−21	441	−15	225
7	225	235	189	233	192	215	2 029	507	7050	−30	900	− 9	81
8	241	271	270	283	218	247	2 178	544	7360	+ 2	4	+32	1 024
9	255	296	301	245	249	269	2 925	731	8639	+24	576	+22	484
10	286	244	232	246	289	259	2 752	688	8376	+14	196	−10	100
Сумма по строкам							26 468				3 332		4 479
Совокупное среднее						1,001245		661,7	$\overline{10},8176$				

Далее по формуле (5.4) вычисляем значение χ^2. Значения десятичных логарифмов $\lg S^2{}_i$, необходимые для этого, приведены в столбце 10. Вычисляем члены формулы (5.4):

$$(N-L)\lg S^2{}_{\text{ср}} = (50-10)\cdot\overline{10},8209 = 32,836-400,$$

$$\sum_1^{10}(n_i-1)\lg S^2{}_i = 10\ (5-1)\cdot\overline{10},8176 = 32,704-400.$$

Постоянная C была вычислена раньше:

$$C = 1,094.$$

Теперь находим

$$\chi^2 = \frac{2,303}{1,094}\ (32,836-32,704) \approx 0,28\ .$$

По приложению 6 при доверительной вероятности $\alpha=0,95$ и, следовательно, при $P(\chi^2\geqslant\chi^2)=1-\alpha$ и числе степеней свободы $k=10-1=9$ находим $\chi^2{}_{\text{макс}}=16,9$. Так как, $\chi^2\ll\chi^2{}_{\text{макс}}$, то следует считать, что все оценки дисперсий групп являются оценками одной и той же дисперсии.

Теперь проверим однородность ряда средних. Для этого воспользуемся методом Фишера.

В столбце 11 таблицы приведены отклонения средних арифметических групп от совокупного среднего $(\overline{x}_i-\overline{\overline{x}})\cdot 10^6$, а в столбце 12 — квадраты этих отклонений.

Воспользовавшись формулой (5.10), найдем $S^2{}_{nL}$. Необходимые данные берем из столбца 8:

$$S^2{}_{nL} = \frac{26\,468\cdot 10^{-12}}{50-10} = 662\cdot 10^{-12}\ \text{см}^4.$$

По формуле (5. 9) найдем $S^2{}_{\Sigma L}$. Данные для этого берем из столбца 12

$$S^2{}_{\Sigma L} = \frac{5\cdot 3332\cdot 10^{-12}}{10-1} = 1851\cdot 10^{-12}\ \text{см}^4.$$

Отношение дисперсий

$$F_{9,40} = \frac{1851}{662} = 2,8\ .$$

Из приложения 9 для уровня значимости $q=5\%$ и $k_1=10-1=9$, $k_2=50-10=40$ находим $F_{\text{в}}=2,12$.

Так как $F_{9,40}=2,8 > F_{\text{в}}=2,12$, то расхождение между средними групп недопустимо велико. Поэтому необходимо продолжить исследование и выяснить, является это расхождение систематическим или случайным. Для этого используем критерий Аббе.

В столбце 13 таблицы приведены значения последовательных разностей средних арифметических групп $d_i=(\bar{x}_{i+1}-\bar{x}_i)$, а в столбце 14 — квадраты этих разностей. Оценку дисперсии по последовательным разностям находим, используя формулу (5.13), данные для которой берем из столбца 14:

$$S^2_d = \frac{4479}{2\cdot 9}\cdot 10^{-12} = 249\cdot 10^{-12} \text{ см}^4.$$

Обычную несмещенную оценку дисперсии средних арифметических вычисляем по формуле (5.14). Данные для подстановки в эту формулу берем из столбца 12:

$$S^2_{\bar{x}} = \frac{3332}{10-1}\cdot 10^{-12} = 370\cdot 10^{-12} \text{ см}^4.$$

Отношение дисперсий ν будет

$$\nu = \frac{249}{370} = 0{,}67\ .$$

Из приложения 10 для уровня значимости $q=0{,}05$ при $n=10$ находим минимально допустимое значение $\nu_{\text{мин}}=0{,}531$. Так как $0{,}531<0{,}67$, то, согласно критерию Аббе, рассеивание групповых средних допустимо. Поэтому это рассеивание следует считать случайным.

Вычисленное по формуле (6. 3) значение приведенной площади поршня $\bar{\bar{x}}=1{,}001245$ *см*². Дисперсию совокупного среднего вычислим по формуле (6. 2), учтя при этом, что число наблюдений в группах одинаково и равно $n=5$.

Находим сумму значений, приведенных в столбце 8 табл. 6. 1

$$\sum_{i=1}^{L}(n_i-1)\ S_i^2 = \sum_{i=1}^{L}\cdot\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2 = 26468\cdot 10^{-12}.$$

Затем находим сумму значений, приведенных в столбце 12 табл. 6. 1

$$\sum_{i=1}^{L} n_i\ (\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2 = 5\cdot 3332\cdot 10^{-12}.$$

Тогда

$$S^2_{\bar{\bar{x}}} = \frac{1}{50\cdot 49}\ (26468\cdot 10^{-12}+5\cdot 3332\cdot 10^{-12})\approx 17{,}6\cdot 10^{-12};$$

$$S_{\bar{\bar{x}}} = 4{,}2\cdot 10^{-6}\ \text{см}^2.$$

Оценим дисперсию дополнительной составляющей случайного рассеивания средних арифметических групп.

По формулам (6. 6) и (5. 9), с учетом данных, приведенных в столбце 12 табл. 6. 1, находим

$$S_0^2(\overline{x}_i) = \frac{5\cdot 3332\cdot 10^{-12}}{9\cdot 5} = 370\cdot 10^{-12}\ \text{см}^4 .$$

По формулам (6.7) и (5.10), с использованием данных, приведенных в столбце 8 табл. 6. 1, находим

$$S_1^2(\overline{x}_i) = \frac{26470\cdot 10^{-12}}{(50-10)\cdot 5} = 132\cdot 10^{-12}\ \text{см}^4.$$

Затем, согласно формуле (6. 8), находим искомую оценку

$$S_2^2(\overline{x}_i) = (370-132)\cdot 10^{-12} \approx 240\cdot 10^{-12}\ \text{см}^4.$$

Литература: [6, 7, 8].

6. 6. Равнорассеянные группы наблюдений при измерении разных значений величин

В случае измерения одним и тем же методом при постоянном СКО разных значений величины для оценки СКО каждой измеряемой величины можно учесть наблюдения при измерениях всех величин и благодаря этому уточнить характеристику рассеивания среднего арифметического.

Оценку дисперсии среднего арифметического каждой из измеряемых величин с учетом всех наблюдений вычисляют по формуле

$$S^2_{\overline{x}_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{L}\sum\limits_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\overline{x}_i)^2}{n_i\,(N-L)}, \qquad (6.13)$$

где n_i — число наблюдений при измерении величины A_i;

L — число измеряемых значений величины;

$$N = \sum_{i=1}^{L} n_i .$$

Оценку истинного значения каждой измеряемой величины A_i вычисляют по формуле (5. 11).

Доверительный интервал для каждого A_i будет

$$[\ \overline{x}_i - t_q\cdot S_{\overline{x}_i};\ \overline{x}_i + t_q\cdot S_{\overline{x}_i}\ ],$$

где t_q — q-процентная точка распределения Стьюдента с $N-L$ степенями свободы.

Пример. При проверке образцового многогранника, номинальные значения углов между гранями которого равны 10°, измеряют углы между первой и второй, первой и третьей, пер-

Таблица 6.2

Результаты наблюдений, полученные при проверке образцового многогранника, и предварительные вычисления

10°			20°			30°		
x_{1j}	$x_{1j}-\bar{x}_1$	$(x_{1j}-\bar{x}_1)^2\times10^4$	x_{2j}	$x_{2j}-\bar{x}_2$	$(x_{2j}-\bar{x}_2)^2\times10^4$	x_{3j}	$x_{3j}-\bar{x}_3$	$(x_{3j}-\bar{x}_3)^2\times10^4$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,01	0,03	9	1,85	0,24	576	0,21	−0,17	289
2,00	0,02	4	1,73	0,10	100	0,31	−0,07	49
1,87	−0,11	121	1,56	−0,07	49	0,49	0,11	121
2,03	0,05	25	1,62	−0,01	1	0,58	0,20	400
2,19	0,21	441	1,96	0,33	1089	0,35	−0,03	9
1,67	−0,31	961	1,32	−0,31	961	0,29	−0,09	81
2,10	0,12	144	1,67	0,04	16	0,23	−0,15	225
1,82	−0,16	256	1,62	−0,01	1	0,38	0	0
1,99	0,01	1	1,45	−0,18	324	0,50	0,12	144
2,04	0,06	36	1,52	−0,11	121	0,50	0,12	144
19,8		1998	16,3		3238	3,8		1462
$\bar{x}_1=1{,}98$			$\bar{x}_2=1{,}63$			$\bar{x}_3=0{,}38$		

вой и четвертой гранями и т. д., т. е. углы, номинальные значения которых равны 10°, 20°, 30° и т. д.

Измерения производят на одной установке и точность их одинакова.

Результаты наблюдений приведены в табл. 6.2. В столбцы 1, 4. 7 занесены отклонения (в секундах) от номинальных значений углов 10°, 20° и 30°, в столбцах 2, 3, 5, 6, 8 и 9 — вычисления вспомогательных величин.

Вычислим оценки истинных значений отклонений измеряемых углов. Согласно формуле (5.11), они будут:

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n_1} x_{1j}}{n_1} = \frac{19,82}{10} = 1,98'' ;$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n_2} x_{2j}}{n_2} = \frac{16,32}{10} = 1,63'' ;$$

$$\bar{x}_3 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n_3} x_{3j}}{n_3} = \frac{3,84}{10} = 0,38'' .$$

Вычислим, пользуясь формулой (6.13), оценки дисперсии средних арифметических этих отклонений. Так как числа наблюдений в группах равны, то

$$S^2_{\bar{x}_1} = S^2_{\bar{x}_2} = S^2_{\bar{x}_3} = \frac{0,1998+0,3238+0,1462}{10 \cdot 27} = \frac{0,6698}{270} \approx 0,0025 .$$

Следовательно,

$$S_{\bar{x}_1} = S_{\bar{x}_2} = S_{\bar{x}_3} = 0,05''.$$

Выберем доверительную вероятность $\alpha = 0,95$. По приложению 7 для $\alpha = 0,95$ и числа степеней свободы $N-L=30-3=27$ находим $t_q = 2,04$. Тогда $t_q \cdot S_{\bar{x}} = 2,04 \cdot 0,05 = 0,10$. Доверительные интервалы для отклонения от номинального значения каждого из углов 10°, 20° и 30° соответственно равны [1,88″; 2,08″]; [1,53″; 1,73″]; [0,28″ и 0,48″].

7. ОБНАРУЖЕНИЕ И ИСКЛЮЧЕНИЕ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

7.1. Классификация систематических погрешностей

Систематические погрешности по причинам возникновения можно разделить на несколько следующих видов:

а) инструментальные погрешности — погрешности средств измерений в условиях, при которых проводят измерения;

б) установочные погрешности — могут возникнуть из-за взаимного влияния используемых средств измерений, из-за неучитываемых колебаний внешних условий, связанных с расположением средств измерений, и т. п.;

в) погрешности метода — возникающие из-за несовершенства метода измерения; из-за ограниченной точности формул, примененных для описания явления, положенного в основу измерения; из-за ограниченной точности значений используемых физических констант и т. п.;

г) личные погрешности — связанные с индивидуальными особенностями наблюдателей;

д) погрешности вычислений — связанные с приближенными вычислениями, интерполяцией и эстраполяцией, выполняемыми в процессе обработки данных наблюдений.

7.2. Методы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Задача освобождения результатов измерений от систематических погрешностей требует глубокого анализа всей совокупности данных наблюдений. Дать исчерпывающие правила исключения систематических погрешностей невозможно, так как слишком разнообразны причины, их вызывающие. Можно только наметить излагаемый ниже план работ по устранению этих погрешностей.

В процессе подготовки к проведению измерений изучают возможные причины возникновения погрешностей и создают условия, устраняющие их, или изучают закономерности их изменений для последующего введения поправок. К подготовительным мероприятиям относятся:

1) предварительная поверка используемых мер и измерительных приборов, градуировка шкал приборов или калибровка набора мер;

2) вычисление или экспериментальные определения методической погрешности для введения поправки;

3) изучение закономерностей изменения измеряемой величины при изменении условий измерений. Вычисление поправок на отклонения условий измерений от расчетных;

4) создание и поддержание необходимой стабильности условий измерений.

При выполнении измерений используют следующие специальные приемы постановки наблюдений, обеспечивающие исключение части систематических погрешностей:

1. Исключение самого источника погрешности. Например, тщательной установкой прибора по уровню исключают погрешность от неуравновешенности его подвижной части.

2. Замещение измеряемой величины равновеликой ей известной величиной. Таким приемом может быть исключена систематическая погрешность компарирующего прибора.

3. Компенсация погрешности по знаку. Например, погрешности от мертвого хода в верньерных механизмах приборов можно исключить, определяя значение измеряемой величины при подходе к определенной точке шкалы слева и справа и вычисляя среднее значение (см. п. 7. 4).

4. Симметричные наблюдения. Их используют для исключения погрешностей, изменяющихся во времени по линейному закону. В этом случае два цикла наблюдений проводят в обратном друг другу порядке, а затем вычисляют среднее (см. п. 7. 4).

5. Наблюдения через период изменения влияющей величины. Они позволяют исключить погрешности, изменяющиеся по периодическому закону.

6. Измерения одной величины несколькими независимыми методами с последующим вычислением среднего взвешенного значения измеряемой величины. Таким образом обычно определяют значения физических констант.

В ряде случаев возможно так построить процесс измерения, чтобы влияние систематических погрешностей можно было снизить при обработке наблюдений. Такими случаями являются:

1. Измерения одной величины несколькими измерительными приборами (при условии, что погрешности этих приборов взаимно не коррелированы) с последующим вычислением среднего арифметического из показаний всех приборов. При этом систематические погрешности совокупности приборов можно рассматривать как случайные величины.

2. Уравновешивание измерений, связанных известным условием (см. п. 7. 3).

Систематические погрешности, изменяющиеся в процессе измерения, могут быть обнаружены при обработке экспериментальных данных статистическими методами. Эти методы следующие:

1. Проверка статистической подконтрольности. Для этого экспериментальные данные должны быть представлены для обработки в виде нескольких групп. Недопустимо большие расхождения между групповыми дисперсиями или групповыми средними, обнаруживаемые с помощью критериев Бартлетта, Фишера, Аббе, указывают на наличие систематических смещений между группами (см. раздел 6).

Для облегчения обнаружения систематических смещений, возникающих с течением времени за счет колебаний условий измерений или из-за замены измерительных приборов, рекомендуется проводить наблюдения малыми группами, по 4—5 наблюдений в каждой группе, увеличивая число групп.

2. Использование регрессионного анализа для выяснения характера зависимости погрешности группового среднего от неслучайного аргумента (см. п. 7.5).

3. Использование корреляционного анализа для обнаружения связи между наблюдениями и значениями измеряемой величины (см. п. 7.6).

Систематические погрешности, не изменяющиеся при проведении измерения, могут быть обнаружены только сравнением результатов измерений, произведенных различными независимыми методами.

Использованные ниже в пп. 7.3 и 7.6 метод наименьших квадратов, регрессионный и корреляционный анализы в рекомендации подробно не излагаются. Для их изучения следует использовать соответствующую литературу [5, 7, 9].

