

ВСЕСОЮЗНЫЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ МЕТРОЛОГИИ
ИМЕНИ Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

Справ.

ИССЛЕДОВАНИЯ
В ОБЛАСТИ НАДЕЖНОСТИ
СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЯ

ТРУДЫ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ СССР

Выпуск 173 (233)



5000



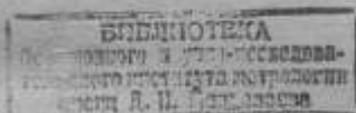
ВСЕСОЮЗНЫЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ МЕТРОЛОГИИ
им. Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ НАДЕЖНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЯ

ТРУДЫ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ СССР

Выпуск 173 (233)

Под редакцией
доктора технических наук
профессора *И. П. Падерно*



«ЭНЕРГИЯ»

Ленинградское отделение
1975

И $\frac{30306-166}{051(01)-75}$

© Всесоюзный научно-исследовательский институт метрологии им. Д