7.3. Уравновешивание результатов прямых измерений нескольких величин, связанных определенным условием

При измерениях нескольких величин, связанных определенным условием, полученные значения могут быть уравновешены с учетом этого условия. Например, по первому закону Кирхгофа сумма сил токов в точке разветвления равна нулю; сумма углов треугольника равна 180° и т. д.

Для вычисления уравновешенных значений измеряемых величин сначала находят значения каждой величины в отдельности (без учета их взаимных связей), а затем—их исправленные значения с учетом взаимных связей между ними. Для этого используют метод наименьших квадратов. Применение этого метода возможно, если число наблюдений N, полученных при измерениях, превосходит число независимых измеряемых величин L за вычетом числа уравнений связи H:

$$N>L-H. \tag{7.1}$$

Пример. Равноточные измерения трех углов A_x, A_y, A_z плоского треугольника, проведенные однократно, дали следующие результаты:

$$x_1 = 54°5' ; \quad y_1 = 50°1' ; \quad z_1 = 76°6'.$$

Кроме того, известно уравнение связи для углов треугольника: $A_x+A_y+A_z=180°$. В рассматриваемом случае N=3, H=1, $L=3$. Следовательно, условие (7. 1) выполняется.

Значения x_1, y_1, z_1 содержат погрешности. Для их уравновешивания по методу наименьших квадратов составляют систему условных уравнений, состоящую из равенств вида:

$$a_i x + b_i y + c_i z = l_i , \tag{7.2}$$

где $l_i = x_1, \ldots ; \; y_1, \ldots ; \; z_1, \ldots ;$

x, y, z — оценки A_x, A_y, A_z.

Из-за наличия в значениях l_i погрешностей система оказывается несовместной. Это означает, что не существует таких значений $x, y, z, \ldots$, которые одновременно удовлетворяли бы всем уравнениям системы.

В приводимом примере число независимых неизвестных два, а число уравнений — три. Если подставить найденные по первым двум уравнениям значения x_1 и y_1 в третье, то последнее не обратится в нуль:

$$a_3x_1+b_3y_1-l_3=\beta_3\neq0.$$

Так можно поступить с любой парой из трех уравнений.

Разности β_i называют невязками. Решая систему условных уравнений методом наименьших квадратов, добиваются, чтобы сумма квадратов невязок была минимальной. Как показано выше, в приведенном примере из трех неизвестных независимы два, поэтому одно из них может быть выражено через два других. Например: $z=180-(x+y)$.

Составим систему условных уравнений типа (7.2) для нашего примера, учитывая уравнение связи:

$$1\cdot x+0\cdot y=54°5',$$
$$0\cdot x+1\cdot y=50°1',$$
$$180-1\cdot x-1\cdot y=76°6'.$$

После преобразования получим:

$$1 \cdot x + 0 \cdot y = 54°5'$$
$$0 \cdot x + 1 \cdot y = 50°1',$$
$$1 \cdot x + 0 \cdot y = 54°5'.$$

На основе системы условных уравнений составляют систему нормальных уравнений, число которых равно числу независимых переменных:

$$\left.\begin{array}{l}[aa]\cdot x+[ab]\cdot y+\ldots=[al]\\ [ab]\cdot x+[bb]\cdot y+\ldots=[bl]\end{array}\right\} \qquad (7.3)$$

Квадратными скобками обозначены суммы вида:

$$[aa] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \; ; \; [bb] = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \; ;$$

$$[ab] = \sum_{i=1}^{n} a_i \, b_i \; ; \; [al] = \sum_{i=1}^{n} a_i \, l_i \; ; \; [b\,l] = \sum_{i=1}^{n} b_i \; l_i \; .$$

В рассматриваемом примере коэффициенты нормальных уравнений будут:

$$[aa]=[bb]=2; \quad [ab]=1; \quad [al]=157°59'; \quad [bl]=153°55'.$$

Систему нормальных уравнений запишем следующим образом:

$$2x+y=157°59',$$
$$x+2y=153°55'.$$

Эту систему можно решить методом определителей. Тогда искомые значения неизвестных будут:

$$x = \frac{D_x}{D} \; ; \quad y = \frac{D_y}{D} \; .$$

где D — определитель системы нормальных уравнений (7. 3), составленный из коэффициентов при неизвестных;

D_x, D_y — определители, полученные заменой соответствующего столбца в определителе D свободными членами.

В рассматриваемом примере имеем.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \; D_x = \begin{vmatrix} 157°59' & 1 \\ 153°55' & 2 \end{vmatrix} = 162°3; \; D_y = \begin{vmatrix} 2 & 157°59' \\ 1 & 153°55' \end{vmatrix} = 149°51';$$

тогда

$$x = \frac{162°3'}{3} = 54°1', \quad y = \frac{149°51'}{3} = 49°57'.$$

Третье неизвестное z находим из уравнения связи

$$z = 180 - (54°1' + 49°57') = 76°2'.$$

Вычислив x, y, z, находим минимальные значения невязок:

$$\beta_x = l_x - x = 54°5' - 54°1' = 4';$$

$$\beta_y = l_y - y = 50°1' - 49°57' = 4';$$

$$\beta_z = l_z - z = 76°6' - 76°2' = 4'.$$

Оценки дисперсий для значений x, y, z, . . ., вычисленных по методу наименьших квадратов, находим по формулам:

$$S_x^2 = \frac{D_{11}}{D} \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^{L} \beta_i^2}{N-L+H}; \quad S_y^2 = \frac{D_{22}}{D} \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^{L} \beta_i^2}{N-L+H}, \quad (7.4)$$

где D_{11} — минор определителя D, полученный вычеркиванием из него первого столбца и первой строки;

D_{22} — минор определителя D, полученный вычеркиванием второго столбца и второй строки.

Аналогично из другой пары нормальных уравнений, в которой исключен x или y, может быть найдено значение S_z^2.

В рассмотренном примере $S_x^2 = S_y^2 = S_z^2 = S^2$.

Проведя вычисления, получим $S^2 = \frac{2}{3} \cdot 48 = 32$. Оценка СКО для x, y, z будет $S = 5{,}6'$.

7. 4. Метод двойных измерений

Двойные измерения производят при исследовании измерительных приборов и метода измерений, когда следует выяснить, не дает ли измерительная аппаратура разных показаний в зависимости от направления подхода к значениям измеряемой величины и какова эта разность.

Метод состоит в выполнении наблюдений в прямом и обратном направлениях одним прибором и в одинаковых условиях. При этом получают двойной ряд данных наблюдений:

$$x_1' \; x_2', \; . \; . \; . \; , \; x_i', \; . \; . \; . \; , \; x_n'$$

$$x_1'' \; x_2'', \; . \; . \; . \; , \; x_i'', \; . \; . \; . \; , \; x_n''$$

Затем составляют разности каждой пары данных

$$d_i = x'_i - x''_i \quad (i = 1, 2, \; . \; . \; . \; , \; n)$$

и находят среднее арифметическое значение этих разностей

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d_i.$$

Малое значение $\bar{d}$ указывает на отсутствие систематических разностей между наблюдениями в прямом и обратном направлениях.

Если такое изучение аппаратуры или метода измерений указывает на наличие существенных разностей между наблюдениями в прямом x' и обратном x'' направлениях, то измерения следует осуществлять с подходом к номинальному значению измеряемой величины слева и справа, а действительное значение этой величины вычислять, как среднее арифметическое наблюдений

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i' + x_i''}{2} = \frac{1}{2n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i' + \sum_{i=1}^{n} x_i'' \right).$$

Этим методом могут быть существенно уменьшены погрешности из-за мертвого хода верньерных механизмов, из-за трения в опорах приборов с подвижной частью на кернах, от гистеризиса, а также погрешности, линейно изменяющиеся во времени.

7.5. Использование регрессионного анализа для обнаружения изменяющейся систематической погрешности

В некоторых случаях среднее значение случайной величины зависит от неслучайного аргумента x. Форма такой зависимости, определяемая физическим характером изучаемого явления, задает так называемую линию регрессии Y на x, которая обозначается $M(Y/x)$. Чтобы подобрать форму этой линии, следует сначала провести логический анализ результатов наблюдений, основанный на имеющихся предварительных сведениях о погрешностях метода измерений, далее найти параметры уравнения линии регрессии, а затем проверить, насколько найденное решение согласуется с экспериментальными данными. Последнее выполняют при помощи критерия Р. Фишера.

Рассмотрим простейший случай, когда линию регрессии можно считать прямой:

$$M(Y/x) = \alpha + \beta x,$$

где α и β — параметры прямой.

Для оценки параметров прямой регрессии следует провести наблюдения величины y при различных значениях x. Если наблюдений окажется много, то их следует сгруппировать по интервалам, приписав каждому интервалу определенные значения $x=x_i$. В этом случае следует воспользоваться указаниями п. 3. 1.

Пусть при значении аргумента $x=x_i$ оказалась группа из n_i наблюдений величины Y, в результате которых получены значения $y_{ij}(j=1,2,\ldots,n_i)$. Далее обработку наблюдений ведут по следующей схеме.

1. Вычисляют оценку углового коэффициента β:

$$\tilde{\beta} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{L} (x_i - \bar{x})\ \bar{y}_i}{\sum\limits_{i=1}^{L} (x_i - \bar{x})^2}, \tag{7.5}$$

где
$$\bar{y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij};$$

$$\bar{x} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} x_i;$$

L — число значений аргумента x_i, при которых производили наблюдения.

2. Вычисляют оценку параметра α по формуле

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} \bar{y}_i - \tilde{\beta} \cdot \bar{x}. \tag{7.6}$$

Построить прямую регрессии можно более простым путем без вычисления $\tilde{\alpha}$ если найти координату $\tilde{\gamma}$ точки прямой, соответствующую среднему значению аргумента $\bar{x}$:

$$\tilde{\gamma} = M(Y/\bar{x}) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} \bar{y}_i. \tag{7.7}$$

Прямая, проведенная через точку с координатами $(\tilde{\gamma}, \bar{x})$ и угловым коэффициентом $\tilde{\beta}$, и будет прямой регрессии.

3. Проверяют правильность выбранной зависимости $M(Y/x)$. Для этого вычисляют оценку межгрупповой дисперсии относительно соответствующих значений $M(Y/x_i)$:

$$S^2_{Y/x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{L} n_i\,[\bar{y}_i - M(Y/x_i)]^2}{L - G}, \tag{7.8}$$

где $M(Y/x_i) = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}\, x_i$ (если $M(Y/x)$ уравнение прямой);

L — число значений x_i (число групп);

G — число параметров кривой регрессии, оцениваемых по выборке.

В том случае, когда $M(Y/x)$ — прямая линия, таких параметров два: α и β.

Далее вычисляют среднее значение внутригрупповых оценок дисперсии

$$S^2{}_{Y_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{L} \sum\limits_{j=1}^{n_i} [y_{ij} - \bar{y}_i]^2}{N - L}\,, \tag{7.9}$$

где $N = \sum\limits_{i=1}^{L} n_i$.

Отношение дисперсий, вычисленных по формулам (7. 8) и (7. 9), не должно превосходить значения, найденного из приложения 9 при выбранном уровне значимости $q/2=1\%$ или 5%:

$$F(k_1, k_2) > \frac{S^2{}_{Y|x}}{S^2{}_{Y_i}}\,, \tag{7.10}$$

где $F(k_1, k_2)$ — значения функции распределения Р. Фишера из приложения 9;

$k_1=L-G$ — число степеней свободы для $S^2{}_{Y|x}$;

$k_2=N-L$ — число степеней свободы для $S^2{}_{Y_i}$.

4. Вычисляют оценку дисперсий наблюдений относительно прямой регрессии:

$$S^2 = \frac{1}{N-G} \sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{n_i} [y_{ij} - (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} x_i)]^2\,, \tag{7.11}$$

где $G=2$.

5. Вычисляют оценки дисперсий параметров прямой:

$$S_\alpha{}^2 = \frac{S^2}{N}\,; \tag{7.12}$$

$$S^2{}_\beta = \frac{S^2}{N \cdot S^2{}_x}\,, \tag{7.13}$$

где

$$S^2{}_x = \frac{\sum\limits_{i=1}^{L} (x_i - \bar{x})^2}{L-1}$$

Зная S_α и S_β можно построить доверительные интервалы для α и β если известно, что наблюдения имеют нормальное распределение.

Границами интервалов будут

$$\tilde{\alpha} \pm t_q \cdot S_\alpha \text{ и } \tilde{\beta} \pm t_q \cdot S_\beta \text{ ,}$$

где t_q — коэффициент Стьюдента. Его находят из приложения 7 при $k=N-G$ и выбранной доверительной вероятности (подробнее см. п. 4. 5).

Пример*. В табл. 7.1 приведены результаты измерений твердости образца по шкале HRC по двум взаимно перпендикулярным направлениям x и z квадратной плитки. Требуется определить уравнение линии регрессии.

Таблица 7.1

Твердость образца по координатам

Координата z, *мм*	Координата x, *мм*										Среднее по строкам $\bar{y}_j\,(x)$
	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
100	24,0	23,6	23,8	25,2	24,2	24,4	25,4	25,1	24,8	26,0	24,65
90	23,5	24,3	24,7	24,2	24,8	24,7	24,8	24,8	25,3	25,4	24,65
80	23,5	24.3	23,7	24.6	24,5	25,2	25,1	24,6	25,3	25,5	24,63
70	23,5	24,3	24,4	24,1	24,9	24,8	25,3	25,5	25,2	25,0	24,70
60	24,2	23,9	24,4	24,2	25,1	24,5	24,4	25,2	24,9	26,0	24,68
50	23,5	23,9	24,0	24,2	24,1	24,5	25,0	24,9	25,7	25,3	24,51
40	23,7	24,6	24,0	24,2	24,9	24,7	25,0	25,1	25,3	25,2	24,67
30	23,4	24,0	24,5	24,5	24,6	25,1	25,3	25,8	24,8	25,8	24,78
20	24,0	23,8	24,6	24,4	24,5	25,0	25,2	25,1	24,7	25,7	24,70
10	23,5	23,9	23,7	25,1	24.1	24,2	24,3	25,0	25,6	25,5	24,49
Среднее по столбцам $\bar{y}_i\,(z)$	23,7	24,1	24,2	24,5	24,6	24,7	25,0	25,1	25,2	25,5	24,64

Рассмотрение условных средних арифметических значений твердости, соответствующих последовательным значениям аргумента x_i показывает, что твердость растет с увеличением x.

*) Материал для примера предоставил Е. Ф. Долинский.

В то же время по оси z наблюдаются только случайные изменения твердости вдоль каждого столбца. Это может быть подтверждено при помощи критериев Фишера и Аббе, но в данном случае видно без применения статистических критериев.

Систематическое изменение твердости по координате x может быть предварительно изучено при помощи построения графика $\overline{y}_i(x)$. Последний оказывается прямой линией. Поэтому линию регрессии ищем в виде

$$\overline{y}_i = \tilde{\gamma} + \tilde{\beta}(x_i - \overline{x}).$$

Для вычисления оценок коэффициентов $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\beta}$ составим таблицы 7.2, 7.3, 7.4 и 7.5.

Коэффициент $\tilde{\gamma}$ вычисляем по формуле (7.7), используя данные столбца 2 табл. 7.2 и то, что $\overline{x}=55$:

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i = 24{,}66.$$

Коэффициент $\tilde{\beta}$ вычисляем по формуле (7.5), используя для этого данные столбцов 4 и 5 табл. 7.2:

$$\tilde{\beta} = \frac{150}{8250} = 0{,}0182.$$

Проверим правильность выбранной зависимости. Для этого вычислим оценку межгрупповой дисперсии по формуле (7.8), используя данные столбцов 7 и 8 табл. 7.2:

$$S^2_{Y/x} = \frac{0{,}572}{10-2} = 0{,}0715.$$

Затем вычислим среднее значение внутригрупповых оценок дисперсии по формуле (7.9), используя данные табл. 7.3:

$$S^2_{Y_i} = \frac{10{,}8}{100-10} = 0{,}120.$$

Отношение

$$(S^2_{Y/x}/S^2_{Y_i}) = 0{,}0715/0{,}120 = 0{,}605.$$

Из приложения 9 для $k_1=8$ и $k_2=90$ при $q/2=0{,}05$ имеем

$$F(8;90)=2{,}04.$$

Так как $0{,}605<2{,}04$, то гипотезу о линейности регрессии с уравнением $Y=24{,}66+0{,}0182(x_i-\overline{x})$ следует принять.

Оценку дисперсий отдельных наблюдений y_{ij} вычисляем по формуле (7.9), используя для этого данные столбца 9 табл. 7.2:

$$S^2 = \frac{113\,320\cdot 10^{-4}}{98} = 0{,}1156.$$

К вычислению $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\beta}$, $S^2_{Y|x}$

x_i	$\bar{y}_i$	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})\,\bar{y}_i$	$\tilde{\gamma}+\tilde{\beta}(x_i-\bar{x})$	$\bar{y}_i-M(Y\|x)$	$n_i\,[\bar{y}_i-M(Y\|x_i)]$	$\sum_{j=1}^{n_i}[y_{ij}-\tilde{\gamma}-\tilde{\beta}\times(x_i-\bar{x})]^2\cdot 10^4$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	23,7	—45	2 025	—1 066,5	23,84	—0,14	0,196	9 720
20	24,1	—35	1 225	— 843,5	24,02	+0,08	0,064	8 400
30	24,2	—25	625	— 605	24,20	0,00	0,000	13 200
40	24,5	—15	225	— 367,5	24,39	+0,11	0,121	14 450
50	24,6	— 5	25	— 123	24,57	+0,03	0,009	11 410
60	24,7	5	25	123,5	24,75	—0,05	0,025	9 430
70	25,0	15	225	375	24,93	+0,07	0,049	13 010
80	25,1	25	625	627,5	25,12	—0,02	0,004	10 520
90	25,2	35	1 225	882	25,30	—0,10	0,100	12 800
100	25,5	45	2 025	1 147,5	25,48	+0,02	0,004	10 400
Сумма								
550	246,6	—	8 250	150	—	—	0,572	113 320

Таблица 7.3

К вычислению $S^2 Y_i$

Координата z, мм	Координата на плитке x, мм								
	10		20		30		40		50
	$y_i-\bar{y}$	$(y_i-\bar{y})^2$	$y_i-\bar{y}$	$(y_i-\bar{y})^2$	$y_i-\bar{y}$	$(y_i-\bar{y})^2$	$y_i-\bar{y}$	$(y_i-\bar{y})^2$	$y_i-\bar{y}$
100	0,3	0,09	—0,5	0,25	—0,4	0,16	0,7	0,49	—0,4
90	—0,2	0,04	0,2	0,04	0,5	0,25	—0,3	0,09	0,2
80	—0,2	0,04	0,2	0,04	—0,5	0,25	0,1	0,01	—0,1
70	—0,2	0,04	0,2	0,04	0,2	0,04	—0,4	0,16	0,3
60	0,5	0,25	—0,2	0,04	0,2	0,04	—0,3	0,09	0,5
50	—0,2	0,04	—0,2	0,04	—0,2	0,04	—0,3	0,09	—0,5
40	0	0	0,5	0,25	—0,2	0,04	—0,3	0,09	0,3
30	—0,3	0,09	—0,1	0,01	0,3	0,09	0	0	0
20	0,3	0,09	—0,3	0,09	0,4	0,16	—0,1	0,01	—0,1
10	—0,2	0,04	—0,2	0,04	—0,5	0,25	0,6	0,36	—0,5
Суммы		0,72		0,84		1,32		1,39	

К вычислению $S^2\ Y_i$

Координата z, мм	Координата на плитке x, мм										
	50	60		70		80		90		100	
	$(y_i-\bar{y})^2$	$y_i-\bar{y}$	$(y_i-\bar{y})^2$	$y_i-\bar{y}$	$(y_i-\bar{y})^2$	$y_i-\bar{y}$	$(y_i-\bar{y})^2$	$y_i-\bar{y}$	$(y_i-\bar{y})^2$	$y_i-\bar{y}$	$(y_i-\bar{y})^2$
100	0,16	—0,3	0,09	0,4	0,16	0	0	—0,4	0,16	0,5	0,25
90	0,04	0	0	—0,2	0,04	—0,3	0,09	0,1	0,01	—0,1	0,01
80	0,01	0,5	0,25	0,1	0,01	—0,5	0,25	0,1	0,01	0	0
70	0,09	0,1	0,01	0,3	0,09	0,4	0,16	0	0	—0,5	0,25
60	0,25	—0,2	0,04	—0,6	0,36	0,1	0,01	—0,3	0,09	0,5	0,25
50	0,25	—0,2	0,04	0	0	—0,2	0,04	0,5	0,25	—0,2	0,04
40	0,09	0	0	0	0	0	0	0,1	0,01	—0,3	0,09
30	0	0,4	0,16	0,3	0,09	+0,7	0,49	—0,4	0,16	0,3	0,09
20	0,01	0,3	0,09	0,2	0,04	0	0	—0,5	0,25	0,2	0,04
10	0,25	—0,5	0,25	—0,7	0,49	—0,1	0,01	0,4	0,16	0	0
Суммы	1,15		0,93		1,28		1,05		1,1		1,02

Сумма сумм = 10,8

Таблица 7.4

Разности $y_{ij}-[\tilde{\gamma}+\tilde{\beta}(x_i-\bar{x})]$

Координата z, мм	Координата x, мм									
	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
100	0,16	—0,42	—0,40	+0,81	—0,37	—0,35	0,47	—0,02	—0,50	0,52
90	—0,34	0,28	+0,50	—0,19	+0,23	—0,05	—0,13	—0,32	0,0	—0,08
80	—0,34	0,28	+0,50	+0,21	—0,07	+0,45	0,17	—0,52	0,0	+0,02
70	—0,34	0,28	+0,20	—0,29	+0,33	+0,05	0,37	0,38	—0,10	—0,48
60	+0,36	—0,12	+0,20	—0,19	0,53	—0,25	—0,53	0,08	—0,40	+0,52
50	—0,34	—0,12	—0,20	—0,19	—0,47	—0,25	0,07	—0,22	+0,40	—0,18
40	—0,14	0,58	—0,20	—0,19	+0,33	—0,05	0,07	—0,02	0,0	—0,28
30	—0,44	—0,02	+0,30	+0,11	+0,03	+0,35	0,37	0,68	—0,50	+0,32
20	+0,16	—0,22	+0,40	+0,01	—0,07	+0,25	0,27	—0,02	—0,60	+0,22
10	—0,34	—0,12	+0,50	+0,71	—0,47	—0,55	—0,63	—0,12	+0,30	—0,02

Таблица 7.5

Значения $\left\{y_{ij}-[\tilde{\gamma}+\tilde{\beta}(x_i-\bar{x})]\right\}^2\cdot 10^4$

Координата z, мм	Координата x, мм									
	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
100	256	1 764	1 600	6 561	1 369	1 225	2 209	4	2 500	2 207
90	1 156	784	2 500	361	529	25	169	1 024	0	64
80	1 156	784	2 500	441	49	2 025	288	2 704	0	4
70	1 156	784	400	841	1 089	25	1 369	1 444	100	2 304
60	1 296	144	400	361	2 809	625	2 809	64	1 600	2 704
50	1 156	144	400	361	2 209	625	49	484	1 600	324
40	196	3 364	400	361	1 089	5	49	4	0	784
30	1 936	4	900	121	9	1 225	1 369	4 624	2 500	1 024
20	256	484	1 600	1	49	625	729	4	3 600	484
10	1 156	144	2 500	5 041	2 209	3 025	3 969	144	900	4
Суммы	9 720	8 400	13 200	14 450	11 410	9 430	13 010	10 500	12 800	10 400

Сумма сумм 113 320

Пояснения к табл. 7.2 нужны только для столбца 9. В этом столбце записаны результаты вычислений по формуле

$$\sum_{j=1}^{n_i} \left[y_{ij} - \tilde{\gamma} - \tilde{\beta}\,(x_i - \bar{x})\right]^2 .$$

Суммирование производится по j, что соответствует координате z на плитке.

Значения $\tilde{\gamma} + \tilde{\beta}\,(x_i - \bar{x})$ для всех x_i приведены в столбце 6 табл. 7.2. Разности $y_{ij} - [\tilde{\gamma} + \tilde{\beta}(x_i - \bar{x})]$ приводятся во вспомогательной табл. 7.4, а квадраты этих разностей, помноженные на 10^4 — во вспомогательной табл. 7.5.

Вычислим оценки дисперсий $\tilde{\beta}$ и $\tilde{\gamma}$ по формулам (7.12) и (7.13) соответственно:

$$S_2(\tilde{\beta}) = \frac{1\,156 \cdot 10^{-4}}{10 \cdot 8\,250} = 1{,}4 \cdot 10^{-6};$$

$$S^2(\tilde{\gamma}) = \frac{1\,156 \cdot 10^{-4}}{100} = 1{,}2 \cdot 10^{-3} .$$

Уравнение прямой регрессии будет иметь вид:

$$y_i = 24{,}66 + 0{,}0182\ (x_i - 55).$$

7.6. Использование корреляционного анализа для обнаружения систематических погрешностей

Наличие корреляции между двумя случайными величинами указывает на зависимость центра условного распределения одной величины от другой величины. Степень корреляционной связи характеризуется коэффициентом корреляции.

$$\rho = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y},$$

где μ_{XY} — второй смешанный момент случайных величин X и Y. Порядок вычисления его оценки приведен ниже;

σ_X, σ_Y — СКО случайных величин X и Y.

Если коэффициент корреляции $\rho = \pm 1$, то это означает, что между величинами X и Y существует линейная зависимость. Если $\rho = 0$, то X и Y не коррелированы между собой.

Линия, характеризующая корреляционную зависимость, называется кривой регрессии. В частном случае она переходит в прямую. Для вычисления коэффициентов регрессии используют метод наименьших квадратов.

Построение кривой регрессии может быть использовано для выяснения характера зависимости погрешности от некоторого аргумента.

В первом приближении считают, что регрессия Y на X линейна. В этом случае уравнение прямой регрессии имеет вид

$$Y - M(Y) = \rho \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot [X - M(X)] .$$

Уравнение прямой регрессии X на Y будет

$$X - M(X) = \rho \cdot \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \cdot [Y - M(Y)].$$

Угловые коэффициенты прямых регрессии $\beta_{Y/X} = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ и $\beta_{X/Y} = \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$ называются коэффициентами регрессии.

Для оценки коэффициентов регрессии сначала проводят попарные наблюдения $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ величин X и Y. Дальнейшие вычисления производят в следующем порядке.

1. Находят средние значения X и Y:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i , \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i . \tag{7.14}$$

2. Вычисляют две оценки СКО:

$$S^*_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \; ; \quad S^*_Y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2} . \tag{7.15}$$

3. Вычисляют оценку второго смешанного момента

$$m^*_{XY} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) . \tag{7.16}$$

4. Вычисляют выборочную оценку коэффициента корреляции. Если $n \geqslant 30$, то для этого используют формулу

$$\tilde{\rho} = \frac{m^*_{XY}}{S^*_X \cdot S^*_Y} . \tag{7.17}$$

Если n мало, то полученная по формуле (7.17) оценка $\tilde{\rho}$ имеет отрицательное смещение, которое должно быть устранено. Исправленное значение $\check{\rho}$ вычисляют по формуле:

$$\check{\rho} = \tilde{\rho} + \frac{\tilde{\rho}(1 - \tilde{\rho}^2)}{2n} . \tag{7.18}$$

5. Вычисляют оценки коэффициентов регрессии:

$$\tilde{\beta}_{Y/X} = \tilde{\rho} \frac{S^*_Y}{S^*_X} \; ; \quad \tilde{\beta}_{X/Y} = \tilde{\rho} \frac{S^*_X}{S^*_Y} . \tag{7.19}$$

6. Находят характеристики рассеивания значений $\tilde{\rho}$ относительно ρ и значений $\tilde{\beta}$ относительно β. Такими характеристиками при распределении величин X и Y, близком к нормальному, а также при n, достаточно большом, и ρ не слишком близким к единице, будут оценки СКО для коэффициента корреляции

$$S(\tilde{\rho}) = \frac{1-\tilde{\rho}^2}{\sqrt{n}} \tag{7.20}$$

для коэффициентов регрессии

$$S\left[\tilde{\beta}_{Y/X}\right] = \frac{S_Y}{S_X} \cdot \frac{1-\tilde{\rho}^2}{\sqrt{n}}; \quad S\left[\tilde{\beta}_{X/Y}\right] = \frac{S_X}{S_Y} \cdot \frac{1-\tilde{\rho}^2}{\sqrt{n}}. \tag{7.21}$$

7. Находят доверительные границы для ρ и β:

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{\rho} - z_q \cdot S_\rho < \rho < \tilde{\rho} + z_q \cdot S_\rho; \\ \tilde{\beta}_{Y/X} - z_q \cdot S(\tilde{\beta}_{Y/X}) < \beta_{Y/X} < \tilde{\beta}_{Y/X} + z_q \cdot S(\tilde{\beta}_{Y/X}); \\ \tilde{\beta}_{X/Y} - z_q \cdot S(\tilde{\beta}_{X/Y}) < \beta_{X/Y} < \tilde{\beta}_{X/Y} + z_q \cdot S(\tilde{\beta}_{X/Y}); \end{array}\right\} \tag{7.22}$$

где z_q — абсцисса нормированной функции Лапласа при $\Phi(z_q) = \frac{1}{2}(1-q)$ (приложение 3).

8. Корреляционную связь можно полагать отсутствующей $\beta \approx 0$), если при больших выборках выполняется условие

$$|\tilde{\rho}| < z_q \cdot S_\rho. \tag{7.23}$$

При малых выборках должно выполняться условие

$$|\tilde{\rho}| < t_q \sqrt{\frac{1-\tilde{\rho}^2}{n-2}}, \tag{7.24}$$

где t_q — процентная точка распределения Стьюдента с числом степеней свободы $k=n-2$ (приложение 7).

Пример. В результате поверки измерителей малой мощности сверхвысоких частот типа М3-1 (ИММ-6) на частоте 200 МГц (диапазон 50—200 МГц) при положении переключателя ослабителя ×1 получено множество значений относительной погрешности ансамбля приборов М3-1, каждое из которых соответствует определенному уровню мощности $P_{обр}$ с. в. ч., поступающему от образцового источника с. в. ч. колебаний. Необходимо определить, имеется ли корреляционная связь между $P_{обр}$ и относительной погрешностью измерения мощности δ. Данные 85 наблюдений приведены в табл. 7.6. На основе этих наблюдений составлена корреляционная табл. 7.7. При этом для облегчения использования приведенных выше формул погрешность измерения мощности с. в. ч. обозначена через x_i, а действительное значение измеряемой мощности в милливаттах — через y_i.

Таблица 7.6

Результаты поверки приборов М3-1 (ИММ-6)

$P_{обр}$, мВт	δ, %	$P_{обр}$, мВт	δ, %	$P_{обр}$, мВт	δ, %	$P_{обр}$, мВт	δ, %
7,7	—5,9	5,9	—4,5	11,8	11,0	8,1	—9,9
9,3	—9,7	9,2	—9,2	7,2	—1,4	7,9	—2,5
10,0	—4,3	6,7	—14,0	6,8	—3,7	7,2	—8,5
10,9	—7,2	7,5	—6,5	9,3	—5,4	9,1	—5,5
7,0	—9,0	8,7	—1,1	10,3	—4,4	8,9	—6,5
8,2	—6,1	7,4	—5,8	6,5	—3,4	8,8	—7,4
7,2	—7,2	7,9	—5,6	10,8	—8,0	9,1	—5,0
11,4	—8,2	10,4	—6,4	10,0	—5,0	8,0	—4,7
7,5	—4,1	3,4	—1,4	8,2	—6,2	9,5	—3,7
4,3	—3,7	2,2	—8,3	2,4	—4,7	2,7	—2,5
2,9	—3,4	2,5	—2,0	1,1	—5,5	1,0	+5,0
2,6	—6,5	0,8	+6,5	9,6	—9,0	9,0	—5,5
9,2	—3,7	10,3	—4,1	6,5	—7,0	8,6	—2,8
9,4	—6,4	8,8	—8,5	9,0	—1,2	9,9	—7,6
9,5	—5,5	10,3	—8,1	4,1	+1,0	1,3	+3,8
6,4	—5,5	10,6	—2,8	11,3	—5,3	4,2	0
6,5	—3,1	10,7	—5,3	6,4	—1,6	4,2	+1,9
2,0	—5,0	11,0	—3,6	6,3	+0,8	4,2	+0,2
2,1	—1,4	10,1	—1,1	10,8	—4,3	9,9	—5,0
10,2	—2,8	6,4	—2,7	4,5	—5,1	2,1	+1,1
11,0	—2,7	10,5	—7,1	10,7	—4,8	10,2	—3,4
10,5	—8,8						

Таблица 7.7

Корреляционная таблица X/Y

Середины интервалов y_{lo}	Границы интервалов y_l	Середины интервалов x_{io}: +3	+1	−1	−3	−5	−7	−9	−11	Σ	$y_{lo}-\bar{y}$
		Границы интервалов x_i: более 2	[(+2)—(−0)]	[(−0)—(−2)]	[(−2)—(−4)]	[(−4)—(−6)]	[(−6)—(−8)]	[(−8)—(−10)]	[менее −10]		
1	[0—2]									4	−6,7
3	[2—4]									10	−4,7
5	[4—6]									7	−2,7
7	[6—8]									19	−0,7
9	[8—10]									23	+1,3
11	[10—12]									22	+3,3
	Σ	3	5	9	16	25	14	11	2	85 / 85	
	$x_{io}-\bar{x}$	7,4	5,4	3,4	1,4	−0,6	−2,6	−4,6	−6,6		

Примечания: 1. [ ) — интервал, замкнутый слева и открытый справа.

2. y_l — значение мощности с. в. ч., поступающей от образцового генератора на поверяемый прибор (в милливаттах), — $P_{обр}$ в табл. 7.6.

3. x_i — погрешность измерения мощности с. в. ч. (в процентах) — δ% в табл. 7.6.

4. Σ — общее число значений x_i или y_l в каждом из интервалов.

1. Вычислим средние значения $\bar{x}$ и $\bar{y}$ в соответствии с формулами (7.14). Ввиду того, что данные разнесены по интервалам, формулы (7.14) примут вид

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{L} x_{io}\cdot n_i \quad , \qquad \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{L} y_{jo}\cdot n_j,$$

где N — общее число данных;

n_i — число данных в i-м интервале;

L — число интервалов;

$$\bar{x} = \frac{3\cdot 3+1\cdot 5+(-1)\cdot 9+(-3)\cdot 16+(-5)\cdot 25+(-7)\cdot 14+(-9)\cdot 11+(-11)\cdot 2}{85} \approx$$

$$\approx -4{,}4 \;;$$

$$\bar{y} = \frac{1\cdot 4+3\cdot 10+5\cdot 7+7\cdot 19+9\cdot 23+11\cdot 22}{85} \approx 7{,}7.$$

2. Вычислим значения $x_{io} - \bar{x}$ и $y_{jo} - \bar{y}$, где x_{io} и y_{jo} — значения середин интервалов. Результаты вычислений приведены в табл. 7.7.

3. Вычислим оценки СКО S_X и S_Y, используя для этого формулы (7.15). Так как данные разбиты на интервалы, то формулы (7.15) примут вид:

$$S^*_X = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{L}(x_{io}-\bar{x})^2\, n_i}{N}}\;; \qquad S^*_Y = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}(y_{jo}-\bar{y})^2\, n_j}{N}}.$$

Подставив числовые значения, получим

$$S^*_X = \sqrt{\frac{7{,}4^2\cdot 3+5{,}4^2\cdot 5+3{,}4^2\cdot 9+1{,}4^2\cdot 16+0{,}6^2\cdot 25+2{,}6^2\cdot 14+4{,}6^2\cdot 11+6{,}6^2\cdot 2}{85}} =$$

$$= \sqrt{\frac{8724}{85}} \approx 3{,}2 \;;$$

$$S^*_Y = \sqrt{\frac{6{,}7^2\cdot 4+4{,}7^2\cdot 10+2{,}7^2\cdot 7+0{,}7^2\cdot 19+1{,}3^2\cdot 23+3{,}3^2\cdot 22}{85}} \approx 3{,}0.$$

4. Вычислим оценку второго смешанного момента по формуле (7.16), которую ввиду разбиения данных по интервалам запишем следующим образом:

$$m^*_{XY} = \frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{L(i)\,L(j)} (x_{io}-\bar{x})\;(y_{io}-\bar{y})\cdot n_{ij}.$$

Вычисление облегчает корреляционная таблица 7.7, в которой видны все сочетания разностей $(x_{io}-\bar{x})$ и $(y_{io}-\bar{y})$ и их число n_{ij}.

Например, в таблице видно, что $(x_{io}-\bar{x})=7{,}4$ встречается три раза с разностью $(y_{io}-\bar{y})=-6{,}7$; $(x_{io}-\bar{x})=5{,}4$ четыре раза встречается с $(y_{io}-\bar{y})=-2{,}7$ и один раз с $(y_{io}-\bar{y})=-0{,}7$, и т. д.

Составляя сумму всех таких произведений, получим

$$m^*_{XY}=\frac{1}{85}\left[7{,}4\cdot(-6{,}7)\cdot 3+5{,}4\cdot(-2{,}7)\cdot 4+5{,}4\cdot(-0{,}7)\cdot 1+\ldots\right]=$$

$$=\frac{1}{85}\cdot(-360)=-4{,}2\,.$$

5. Вычислим выборочную оценку коэффициента корреляции по формуле (7.17)

$$\tilde{\rho}=\frac{-4{,}2}{3{,}2\cdot 3{,}0}=-0{,}44\ ;$$

6. Вычислим выборочные коэффициенты регрессии по формулам (7.19)

$$\tilde{\beta}_{Y/X}=-0{,}44\cdot\frac{3{,}0}{3{,}2}=-0{,}41\ ;$$

$$\tilde{\beta}_{X/Y}=-0{,}44\cdot\frac{3{,}2}{3{,}0}=-0{,}48\,.$$

7. Найдем характеристики рассеивания для ρ и β по формулам (7.20) и (7.21):

$$S_\rho=\frac{1-0{,}44^2}{\sqrt{85}}=0{,}087\ ;$$

$$S(\beta_{Y/X})=0{,}087\cdot\frac{2{,}97}{3{,}20}=0{,}081\ ;$$

$$S(\beta_{X/Y})=0{,}087\cdot\frac{3{,}20}{2{,}97}=0{,}094\,.$$

8. Далее, задавшись некоторой доверительной вероятностью α, вычислим доверительные границы для ρ и β, воспользовавшись для этого формулами (7.22).

9. Проверим реальность корреляционной связи. Для этого воспользуемся формулой (7.23), приняв уровень значимости $q=2\%$. Тогда

$$\Phi(z_q)=0{,}49;\quad z_q=2{,}33.$$

Критическая область для значимости $\tilde{\rho}$ будет

$$|\tilde{\rho}|_{\text{значимое}} > 2{,}33 \cdot 0{,}0870 = 0{,}203.$$

Учитывая, что $0{,}44 > 0{,}203$, с вероятностью не менее 0,98 можно считать, что корреляционная связь между измеряемой мощностью с. в. ч. и погрешностью прибора М3-1 (ИММ-6) действительно имеется и, используя коэффициенты $\tilde{\tilde{\rho}}_{Y/X}$ или $\tilde{\tilde{\rho}}_{X/Y}$ можно построить прямую регрессии, характеризующую зависимость погрешности измерения прибором М3-1 (Y) от уровня измеряемой мощности (x):

$$Y - 7{,}7 = -0{,}414(x_{io} + 4{,}4).$$

После преобразования это уравнение может быть представлено в канонической форме:

$$Y = 5{,}88 - 0{,}414 x_{io}.$$

Следует заметить, что из регрессионной зависимости $M[Y/x]$ нельзя простым алгебраическим преобразованием получить зависимость $M[X/y]$. Это объясняется тем, что корреляционная связь не тождественна функциональной. Различия между прямыми регрессии будут тем больше, чем больше рассеивание экспериментальных данных.

Подробно вопросы корреляционного и регрессионного анализа изложены в книге С. А. Айвазяна «Статистическое исследование зависимостей», «Металлургия», 1968.

7. 7. Оценка границ неисключенного остатка систематической погрешности

Результат наблюдения x_i может быть искажен воздействием влияющих величин $V_1, V_2, \ldots, V_j$. Изучив влияние каждой из них, можно внести в результат измерения поправки, согласно п. 2. 1. Однако полностью освободить результат измерения от систематических погрешностей невозможно. После внесения поправок остаются неисключенные остатки систематической погрешности, обусловленные каждой влияющей величиной.

Очевидно, что погрешность результата наблюдения, вызываемая неисключенными остатками систематических погрешностей, равна

$$\theta = x_i - x_{io} = f(A, V_1 + \Delta V_1, V_2 + \Delta V_2, \ldots, V_j + \Delta V_j) - f(A, V_1, V_2, \ldots, V_j),$$

где x_i — результат наблюдения, содержащий неисключенные остатки систематических погрешностей;

x_{io} — результат наблюдения в предположении, что систематические погрешности полностью исключены;

$f(A, V_1, V_2, \ldots, V_j)$ — функция, выражающая зависимость результата наблюдения от влияющих величин.

При точных измерениях неисключенные остатки систематических погрешностей малы. Поэтому для вычисления ϑ можно воспользоваться рядом Тейлора

$$\vartheta = \sum_{k=1}^{j} \frac{\partial f}{\partial V_k} \cdot \Delta V_i + R.$$

Остаточный член

$$R = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial V_1}\Delta V_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial V_j}\Delta V_j\right)^2 \cdot f\,(\tilde{A}, \tilde{V}_1\ \tilde{V}_2 \ldots \tilde{V}_j)$$

должен быть примерно на порядок меньше суммы остальных членов правой части формулы и тогда им можно пренебречь.

Если погрешность определения значения влияющей величины V_k составляет ΔV_k, то обусловленная этим погрешность результата наблюдения будет равна

$$\vartheta = \tau_k \cdot \Delta V_k\,, \tag{7.25}$$

где $\tau_k = \frac{\partial f}{\partial V_k}$ — коэффициент влияния i-й влияющей величины.

При неизвестной зависимости $x_i = f(A, V_1, \ldots, V_j)$ коэффициенты влияния определяют экспериментально.

Удобно как неисключенные остатки, так и погрешности результатов наблюдений выражать в относительных единицах.

Тогда относительная погрешность результата наблюдения будет $\delta_k = \frac{\vartheta_k}{x_i}$, а неисключенный остаток определения K-й влияющей величины в относительной форме $\delta V_k = \frac{\Delta V_k}{V_k}$. Воспользовавшись только линейной частью ряда Тейлора, можно записать, что

$$\delta_k = \sum_{k=1}^{j} \frac{\partial f}{\partial V_k} \cdot \frac{\Delta V_k}{x_i} \cdot \frac{V_k}{V_k} = \sum_{k=1}^{j} \tau_k \cdot \delta V_k, \tag{7.26}$$

где $\tau_k = \frac{\partial f}{\partial V_k} \cdot \frac{V_k}{x_i}$ — относительный коэффициент влияния K-й влияющей величины в случае выражения погрешностей в относительной форме.

Для сокращенности подобные коэффициенты влияния будем называть относительными.

Погрешность ϑ остается неизменной для одной группы наблюдений, но от группы к группе она может изменяться, оставаясь, однако, в пределах границ $\pm\Theta_i$, определяемых пределом погрешности измерения соответствующей влияющей величины. Для неисключенных остатков систематических погрешностей принимают равновероятное распределение.

При равновероятном распределении составляющих границу систематической погрешности результата вычисляют по формуле

$$\Theta = k_{\Sigma} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Theta_i^2} \ . \qquad (7.27)$$

Значения коэффициента k_{Σ} в зависимости от выбранной доверительной вероятности α приведены в табл. 7. 8.

Таблица 7.8

Значения коэффициента k_{Σ} в зависимости от доверительной вероятности

α	0,90	0,95	0,99
k_{Σ}	0,95	1,1	1,4

При малом числе слагаемых ($n \leqslant 4$) формулу (7.27) можно применять, если выполняется неравенство

$$\Theta < \sum_{i=1}^{n} [\Theta_i] \ . \qquad (7.28)$$

Если неравенство (7.28) не выполняется, то границу систематической погрешности результата следует вычислять по формуле

$$\Theta = \sum_{i=1}^{n} [\Theta_i] \ . \qquad (7.29)$$

7.8. Оценка систематической погрешности токовых весов

Принцип действия токовых весов заключается в том, что сила взаимодействия подвижной и неподвижной катушек при протекании по их обмоткам электрического тока может быть уравновешена на весах силой тяжести гири. Тогда измеряемую силу тока можно определить по формуле

$$I = \sqrt{\frac{m\,g}{\frac{\partial M}{\partial Z}}} = \sqrt{\frac{m\,g}{F}}\ . \qquad (7.30)$$

Здесь m — масса уравновешивающей гири;

g — ускорение силы тяжести;

$F = \frac{\partial M}{\partial Z}$ — производная по вертикальному направлению от взаимной индуктивности двух катушек. Она называется постоянной токовых весов и ее вычисляют по их геометрическим размерам.

В процессе подготовки и проведения измерения на токовых весах принимают меры, предусмотренные разделом 7.2 настоящей рекомендации, позволяющие создать и поддерживать такие условия наблюдений, чтобы возможности уменьшения систематических погрешностей были использованы наилучшим образом.

Однако устранить полностью систематические погрешности невозможно. В токовых весах остается ряд неисключенных остатков систематических погрешностей. Сюда относится остаточная погрешность от влияния поля контура, подводящего ток к подвижному соленоиду, и от переменных внешних магнитных полей. Относительное значение этой погрешности, определяемое экспериментально, не превышает $\delta_1(H) \leqslant 2 \cdot 10^{-6}$.

Остальные неисключенные составляющие систематической погрешности находят с учетом формулы (7.26).

Как известно, все величины, входящие в уравнение (7.30), измерены или вычислены с некоторой погрешностью, которая задана только предельным значением относительной погрешности. Для вычисления относительной погрешности измерения тока находят по соответствующим параметрам все коэффициенты влияния η как частные производные зависимости, определенной формулой (7.30).

$$\left.\begin{aligned} &\eta_m = \frac{\partial I}{\partial m} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{F\cdot m}}\ ; \quad \eta_g = \frac{\partial I}{\partial g} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{F\,g}}\ ; \\ &\eta_F = \frac{\partial I}{\partial F} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{F^3}}\ . \end{aligned}\right\} \qquad (7.31)$$

Соответствующие составляющие относительной погрешности, согласно формуле (7.26), будут

$$\left.\begin{aligned}
\delta I(m) &= \frac{\eta_m \cdot \Delta_m}{I} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{g}{F\cdot m}}\cdot\Delta m}{\sqrt{\frac{m\,g}{F}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta m}{m} \\
\delta I(g) &= \frac{\eta_g \cdot \Delta_g}{I} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{m}{F\cdot g}}\cdot\Delta g}{\sqrt{\frac{m\,g}{F}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta g}{g} \\
\delta I(F) &= \frac{\eta_F \cdot \Delta F}{I} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{m\,g}{F}}\cdot\Delta F}{\sqrt{\frac{m\,g}{F}}} = \frac{1}{2}\,\frac{\Delta F}{F}
\end{aligned}\right\} \tag{7.32}$$

Предельная относительная погрешность измерения массы уравновешивающего груза m равна

$$\frac{\Delta m}{m} = 1{,}25\cdot 10^{-6},$$

а ускорения силы тяжести q равна

$$\frac{\Delta g}{g} = 4\cdot 10^{-6}.$$

Погрешность постоянной токовых весов в свою очередь вызывается рядом причин, влияние которых определеяют аналогично. Так как формула для вычисления этой постоянной F довольно сложна, то она здесь не приводится, а вместо этого в табл. 7. 9 даны вычисленные составляющие погрешности постоянной (предельные значения).

Таблица 7.9

Составляющие погрешности постоянной токовых весов

Источник погрешности	Погрешность: обозначение	Погрешность: $\delta F\cdot 10^6$
1	2	3
Неточность измерения радиальных размеров:		
неподвижного соленоида	$\delta F\,(r_{н})$	3
первого подвижного соленоида	$\delta F\,(r_{1п})$	3
второго подвижного соленоида	$\delta F\,(r_{2п})$	2

1	2	3
Погрешность измерения осевых размеров:		
неподвижного соленоида	$\delta F(l_н)$	2
первого подвижного соленоида	$\delta F(l_{1п})$	1,3
второго подвижного соленоида	$\delta F(l_{2п})$	0,7
Отклонение соленоидов от цилиндрической формы	$\delta F(Ц)$	2

Остаточную систематическую погрешность результата измерений вычисляют по формуле (7.27), положив $\alpha=0{,}99$, т. е. $k_\Sigma=1{,}4$:

$$\delta I=1{,}4\sqrt{[\delta I(H)]^2+[\delta I(m)]^2+[\delta I(g)]^2+\sum_{j=1}^{7}[\delta_j I(F)]^2},$$

где

$$\sum_{j=1}^{7}[\delta_j I(F)]^2=\delta I[F(r_н)]^2+\delta I[F(r_{1п})]^2+\delta I[F(r_{2п})]^2+$$
$$+\delta I[F(l_н)]^2+\delta I[F(l_{1п})]^2+\delta I[F(l_{2п})]^2+\delta I[F(Ц)]^2.$$

Подставив числовые значения, получим

$$\delta I=1{,}4\cdot10^{-6}\sqrt{1^2+0{,}62^2+2^2+1{,}5^2+1{,}5^2+1^2+1^2+0{,}7^2+}$$
$$\overline{+0{,}35^2+1^2}=1{,}4\cdot10^{-6}\sqrt{13{,}5}\approx5{,}2\cdot10^{-6}.$$

8. МАКСИМАЛЬНОЕ ЧИСЛО НАБЛЮДЕНИЙ. НАПИСАНИЕ РЕЗУЛЬТАТА ИЗМЕРЕНИЯ

8.1. Максимальное число наблюдений

Характеристиками точности результата измерения являются систематические и случайные погрешности.

Систематическими погрешностями можно пренебречь по сравнению со случайными, если

$$\frac{\Theta}{S_{\bar{x}}}<0{,}8 \tag{8.1}$$

где Θ — оценка границ суммы неисключенных остатков систематических погрешностей;

$S_{\bar{x}}$ — оценка СКО среднего арифметического.

В том случае, если

$$\frac{\Theta}{S_{\bar{x}}}>8 \tag{8.2}$$

можно пренебречь случайными погрешностями и точность результата измерений характеризовать лишь систематической погрешностью.

Увеличивать число наблюдений целесообразно до тех пор, пока доверительная погрешность измерения не будет определяться только систематической погрешностью.

Так как $S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$, то из неравенства (8.2) находят максимальное число наблюдений $n_{\text{макс}}$.

$$n_{\text{макс}} = 64 \cdot \left(\frac{S}{\Theta}\right)^2 \quad (8.3)$$

8.2. Написание результата измерения

Результат измерения должен содержать значение измеряемой величины и характеристики точности этого значения.

Если в дальнейшем предполагается исследование и сопоставление результатов измерений с последующим анализом погрешностей, то в этом случае указывают отдельно значения $\bar{x}$, Θ, $S_{\bar{x}}$ и n, где $\bar{x}$ — результат измерения; n — число наблюдений, выполненных при измерении.

Доверительная вероятность, с которой определена граница суммы неисключенных остатков систематических погрешностей, должна быть указана десятичной дробью в скобках вслед за значением Θ.

Если значение Θ указано без доверительной вероятности, то это означает, что граница неисключенных остатков систематических погрешностей определена нестатистическими методами.

В тех случаях, когда нужно указать доверительную погрешность результата измерения, его представляют в виде

$$\bar{x} \mp \Delta. \quad (8.4)$$

Доверительная вероятность, с которой определена граница общей погрешности результата измерения, должна быть указана десятичной дробью в скобках вслед за значением Δ.

В случае выполнения неравенства (8.1) неисключенными остатками систематических погрешностей пренебрегают по сравнению со случайными погрешностями и

$$\Delta = (t_q)_{\bar{x}} \cdot S_{\bar{x}}, \quad (8.5)$$

где (t_q) — q-процентная точка распределения средних арифметических.

В случае выполнения неравенства (8.2) точность результата характеризуется только систематической погрешностью

$$\Delta = \Theta. \quad (8.6)$$

Доверительную вероятность, принятую при вычислении Θ, указывают в скобках вслед за ее значением.

В промежуточных случаях, когда неравенства (8.1) и (8.2) не выполняются, для нахождения погрешности результата измерения нужно построить композицию распределений случайных погрешностей и неисключенных остатков систематических погрешностей.

Вычислить результирующую погрешность можно также по формуле

$$\Delta = (t_q)_\Sigma \cdot S_\Sigma, \tag{8.7}$$

где $(t_q)_\Sigma$ — коэффициент, соответствующий q-му уровню значимости композиции распределений случайных погрешностей и неисключенных остатков систематических погрешностей;

S_Σ — оценка среднего квадратического отклонения композиции случайных погрешностей и неисключенных остатков систематических погрешностей.

Значение S_Σ вычисляют по формуле

$$S_\Sigma = \sqrt{S^2_\vartheta + S^2_{\bar{x}}}, \tag{8.8}$$

где $S_{\bar{x}}$ — оценка СКО среднего арифметического;

S_ϑ — оценка СКО суммы неисключенных остатков систематических погрешностей.

Значение S_ϑ вычисляют по формуле

$$S_\vartheta = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} S^2_{\vartheta_i}},$$

где S_{ϑ_i} — оценка СКО неисключенных остатков i-й систематической погрешности.

Полагая, что последние распределены равновероятно (см. п. 7.7), S_{ϑ_i} вычисляют по формуле

$$S_{\vartheta_i} = \frac{\Theta_i}{\sqrt{3}}.$$

Значение $(t_q)_\Sigma$ вычисляют по эмпирической формуле*

$$(t_q)_\Sigma = \frac{(t_q)_\vartheta \cdot S_\vartheta + (t_q)_{\bar{x}} \cdot S_{\bar{x}}}{S_\vartheta + S_{\bar{x}}}, \tag{8.9}$$

---

* Применение эмпирической формулы (8.9) для вычисления $(t_q)_\Sigma$ сопровождается погрешностью, не превышающей 12%, которая имеет место при композиции равновероятного и нормального распределений при $\frac{\Theta}{\sigma} = 2$ и $\sigma = 0{,}99$ (Θ — граница равновероятного распределения, σ — СКО нормального распределения).

По мере того как распределение неисключенных остатков систематических погрешностей приближается к нормальному, погрешность приближенной формулы (8.9) снижается.

где $(t_q)_\theta$ — q-процентная точка распределения композиции неисключенных остатков систематических погрешностей.

При числе составляющих остатков систематических погрешностей более трех и если нет доминирующей составляющей произведение $(t_q)_\theta \cdot S_\theta$ вычисляют по формуле

$$(t_q)_\theta \cdot S_\theta = k_\Sigma \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Theta_i^2}\ , \qquad (8.10)$$

где Θ_i — граница i-й составляющей систематических погрешностей;

k_Σ — коэффициент, соответствующий выбранной доверительной вероятности (см. п. 7.7).

В случае невыполнения неравенства (7.28), произведение $(t_q)_\theta \cdot S_\theta$ вычисляют по формуле

$$(t_q)_\theta \cdot S_\theta = \sum_{i=1}^{n} [\Theta_i]\ . \qquad (8.11)$$

Пример. Обработка наблюдений, полученных при калибровке образцовой многогранной призмы, дала следующие результаты для отклонения одного из углов от номинального значения: $\bar{x}=1{,}98''$; $S_{\bar{x}}=0{,}05''$; $\Theta=0{,}03''$; $n=20$.

Так как $\frac{\Theta}{S_{\bar{x}}}=\frac{0{,}03}{0{,}05}=0{,}6<0{,}8$, то результат измерения может быть представлен в виде:

1) $\bar{x}=1{,}98$; $S_{\bar{x}}=0{,}05$; $n=20$

или

2) $A=1{,}98\pm0{,}10\,(0{,}95)$.

Последнее означает, что с вероятностью 0,95 истинное значение измеряемой величины лежит в доверительном интервале $[1{,}98''-0{,}10''; 1{,}98''+0{,}10'']$.

Погрешность $\Delta=\pm0{,}10''$ вычислена следующим образом.

При $\alpha=0{,}95$ из приложения 7 находим $t_{0{,}05}=2{,}09$ и $t_{0{,}05}\cdot S_{\bar{x}} = 2{,}09\cdot0{,}05''\approx0{,}10''$.

Если в приведенном примере границы неисключенного остатка систематических погрешностей были бы больше, например $\Theta=0{,}17''$, то запись результата должна быть иной.

Так как $\frac{\Theta}{S_{\bar{x}}} = \frac{0{,}17}{0{,}05} = 3{,}4 > 0{,}8$, то

1) $\bar{x}=1{,}98''$; $\Theta=0{,}17''$; $S_{\bar{x}}=0{,}05''$; $n=20$

или

2) $A=1{,}98''\pm0{,}20''$ (0,95).

Погрешность $\Delta=\pm0{,}20''$ вычислена следующим образом.

При $\alpha=0{,}95$ из приложения 7 находим $t_{0,95}=2{,}09$ и $t_{0,95}\cdot S_{\bar{x}}=0{,}10''$.

Поскольку граница неисключенных остатков систематических погрешностей определена нестатистическими методами, то, предполагая, что в границах $\pm\Theta$ погрешность распределена равновероятно, и, принимая $(t_q)_\theta\cdot S_\theta=\Theta$, по формулам (8.7), (8.8), (8.9) вычисляют:

$$(t_q)_\Sigma=\frac{0{,}17+0{,}10}{0{,}05+\frac{0{,}17}{1{,}73}}=\frac{0{,}27}{0{,}15}=1{,}8'' ;$$

$$S_\Sigma=\sqrt{0{,}00{,}25+0{,}01}=0{,}11'' ;$$

$$\Delta=1{,}80\cdot0{,}11=0{,}20'' .$$

ОБОСНОВАНИЕ НАИБОЛЕЕ ВАЖНЫХ ПОЛОЖЕНИЙ РЕКОМЕНДАЦИИ

В метрологии давно назрела необходимость унификации методов обработки результатов наблюдений. Эта потребность обусловлена тем, что использование разных методов в ряде случаев приводит к несравнимым результатам.

Публикуемая рекомендация относится к широко распространенному виду измерений — к прямым измерениям и поэтому должна в известной мере удовлетворить названную потребность.

Методика математической обработки экспериментальных данных зависит от их распределения. Наиболее полно строгие математические методы разработаны применительно к нормальному распределению, которым, как известно, можно удовлетворительно аппроксимировать распределения наблюдений в большинстве случаев практических измерений. В связи с этим рекомендация составлена применительно к случаю нормального распределения наблюдений. Однако гипотеза о том, что наблюдения имеют нормальное распределение, должна быть проверена, и для этого в рекомендации предусмотрены соответствующие методы.

Ниже приведены обоснования наиболее важных положений рекомендации.

Результат измерения и характеристики его точности. В качестве результата измерения принято среднее арифметическое данных наблюдений, вычисленное после внесения поправок на систематические погрешности.

Среднее арифметическое является не только состоятельной и несмещенной, но и эффективной оценкой измеряемой величины при нормальном распределении данных наблюдений; при некоторых других распределениях для этой цели известны более эффективные оценки. Однако, как уже отмечено, в большинстве случаев распределения наблюдений удовлетворительно аппроксимируются нормальным распределением, поэтому оптимальные оценки для других видов распределений в рекомендации не рассмотрены.

Точность результата характеризуют границы неисключенного остатка систематических погрешностей и среднее квадратическое отклонение среднего арифметического. Наряду с раздельным указанием этих оценок предусмотрена возможность вычисления общей оценки погрешности результата.

Поскольку вычисления, еще часто выполняемые без помощи вычислительных машин, при большом числе наблюдений бывают трудоемки, некоторое внимание уделено рациональной организации этой работы. В основу положена методика статистической обработки эмпирических данных, изложенная в РТМ 44—62, в которую внесены дополнения, учитывающие специфику задачи. В частности, предусмотрена проверка правильности каждого этапа вычислений. Кроме того, приведены правила округления при вычислениях и записи результатов.

Проверка гипотезы о нормальности распределения данных наблюдений. При числе данных, превышающих 50, для этой цели рекомендован известный критерий χ^2 К. Пирсона. Предпочтение этому критерию отдано как наиболее удачно сочетающему простоту вычислений с надежностью результатов.

При малом числе наблюдений ($10<n<50$) рекомендуется проверка по следующим признакам:

а) отношение среднего арифметического модулей отклонений наблюдений от среднего арифметического наблюдений к оценке их среднего квадратического отклонения не должно превышать некоторых значений, зависящих от числа наблюдений и выбранного уровня значимости;

б) число наблюдений, отклонение которых от их среднего арифметического значения превышает некоторый уровень, определяемый нормальным распределением и выбранной доверительной вероятностью, не должно быть больше одного при $10<n\leqslant20$ и более двух, если $20<n\leqslant50$.

Статистическая таблица для проверки по первому признаку заимствована из работы [1]. По второму признаку гипотеза проверяется с помощью вспомогательной таблицы, рассчитанной по формуле, выведенной А. М. Каганом и приведенной в рекомендации. Формула позволила вычислить квантили этого распределения по имеющемуся числу данных наблюдений и допускаемому выходу за эти границы.

Уровень значимости решения, принимаемого по этим двум признакам, во всяком случае не меньше суммы уровней значимости результатов проверки по каждому из признаков.

Нужно отметить, что изложенная методика представляет собой развитие метода Н. И.Идельсона [10].

Построение доверительных интервалов. Доверительные интервалы строят для неслучайных величин, значения которых неизвестны. Такими величинами в нашем случае являются истинное значение измеряемой величины и средние квадратические отклонения наблюдений и среднего арифметического.

Поскольку ответственность различных измерений может быть существенно разной, в общем случае разными должны быть и значения доверительной вероятности, принимаемые при оценке точности результатов этих измерений. Однако применительно к наиболее точным измерениям, выполняемым при метрологических исследованиях, возможна некоторая унификация этих значений. С этой целью в табл. 7.8, а также в примерах в рекомендации использован ограниченный ряд значений доверительной вероятности: 0,90; 0,95 и 0,99.

При этом для доверительных интервалов для истинных значений измеряемых величин целесообразны, в зависимости от области метрологии, $\alpha=0{,}99$ или $\alpha=0{,}95$; для доверительных интервалов для средних квадратических отклонений: $\alpha=0{,}90$ или $\alpha=0{,}95$.

После накопления данных о применении рекомендации можно рассчитывать сделать следующий шаг по унификации доверительных вероятностей для каждой из областей метрологии.

Иногда по полученным экспериментальным данным нужно оценить границы, в которых могут находиться последующие наблюдения. Эти границы определяют так называемый толерантный интервал, т. е. интервал, накрывающий с заданной вероятностью заданную долю реализаций случайной величины. Для решения этой задачи в рекомендации приведена таблица из РТМ44-62 и расчетная формула из работы [7].

Проверка однородности групп наблюдений. Наряду с простейшим случаем, когда при измерении получают одну группу наблюдений, иногда в метрологической практике для получения большей достоверности результатов измерения выполняют в несколько этапов, проводимых в разное время. Каждый этап дает группу наблюдений. Методика вычисления результатов по данным всех групп зависит от того, равнорассеянные эти группы или неравнорассеянные. Результат измерения в целом можно считать надежным лишь тогда, когда оценки средних арифметических групп, а также оценки средних квадратических отклонений наблюдений этих групп несущественно (в статистическом смысле) отличаются друг от друга. В этом случае группы наблюдений можно назвать устойчивыми или статистически подконтрольными.

Статистическую подконтрольность проверяют при помощи дисперсионного анализа Фишера, критериев Бартлетта и Аббе.

Встречаются также случаи, когда необходимо сравнить результаты измерений, выполненных в различных местах и разными методами и средствами. Эта задача возникает при определении совместимости результатов измерений и выявлении присущих им систематических погрешностей. В рекомендации предусмотрены методы решения этой задачи.

Вычисление результата измерения и характеристик его точности по данным нескольких групп. В рекомендации показано, как найти результат измерения и оценку его дисперсии для равнорассеянных и неравнорассеянных групп наблюдений. Особенность формул, рекомендуемых для оценки дисперсии взвешенного среднего, состоит в том, что они содержат в себе члены, зависящие и от рассеивания средних арифметических групп.

Систематические погрешности. Обнаружение и устранение систематических погрешностей обычно составляет основные трудности в работе метрологов. Этому вопросу в рекомендации уделено большое внимание.

Классификация систематических погрешностей и общие методы их устранения приведены в основном по М. Ф. Маликову [6]. Кроме того, рассмотрены случаи, когда систематические погрешности можно обнаружить с помощью регрессионного или корреляционного анализов, а также уменьшить путем уравновешивания результатов с помощью метода наименьших квадратов.

После того как систематические погрешности оценены и на них выведены поправки, остаются неисключенные их остатки. В метрологической практике принято считать, что остатки систематических погрешностей имеют равновероятное распределение [11]. Исходя из этого постулата, границы систематической погрешности результата измерения можно оценить, пользуясь формулой

$$\Theta = k_{\Sigma} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Theta_i^2},$$

где Θ — граница систематической погрешности результата измерения;

k_{Σ} — коэффициент, зависящий от принятой для оценки систематической погрешности доверительной вероятности α.

Θ_i — граница остатка i-й систематической погрешности.

Значения коэффициента k_{Σ} приведены в помещенной ниже таблице, обоснование которой приведено в статье [12].

Число слагаемых n	Значение коэффициента k_{Σ} при доверительной вероятности			
	0,90	0,95	0,99	0,9973
2	0,97	1,10	1,27	1,34
3	0,96	1,12	1,37	1,50
4	x*	1,12	1,41	1,58
5	x*	—	1,42	1,61
6	x*	—	—	1,64
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
∞	0,95	1,13	1,49	1,73

*) В связи с медленным изменением коэффициента k_{Σ} его значение не было вычислено.

Данные таблицы показывают, что коэффициент k_{Σ} зависит от доверительной вероятности, но на него мало влияет число слагаемых. Для рассматриваемой задачи доверительную вероятность вряд ли следует принимать большей 0,99. При этом с погрешностью, не превышающей 10%, коэффициенту k_{Σ} можно придать фиксированные значения, зависящие лишь от доверительной вероятности. Эти значения коэффициента для наиболее употребительных уровней доверительной вероятности приведены в табл. 7, 8 рекомендации.

Точность результата измерения. Помимо границ систематической погрешности результата и характеристик его случайной погрешности, во многих практических задачах встречается необходимость указать общую погрешность результата измерения.

Результат каждого измерения можно рассматривать как один из членов множества аналогичных результатов, которые могли быть получены при сохранении метода и условий измерения, но при использовании различных средств измерений номинально той же точности. Систематическая погрешность каждого результата совокупности таких измерений является случайной величиной. Поэтому общую погрешность результата можно вычислить как границу доверительного интервала композиции распределений систематических и случайных погрешностей. Для полученной таким образом общей погрешности результата измерения в рекомендации в соответствии с ГОСТ 16263-70 «Метрология. Термины и определения» принят термин «доверительная погрешность результата измерения».

Доверительную погрешность результата измерения можно вычислить по формуле

$$\Delta = (t_q)_\Sigma \cdot S_\Sigma ,$$

где $(t_q)_\Sigma$ — коэффициент, соответствующий q-процентному уровню для композиции указанных распределений;

S_Σ — оценка среднего квадратического отклонения суммы случайных и остатка систематических погрешностей.

Оценку S_Σ находят по формуле

$$S_\Sigma = \sqrt{S^2_\theta + S^2_{\bar{x}}} ,$$

где S_θ — оценка среднего квадратического отклонения суммы неисключенных остатков систематических погрешностей:

$$S_\theta = \sqrt{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} \Theta_i^2} ;$$

$S_{\bar{x}}$ — оценка среднего квадратического отклонения среднего арифметического.

Для вычисления коэффициента $(t_q)_\Sigma$ рекомендуется эмпирическая формула [12].

$$(t_q)_\Sigma = \frac{(t_q)_{\bar{x}} \cdot S_{\bar{x}} + \Theta}{S_{\bar{x}} + S_\theta} ,$$

где $(t_q)_{\bar{x}}$ — q-процентная точка распределения Стьюдента.

Доверительная вероятность для вычисления Θ и определения $(t_q)_{\bar{x}}$ должна быть одной и той же.

Погрешность от применения приведенной формулы для композиции равновероятного и нормального распределений достигает 12% при доверительной вероятности $\alpha=0{,}99$ и $\Theta/\sigma\approx1{,}5$. При других соотношениях между Θ и σ, а также по мере снижения доверительной вероятности и приближения распределения систематической погрешности к нормальному эта погрешность уменьшается.

Заметим, что случайные погрешности среднего арифметического имеют асимптотически нормальное распределения, а распределение систематической погрешности зависит от числа слагаемых и изменяется от равновероятного (если систематическая погрешность имеет только одну составляющую) до близкого к нормальному (если составляющих больше четырех и они примерно равны).

Написание результата измерения предусмотрено в двух вариантах, так как необходимо различать измерения, где измерение некоторой величины является конечной целью, от тех случаев, когда получаемые результаты необходимы для последующих вычислений или анализа. В первом случае достаточно знать общую погрешность результата, во втором должны быть известны характеристики составляющих погрешности измерения, т. е. $S_{\bar{x}}$ и Θ, число выполненных при измерении наблюдений, а также доверительная вероятность, принятая при оценке Θ.

Текст рекомендаций снабжен примерами, взятыми, как правило, из практики.

В каждом разделе рекомендации сформулированы решаемые задачи и даны необходимые расчетные формулы. Однако вывод этих формул для практического применения рекомендации не нужен и поэтому не приведен.

Разделы 1—2 и 4—7 рекомендации написаны К. А. Резником, разделы 3 и 8, а также пп. 2.5, 6.6 и 7.7 — Ж. Ф. Кудряшовой. Разработка рекомендации выполнена под руководством С. Г. Рабиновича.

Промежуточные варианты рекомендации подвергались широкому обсуждению специалистов ВНИИМ и других метрологических институтов.

Ряд полезных замечаний, которые учтены в публикуемой рекомендации, сделали А. М. Каган, К. П. Широков, Е. Ф. Долинский, Л. К. Каяк, В. С. Пеллинец, Г. С. Симкин.

ЛИТЕРАТУРА

1. РТМ 44—62. Методика статистической обработки эмпирических данных. Издательство стандартов, 1966.

2. Безикович Я. С. Приближенные вычисления. Гостехиздат, 1949.

3. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы метематической статистики. «Наука», 1965.

4. Кендалл М. Дж., Стюарт А. Теория распределений. «Наука», 1966.

5. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. Физматгиз, 1962.

6. Маликов М. Ф. Основы метрологии. Комитет по делам мер и измерительных приборов при СМ СССР, 1949.

7. Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. «Наука», 1965.

8. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями. Изд-во иностр. л-ры, 1965.

9. Чеботарев А. С. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей. Геодезиздат, 1958.

10. Идельсон Н. И. Способ наименьших квадратов и теория математической обработки наблюдений. Геодезиздат, 1947.

11. Рабинович Б. Е. Методика суммирования частных погрешностей в области радиотехнических измерений. Труды институтов Комитета, вып. 57 (117), Стандартгиз, 1962.

12. Рабинович С. Г. Методика вычисления погрешности результата измерения. «Метрология», 1970, № 1.

Поступила в редакцию 24.IX-1970 г.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Значения $(x_{i0}^*)^4 \cdot f_i$ для вычислений четвертых моментов

f_i	$x_{i0}^*=2$	$x_{i0}^*=3$	$x_{i0}^*=4$	$x_{i0}^*=5$	$x_{i0}^*=6$	$x_{i0}^*=7$	$x_{i0}^*=8$	$x_{i0}^*=9$	$x_{i0}^*=11$	$x_{i0}^*=12$
1	16	81	256	625	1 296	2 401	4 096	6 561	14 641	20 736
2	32	162	512	1 250	2 592	4 802	8 192	13 122	29 282	41 472
3	48	243	768	1 875	3 888	7 203	12 288	19 683	43 923	62 208
4	64	324	1 024	2 500	5 184	9 604	16 384	26 244	58 564	82 944
5	80	405	1 280	3 125	6 480	12 005	20 480	32 805	73 205	103 680
6	96	486	1 536	3 750	7 776	14 406	24 576	39 366	87 846	124 416
7	112	567	1 792	4 375	9 072	16 807	28 672	45 927	102 487	145 152
8	128	648	2 048	5 000	10 368	19 208	32 768	52 488	117 128	165 888
9	144	729	2 304	5 625	11 664	21 609	36 864	59 049	131 769	186 624
10	160	810	2 560	6 250	12 960	24 010	40 960	65 610	146 410	207 360
11	176	891	2 816	6 875	14 256	26 411	45 056	72 171	161 051	228 096
12	192	972	3 072	7 500	15 552	28 812	49 152	78 732	175 692	248 832
13	208	1 053	3 328	8 125	16 848	31 213	53 248	85 293	190 333	269 568
14	224	1 134	3 584	8 750	18 144	33 614	57 344	91 854	204 974	290 304
15	240	1 215	3 840	9 375	19 440	36 015	61 440	98 415	219 615	311 040
16	256	1 296	4 096	10 000	20 736	38 416	65 536	104 976	234 256	331 776
17	272	1 377	4 352	10 625	22 032	40 817	69 632	111 537	248 897	352 512
18	288	1 458	4 608	11 250	23 328	43 218	73 728	118 098	263 538	373 248
19	304	1 539	4 864	11 875	24 624	45 619	77 824	124 659	278 179	393 984
20	320	1 620	5 120	12 500	25 920	48 020	81 920	131 220	292 820	414 720
21	336	1 701	5 376	13 125	27 216	50 421	86 016	137 781	307 461	435 456
22	352	1 782	5 632	13 750	28 512	52 822	90 112	144 342	322 102	456 192
23	368	1 863	5 888	14 375	29 808	55 223	94 208	150 903	336 743	476 928
24	384	1 944	6 144	15 000	31 104	57 624	98 304	157 464	351 384	497 664
25	400	2 025	6 400	15 625	32 400	60 025	102 400	164 025	366 025	518 400
26	416	2 106	6 656	16 250	33 696	62 426	106 496	170 586	380 666	539 136

Приложение 1
продолжение

27	432	2 187	6 912	16 875	34 992	64 827	110 592	177 147	395 307	559 872
28	448	2 268	7 168	17 500	36 288	67 228	114 688	183 708	409 948	580 608
29	464	2 349	7 424	18 125	37 584	69 629	118 784	190 269	424 589	601 344
30	480	2 430	7 680	18 750	38 880	72 030	122 880	196 830	439 230	622 080
31	496	2 511	7 936	19 375	40 176	74 431	126 976	203 391	453 871	642 816
32	512	2 592	8 192	20 000	41 472	76 832	131 072	209 952	468 512	663 552
33	528	2 673	8 448	20 625	42 768	79 233	135 168	216 513	483 153	684 288
34	544	2 754	8 704	21 250	44 064	81 634	139 264	223 074	497 794	705 024
35	560	2 835	8 960	21 875	45 360	84 035	143 360	229 635	512 435	725 760
36	576	2 916	9 216	22 500	46 656	86 436	147 456	236 196	527 076	746 496
37	592	2 997	9 472	23 125	47 952	88 837	151 552	242 757	541 717	767 232
38	608	3 078	9 728	23 750	49 248	91 238	155 648	249 318	556 358	787 968
39	624	3 159	9 984	24 375	50 544	93 639	159 744	255 879	570 999	808 704
40	640	3 240	10 240	25 000	51 840	96 040	163 840	262 440	585 640	829 440
41	656	3 321	10 496	25 625	53 136	98 441	167 936	269 001	600 281	850 176
42	672	3402	10 752	26 250	54 432	100 842	172 032	275 562	614 922	870 912
43	688	3 483	11 008	26 875	55 728	103 243	176 128	282 123	629 563	891 648
44	704	3 564	11 264	27 500	57 024	105 644	180 224	288 684	644 204	912 384
45	720	3 645	11 520	28 125	58 320	108 045	184 320	295 245	658 845	933 120
46	736	3 726	11 776	28 750	59 616	110 446	188 416	301 806	673 486	953 856
47	752	3 807	12 032	29 375	60 912	112 847	192 512	308 367	688 127	974 592
48	768	3 888	12 288	30 000	62 208	115 248	196 608	314 928	702 768	995 328
49	784	3 969	12 544	30 625	63 504	117 649	200 704	321 489	717 409	1 016 064
50	800	4 050	12 800	31 250	64 800	120 050	204 800	328 050	732 050	1 036 800

Статистика $d = \Sigma\,[x_i - x]/nS^*$

Объем выборки n	Процентные точки распределения						$M(d)$	$\sqrt{D(d)}$
	при $q/2$			при $1-q/2$				
	1%	5%	10%	90%	95%	99%		
11	0,9359	0,9073	0,8899	0,7409	0,7153	0,6675	0,81805	0,05784
16	9137	8884	8733	7452	7236	6829	81128	04976
21	9001	8768	8631	7495	7304	6950	80792	04419
26	8901	8686	8570	7530	7360	7040	80590	04011
31	8827	8625	8511	7559	7404	7110	80456	03697
36	8769	8578	8468	7583	7440	7167	80360	03447
41	8722	8540	8436	7604	7470	7216	80289	03241
46	8682	8508	8409	7621	7496	7256	80233	03068
51	8648	8481	8385	7636	7518	7291	80188	02919
61	0,8592	0,8434	0,8349	0,7662	0,7554	0,7347	0,80122	0,02678
71	8549	8403	8321	7683	7583	7393	80074	02487
81	8515	8376	8298	7700	7607	7430	80038	02332
91	8484	8353	8279	7714	7626	7460	80010	02203
101	8460	8344	8264	7726	7644	7487	79988	02094
201	0,8322	0,8229	0,8178	0,7796	0,7738	0,7629	0,79688	0,01491
301	8260	8183	8140	7828	7781	7693	79855	01220
401	8223	8155	8118	7847	7807	7731	79838	01058
501	8198	8136	8103	7861	7825	7757	79828	00947
601	8179	8123	8092	7873	7838	7776	79822	00865
701	8164	8112	8084	7878	7848	7791	79817	00801
801	8152	8103	8077	7885	7857	7803	79813	00749
901	8142	8096	8071	7890	7864	7814	79811	00707
1001	8134	8090	8066	7894	7869	7822	79808	00670

Нормированная функция Лапласа

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-x^2/2} d_z$$

z	Сотые доли z									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670

Приложение 3
продолжение

2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861

3,0	0,49865	3,1	49903	3,2	49931	3,3	49952	3,4	49966
3,5	49977	3,6	49984	3,7	49989	3,8	49993	3,9	49995
4,0	499968								
4,5	499997								
5,0	49999997								

Значения доверительной вероятности α из уравнения

$$1-\sum_{\kappa=0}^{m} C_n^{\kappa}\,(1-\alpha)^{\kappa}\cdot\alpha^{n-\kappa}=q$$

n	m	Значения α при q		
		0,01	0,02	0,05
10	1	0,98	0,98	0,96
11	1	99	98	97
12	1	99	98	97
13	1	99	98	97
14	1	99	98	97
15	1	99	99	98
16	1	99	99	98
17	1	99	99	98
18	1	99	99	98
19	1	99	99	98
20	1	99	99	98
21	2	98	97	96
22	2	98	97	96
23	2	98	98	96
24	2	98	98	97
25	2	98	98	97
26	2	98	98	97
27	2	98	98	97
28	2	99	98	97
29	2	99	98	97
30	2	99	98	97
31	2	99	98	97
32	2	99	98	97
33	2	99	98	98
34	2	99	98	98
35	2	99	98	98
36	2	99	99	98
37	2	99	99	98
38	2	99	99	98
39	2	99	99	98
40	2	99	99	98
41	2	99	99	98
42	2	99	99	98
43	2	99	99	98
44	2	99	99	98
45	2	99	99	98
46	2	99	99	98
47	2	99	99	98
48	2	99	99	98
49	2	99	99	98

Плотность вероятности нормированного нормального распределения

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}$$

z	Сотые доли z									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551

Приложение 5
продолжение

2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0005	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 6

Значения q процентных точек для χ^2-распределения

Число степеней свободы, k	Вероятность P $(\chi^2 > \chi^2)$, %									
	99,9	99,0	98,0	97,5	95,0	90,0	80,0	75,0	70,0	50,0
1	0,000002	0,00016	0,00063	0,00098	0,00393	0,0158	0,0642	0,102	0,148	0,455
2	0,00200	0,0201	0,0404	0,0506	0,103	0,211	0,446	0,575	0,713	1,386
3	0,0243	0,115	0,185	0,216	0,352	0,584	1,005	1,213	1,424	2,366
4	0,0908	0,297	0,429	0,484	0,711	1,064	1,649	1,923	2,195	3,357
5	0,210	0,554	0,752	0,831	1,145	1,610	2,343	2,675	3,000	4,351
6	0,381	0,872	1,134	1,237	1,635	2,204	3,070	3,455	3,828	5,348
7	0,598	1,239	1,564	1,690	2,167	2,833	3,822	4,255	4,671	6,346
8	0,857	1,646	2,032	2,180	2,733	3,490	4,594	5,071	5,527	7,344
9	1,152	2,088	2,532	2,700	3,325	4,168	5,380	6,899	6,393	8,343
10	1,479	2,558	3,059	3,247	3,940	4,865	6,179	6,737	7,267	9,342
11	1,834	3,053	3,609	3,816	4,575	5,578	6,989	7,584	8,148	10,341
12	2,214	3,571	4,178	4,404	5,226	6,304	7,807	8,438	9,034	11,340
13	2,617	4,107	4,765	5,009	5,892	7,042	8,634	9,299	9,926	12,340
14	3,041	4,660	5,368	5,629	6,571	7,790	9,467	10,165	10,821	13,339
15	3,483	5,229	5,985	6,262	7,261	8,547	10,307	11,036	11,721	14,339

Продолжение приложения 6

16	3,942	5,812	6,614	6,908	7,962	9,312	11,152	11,912	12,624	15,338
17	4,416	6,408	7,255	7,564	8,672	10,085	12,002	12,792	13,531	16,338
18	4,905	7,015	7,906	8,231	9,390	10,865	12,857	13,675	14,440	17,338
19	5,407	7,633	8,567	8,907	10,117	11,651	13,716	14,562	15,352	18,338
20	5,921	8,260	9,237	9,591	10,851	12,443	14,578	15,452	16,266	19,337
21	6,447	8,897	9,915	10,283	11,591	13,240	15,445	16,344	17,182	20,337
22	6,983	9,542	10,600	10,982	12,338	14,041	16,314	17,240	18,101	21,337
23	7,529	10,196	11,293	11,688	13,091	14,848	17,187	18,137	19,021	22,337
24	8,085	10,856	11,992	12,401	13,848	15,659	18,062	19,037	19,943	23,337
25	8,649	11,524	12,697	13,120	14,611	16,473	18,940	19,939	20,867	24,337
26	9,222	12,198	13,409	13,844	15,379	17,292	19,820	20,843	21,792	25,336
27	9,803	12,879	14,125	14,573	16,151	18,114	20,703	21,749	22,719	26,336
28	10,391	13,565	14,847	15,308	16,928	18,939	21,588	22,657	23,647	27,336
29	10,986	14,256	15,574	16,047	17,708	19,768	22,475	23,567	24,577	28,336
30	11,588	14,953	16,306	16,791	18,493	20,599	23,364	24,478	25,508	29,336

Продолжение приложения 6

Число степеней свободы k	Вероятность $P(\chi^2 > \chi_q^2)$, %								
	30,0	25,0	20,0	10,0	5,0	2,5	2,0	1,0	0,5
1	1,074	1,323	1,642	2,706	3,841	5,024	5,412	6,635	7,879
2	2,408	2,773	3,219	4,605	5,991	7,378	7,824	9,210	10,597
3	3,665	4,108	4,642	6,251	7,815	9,348	9,837	11,345	12,838
4	4,878	5,385	5,989	7,779	9,488	11,143	11,668	13,277	14,860
5	6,064	6,626	7,289	9,236	11,070	12,832	13,388	15,086	16,750
6	7,231	7,841	8,558	10,645	12,592	14,449	15,033	16,812	18,548
7	8,383	9,037	9,803	12,017	14,067	16,013	16,622	18,475	20,278
8	9,524	10,219	11,030	13,362	15,507	17,535	18,168	20,090	21,955
9	10,656	11,389	12,242	14,684	16,919	19,023	19,679	21,666	23,589
10	11,781	12,549	13,442	15,987	18,307	20,483	21,161	23,209	25,188
11	12,899	13,701	14,631	17,275	19,675	21,920	22,618	24,725	26,757
12	14,011	14,845	15,812	18,549	21,026	23,337	24,054	26,217	28,300
13	15,119	15,984	16,985	19,812	22,362	24,736	25,472	27,688	29,819
14	16,222	17,117	18,151	21,064	23,685	26,119	26,873	29,141	31,319
15	17,322	18,245	19,311	22,307	24,996	27,488	28,259	30,578	32,801

Продолжение приложения 6

16	18,418	19,369	20,465	23,542	26,296	28,845	29,633	32,000	34,267
17	19,511	20,489	21,615	24,769	27,587	30,191	30,995	33,409	35,718
18	20,601	21,605	22,760	25,989	28,869	31,526	32,346	34,805	37,156
19	21,689	22,718	23,900	27,204	30,144	32,852	33,687	36,191	38,582
20	22,775	23,828	25,038	28,412	31,410	34,170	35,020	37,566	39,997
21	23,858	24,935	26,171	29,615	32,671	35,479	36,343	38,932	41,401
22	24,939	26,039	27,301	30,813	33,924	36,781	37,659	40,289	42,796
23	26,018	27,141	28,429	32,007	35,172	38,076	38,968	41,638	44,181
24	27,096	28,241	29,553	33,196	36,415	39,364	40,270	42,980	45,558
25	28,172	29,339	30,675	34,382	37,652	40,646	41,566	44,314	46,928
26	29,246	30,434	31,795	35,563	38,885	41,923	42,856	45,642	48,290
27	30,319	31,528	32,912	36,741	40,113	43,194	44,140	46,963	49,645
28	31,391	32,620	34,027	37,916	41,337	44,461	45,419	48,278	50,993
29	32,461	33,711	35,139	39,087	42,557	45,722	46,693	49,588	52,336
30	33,530*	34,800	36,250	40,256	43,773	46,979	47,962	50,892	53,672

Приложение 7

Значения q-процентных точек для распределения Стьюдента

Число степеней свободы $k=n-1$	$q_\% = 1-\alpha_\%$								
	10,0	5,0	2,5	2,0	1,0	0,5	0,3	0,2	0,1
1	6,314	12,706	25,452	31,821	63,657	127,3	212,2	318,3	636,6
2	2,920	4,303	6,205	6,965	9,925	14,089	18,216	22,327	31,600
3	2,353	3,182	4,177	4,541	5,841	7,453	8,891	10,214	12,922
4	2,132	2,776	3,495	3,747	4,604	5,597	6,435	7,173	8,610
5	2,015	2,571	3,163	3,365	4,032	4,773	5,376	5,893	6,869
6	1,943	2,447	2,969	3,143	3,707	4,317	4,800	5,208	5,959
7	1,895	2,365	2,841	2,998	3,499	4,029	4,442	4,785	5,408
8	1,860	2,306	2,752	2,896	3,355	3,833	4,199	4,501	5,041
9	1,833	2,262	2,685	2,821	3,250	3,690	4,024	4,297	4,781
10	1,812	2,228	2,634	2,764	3,169	3,581	3,892	4,144	4,587
12	1,782	2,179	2,560	2,681	3,055	3,428	3,706	3,930	4,318
14	1,761	2,145	2,510	2,624	2,977	3,326	3,583	3,787	4,140
16	1,746	2,120	2,473	2,583	2,921	3,252	4,494	3,686	4,015
18	1,734	2,101	2,445	2,552	2,878	3,193	3,428	3,610	3,922
20	1,725	2,086	2,423	2,528	2,845	3,153	3,376	3,552	3,849
22	1,717	2,074	2,405	2,508	2,819	3,119	3,335	3,505	3,792
24	1,711	2,064	2,391	2,492	2,797	3,092	3,302	3,467	3,745
26	1,706	2,056	2,379	2,479	2,779	3,067	3,274	3,435	3,704
28	1,701	2,048	2,369	2,467	2,763	3,047	3,250	3,408	3,674
30	1,697	2,042	2,360	2,457	2,750	3,030	3,230	3,386	3,646
∞	1,645	1,960	2,241	2,326	2,576	2,807	2,968	3,090	3,291

Значение коэффициента K для определения толерантных интервалов

$k=n-1$ число степеней свободы	$\alpha=0{,}9$			$\alpha=0{,}95$			$\alpha=0{,}99$		
	P_0			P_0			P_0		
	0,9973	0,95	0,9	0,9973	0,95	0,9	0,9973	0,95	0,9
4	6,76	4,18	3,51	8,26	5,11	4,29	12,80	7,92	6,64
5	6,07	3,74	3,14	7,17	4,44	3,72	10,31	6,38	5,35
6	5,60	3,47	2,91	6,50	4,02	3,38	8,91	5,51	4,62
7	5,80	3,27	2,75	6,05	3,74	3,14	8,01	4,95	4,15
8	5,07	3,13	2,63	5,72	3,54	2,97	7,38	4,56	3,83
9	4,89	3,02	2,54	5,46	3,39	2,84	6,91	4,27	3,59
10	4,75	2,94	2,47	5,28	3,26	2,74	6,55	4,05	3,40
12	4,54	2,81	2,36	4,99	3,08	2,59	6,03	3,73	3,13
14	4,39	2,72	2,28	4,78	2,96	2,49	5,67	3,52	2,95
16	4,28	2,65	2,22	4,62	2,86	2,40	5,41	3,35	2,81
18	4,19	2,59	2,17	4,50	2,79	2,34	5,21	3,22	2,70
20	4,11	2,54	2,14	4,39	2,72	2,29	5,05	3,12	2,62
25	3,98	2,46	2,07	4,20	2,61	2,19	4,76	2,94	2,47
30	3,80	2,40	2,02	4,10	2,54	2,13	4,57	2,82	2,37
40	3,78	2,33	1,95	3,94	2,44	2,05	4,31	2,67	2,24
50	3,69	2,28	1,91	3,84	2,37	1,99	4,15	2,57	2,16
60	3,63	2,25	1,89	3,76	2,33	1,96	4,05	2,50	2,10
70	3,59	2,22	1,86	3,70	2,30	1,93	3,96	2,45	2,06
80	3,55	2,20	1,85	3,66	2,27	1,91	3,90	2,41	2,02
90	3,53	2,18	1,83	3,63	2,25	1,89	3,84	2,38	2,00
100	3,51	2,17	1,82	3,60	2,23	1,87	3,80	2,35	1,98
200	3,40	2,10	1,76	3,47	2,14	1,80	3,59	2,22	1,87
300	3,35	2,07	1,74	3,41	2,11	1,77	3,50	2,17	1,82
400	3,32	2,06	1,73	3,37	2,08	1,75	3,45	2,14	1,79
500	3,30	2,05	1,72	3,35	2,07	1,74	3,41	2,12	1,78
600	3,29	2,04	1,71	3,33	2,06	1,73	3,39	2,10	1,76
800	3,27	2,03	1,70	3,30	2,05	1,72	3,36	2,08	1,75
1000	3,26	2,02	1,70	3,29	2,04	1,71	3,33	2,07	1,74

Приложение 9

Значения верхних пяти- и однопроцентных точек распределения Фишера (F)

κ_2	Число степеней свободы κ_1											
	1	2	3	4	5	6	8	12	16	24	50	∞
	Пятипроцентные точки ($q/2=5\%$)											
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	246,5	249,0	251,8	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,43	19,45	19,47	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,69	8,64	8,58	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,84	5,77	5,70	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,60	4,53	4,44	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,92	3,84	3,75	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,49	3,41	3,32	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,20	3,12	3,03	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,98	2,90	2,80	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,82	2,74	2,64	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,70	2,61	2,50	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,60	2,50	2,40	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,51	2,42	2,32	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,44	2,35	2,24	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,39	2,29	2,18	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,33	2,24	2,13	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,29	2,19	2,08	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,25	2,15	2,04	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,21	2,11	2,00	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,18	2,08	1,96	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,15	2,05	1,93	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,13	2,03	1,91	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,11	2,00	1,88	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	2,09	1,98	1,86	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	2,07	1,96	1,84	1,71

Продолжение приложения 9

26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	2,05	1,95	1,82	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	2,03	1,93	1,80	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	2,02	1,91	1,78	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	2,00	1,90	1,77	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,99	1,89	1,76	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,94	1,83	1,70	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,90	1,79	1,66	1,51
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,87	1,76	1,63	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,85	1,74	1,60	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,81	1,70	1,56	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,79	1,67	1,53	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,77	1,65	1,51	1,32
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,76	1,64	1,49	1,30
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,75	1,63	1,48	1,28
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,72	1,60	1,45	1,25
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,82	1,71	1,59	1,44	1,22
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,80	1,69	1,57	1,42	1,19
300	3,87	3,03	2,64	2,41	2,25	2,13	1,97	1,79	1,68	1,55	1,39	1,15
400	3,86	3,02	2,63	2,40	2,24	2,12	1,96	1,78	1,67	1,54	1,38	1,13
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	1,96	1,77	1,66	1,54	1,38	1,11
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	1,95	1,76	1,65	1,53	1,36	1,08
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,64	1,52	1,35	1,00

Продолжение приложения 9

κ_2	Число степеней свободы κ_1											
	1	2	3	4	5	6	8	12	16	24	50	∞
	Однопроцентные точки $(q/2=1\%)$											
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5981	6106	6169	6234	6302	6366
2	98,49	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,42	99,44	99,46	99,48	99,50
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,49	27,05	26,83	26,60	26,35	26,12
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,80	14,37	14,15	13,93	13,69	13,46
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,29	9,89	9,68	9,47	9,24	9,02
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,10	7,72	7,52	7,31	7,09	6,88
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,84	6,47	6,27	6,07	5,85	5,65
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,03	5,67	5,48	5,28	5,06	4,86
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,47	5,11	4,92	4,73	4,51	4,31
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,06	4,71	4,52	4,33	4,12	3,91
11	9,65	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,74	4,40	4,21	4,02	3,80	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,50	4,16	3,98	3,78	3,56	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,30	3,96	3,78	3,59	3,37	3,16
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,14	3,80	3,62	3,43	3,21	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,00	3,67	3,48	3,29	3,07	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	3,89	3,55	3,37	3,18	2,96	2,75
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,79	3,45	3,27	3,08	2,86	2,65
18	8,28	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,71	3,37	3,20	3,00	2,79	2,57
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,63	3,30	3,12	2,92	2,70	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,56	3,23	3,05	2,86	2,63	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,51	3,17	2,99	2,80	2,58	2,36
22	7,94	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,45	3,12	2,94	2,75	2,53	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,41	3,07	2,89	2,70	2,48	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,36	3,03	2,85	2,66	2,44	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,32	2,99	2,81	2,62	2,40	2,17
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,29	2,96	2,78	2,58	2,36	2,13
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,26	2,93	2,74	2,55	2,33	2,10
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,23	2,90	2,71	2,52	2,30	2,06

Продолжение приложения 9

29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,20	2,87	2,68	2,49	2,27	2,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,17	2,84	2,66	2,47	2,24	2,01
35	7,42	5,27	4,40	3,91	3,59	3,37	3,07	2,74	2,56	2,37	2,13	1,90
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	2,99	2,66	2,48	2,29	2,05	1,80
45	7,23	5,11	4,25	3,77	3,45	3,23	2,94	2,61	2,43	2,23	1,99	1,75
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	2,89	2,56	2,38	2,18	1,94	1,68
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,82	2,50	2,32	2,12	1,87	1,60
70	7,01	4,92	4,07	3,60	3,29	3,07	2,78	2,45	2,28	2,07	1,82	1,53
80	6,96	4,88	4,04	3,56	3,26	3,04	2,74	2,42	2,24	2,03	1,78	1,49
90	6,92	4,85	4,01	3,53	3,23	3,01	2,72	2,39	2,21	2,00	1,75	1,45
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,69	2,37	2,19	1,98	1,73	1,43
125	6,84	4,78	3,94	3,47	3,17	2,95	2,66	2,33	2,15	1,94	1,69	1,37
150	6,81	4,75	3,91	3,45	3,14	2,92	2,63	2,31	2,13	1,92	1,66	1,33
200	6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,89	2,60	2,28	2,09	1,88	1,62	1,28
300	6,72	4,68	3,85	3,38	3,08	2,86	2,57	2,24	2,06	1,85	1,59	1,22
400	6,70	4,66	3,83	3,37	3,06	2,85	2,56	2,23	2,04	1,84	1,57	1,19
500	6,69	4,65	3,82	3,36	3,05	2,84	2,55	2,22	2,03	1,83	1,56	1,16
1000	6,66	4,63	3,80	3,34	3,04	2,82	2,53	2,20	2,01	1,81	1,54	1,11
∞	6,64	4,60	3,78	3,32	3,02	2,80	2,51	2,18	1,99	1,79	1,52	1,00

Значения статистики критерия Аббе ν

Число групп L	Уровень значимости q			Число групп L	Уровень значимости q		
	0,001	0,01	0,05		0,001	0,01	0,05
4	0,2949	0,3128	0,3902	32	0,4963	0,6089	0,7177
5	2080	2690	4102	33	5027	6141	7216
6	1817	2808	4451	34	5090	6193	7256
7	1848	3070	4680	35	5150	6242	7292
8	2018	3314	4912	36	5208	6290	7328
9	0,2210	0,3544	0,5121	37	0,5265	0,6337	0,7363
10	2408	3759	5311	38	5319	6381	7396
11	2598	3957	5482	39	5373	6425	7429
12	2778	4140	5638	40	5425	6467	7461
13	2949	4309	5778	41	5475	6506	7491
14	0,3112	0,4466	0,5908	42	0,5524	0,6548	0,7521
15	3266	4611	6027	43	5571	6587	7550
16	3413	4746	6137	44	5616	6622	7576
17	3552	4872	6237	45	5660	6659	7603
18	3684	4989	6330	46	5701	6693	7628
19	0,3809	0,5100	0,6417	47	0,5743	0,6727	0,7653
20	3926	5203	6498	48	5781	6757	7676
21	4037	5301	6574	49	5817	6787	7698
22	4142	5393	6645	50	5853	6814	7718
23	4241	5479	6713	51	5887	6842	7739
24	0,4334	0,5562	0,6776	52	0,5922	0,6869	0,7759
25	4423	5639	6836	53	5955	6896	7779
26	4509	5713	6893	54	5989	6924	7799
27	4591	5784	6946	55	6020	6949	7817
28	4670	5850	6996	56	6051	6974	7836
29	0,4748	0,5915	0,7046	57	0,6083	0,6999	0,7853
30	4822	5975	7091	58	6114	7024	7872
31	4895	6034	7136	59	6145	7049	7891
				60	6174	7071	7906

Значения процентных точек наибольшего по абсолютному значению нормированного выборочного отклонения

Число наблюдений n	Уровень значимости q%								
	0,05	0,1	0,2	0,5	1	2	5	10	20
3	1,414	1,414	1,414	1,414	1,414	1,414	1,414	1,412	1,406
4	1,732	1,732	1,731	1,730	1,728	1,723	1,710	1,689	1,645
5	1,996	1,994	1,990	1,982	1,972	1,955	1,917	1,869	1,791
6	2,219	2,212	2,203	2,183	2,161	2,130	2,067	1,996	1,894
7	2,408	2,395	2,377	2,344	2,310	2,265	2,182	2,093	1,974
8	2,568	2,547	2,521	2,476	2,431	2,374	2,273	2,172	2,041
9	2,704	2,677	2,643	2,586	2,532	2,464	2,349	2,238	2,097
10	2,822	2,788	2,747	2,680	2,616	2,540	2,414	2,294	2,146
11	2,925	2,884	2,837	2,760	2,689	2,606	2,470	2,343	2,190
12	3,015	2,969	2,915	2,830	2,753	2,663	2,519	2,387	2,229
13	3,096	3,044	2,984	2,892	2,809	2,713	2,563	2,426	2,264
14	3,167	3,111	3,046	2,947	2,859	2,759	2,602	2,461	2,297
15	3,232	3,171	3,102	2,997	2,905	2,800	2,638	2,494	2,327
16	3,290	3,225	3,152	3,042	2,946	2,837	2,670	2,523	2,354
17	3,343	3,274	3,198	3,083	2,983	2,871	2,701	2,551	2,380
18	3,392	3,320	3,240	3,120	3,017	2,903	2,728	2,577	2,404
19	3,437	3,361	3,278	3,155	3,049	2,932	2,754	2,601	2,426
20	3,478	3,400	3,314	3,187	3,079	2,959	2,779	2,623	2,447
21	3,516	3,436	3,347	3,217	3,106	2,984	2,801	2,644	2,467
22	3,552	3,469	3,378	3,245	3,132	3,008	2,823	2,664	2,486
23	3,585	3,500	3,407	3,271	3,156	3,030	2,843	2,683	2,504
24	3,616	3,529	3,434	3,295	3,179	3,051	2,862	2,701	2,521

Продолжение приложения 11

25	3,646	3,556	3,459	3,318	3,200	3,071	2,880	2,718	2,537
26	3,673	3,582	3,483	3,340	3,220	3,089	2,897	2,734	2,553
27	3,606	3,60[illegible]	3,506	3,360	3,239	3,107	2,913	2,749	2,568
28	3,724	3,629	3,528	3,380	3,258	3,124	2,929	2,764	2,582
29	3,747	3,651	3,548	3,399	3,275	3,140	2,944	2,778	2,596
30	3,769	3,672	3,567	3,416	3,291	3,156	2,958	2,792	2,609
31	3,791	3,692	3,586	3,433	3,307	3,171	2,972	2,805	2,622
32	3,811	3,711	3,603	3,449	3,322	3,185	2,985	2,818	2,634
33	3,830	3,729	3,620	3,465	3,337	3,199	2,998	2,830	2,646
34	3,848	3,746	3,636	3,480	3,351	3,212	3,010	2,842	2,657
35	3,866	3,762	3,652	3,494	3,364	3,224	3,022	2,853	2,668
36	3,882	3,778	3,667	3,507	3,377	3,236	3,033	2,864	2,679
37	3,898	3,793	3,681	3,521	3,389	3,248	3,044	2,874	2,680
38	3,914	3,808	3,695	3,533	3,401	3,259	3,055	2,885	2,699
39	3,929	3,822	3,708	3,545	3,413	3,270	3,065	2,894	2,709
40	3,943	3,835	3,720	3,557	3,424	3,281	3,075	2,904	2,718
41	3,957	3,848	3,733	3,568	3,435	3,291	3,084	2,913	2,727
42	3,970	3,861	3,745	3,579	3,445	3,301	3,094	2,922	2,736
43	3,983	3,873	3,756	3,590	3,455	3,310	3,103	2,931	2,745
44	3,995	3,885	3,767	3,600	3,465	3,320	3,112	2,940	2,753
45	4,007	3,896	3,778	3,610	3,474	3,329	3,120	2,948	2,762
46	4,019	3,907	3,788	3,620	3,483	3,338	3,129	2,956	2,770
47	4,030	3,918	3,798	3,630	3,492	3,346	3,137	2,964	2,778
48	4,041	3,928	3,808	3,639	3,501	3,354	3,145	2,972	2,785
49	4,052	3,938	3,818	3,648	3,510	3,363	3,152	2,980	2,793
50	4,062	3,948	3,827	3,656	3,518	3,370	3,160	2,987	2,800
51	4,072	3,957	3,836	3,665	3,526	3,378	3,167	2,994	2,807
52	4,082	3,966	3,845	3,673	3,534	3,386	3,175	3,201	2,814

ПРОГРАММА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА ВНИИМ ПО ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ

Вычислительный центр ВНИИМ имеет программу, позволяющую вычислять ряд статических характеристик по данным наблюдений. При статистической обработке данных наблюдений по указанной программе могут быть последовательно вычислены:

1. Статистические характеристики группы наблюдений:
   а) среднее арифметическое данных наблюдений;
   б) оценка дисперсии группы наблюдений;
   в) оценка дисперсии среднего арифметического.

2. Статистические характеристики совокупности данных, состоящей из нескольких групп:
   а) совокупное среднее арифметическое;
   б) оценка дисперсии всей совокупности;
   в) оценка дисперсии совокупного среднего арифметического.

3. Значение критерия К. Пирсона χ^2, с помощью которого затем можно проверить соответствие исследуемого эмпирического распределения наперед заданному закону распределения и, в частности, нормальному закону.

4. Отношение оценки дисперсии к дисперсии последовательных разностей, по которому при помощи критерия Аббе проверяют допустимость различия средних арифметических групп.

Кроме того, имеется программа обработки данных наблюдений по методу наименьших квадратов.

Приложение 12

ПРОГРАММА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ПО ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ

[illegible] статистической обработки данных [illegible] программы, которая была последовательно выполнена.

1. [illegible]
   [illegible] данных наблюдений;
   б) анализ дисперсии группы наблюдений;
   в) [illegible]
2. Статистические характеристики [illegible] коэффициентов из нескольких групп:
   а) сравнение средних коэффициентов;
   б) сравнение дисперсий [illegible]
   [illegible]
3. Значение критерия К. Пирсона χ^2 [illegible]
4. [illegible]
5. [illegible]

СОДЕРЖАНИЕ

Приложения

УДК 53.08:519.2 (0,83,96)

РЕФЕРАТ

Рекомендация
по методам обработки результатов наблюдений при прямых измерениях

Ж. Ф. Кудряшова, С. Г. Рабинович, К. А. Резник

Труды метрологических институтов СССР, вып. 134 (194) 1972 г.

Даны основные математические методы вычисления результата измерения и характеристик его точности при прямых измерениях. Приведены необходимые для вычислений статистические таблицы.

Иллюстраций 2, библиографий 12 наименований, таблиц 30.

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ

Труды метрологических институтов СССР

Выпуск 134 (194)

Редактор **Н. Н. Александрова**
Техн. редактор **З. Г. Вагер**

Сдано в набор 28/VII-1971 г. М-13261 Подписано к печати 6/X-72 г.
Формат бумаги 60x90 1/16. Печ. л. 7,2 Уч. изд. л. 8,7
Тираж 2000 экз. Цена 78 коп. Зак. 4102.
Типография № 5 Ленгорисполкома

ИЗДАТЕЛЬСТВО СТАНДАРТОВ
Москва — Ленинград

УДК [illegible]

Реферат

[illegible]
[illegible]
[illegible]

[illegible]

Труды метрологических институтов СССР, вып. [illegible] ([illegible])

[illegible]

[illegible]

Методы обработки результатов [illegible] при испытаниях

Труды метрологических институтов СССР

Выпуск [illegible] ([illegible])

Редактор В. Н. [illegible]
Техн. редактор [illegible]

[illegible]
[illegible]
Тираж [illegible] Цена [illegible] Зак. [illegible]
[illegible]

[illegible]

Москва — Ленинград

Цена 78 коп.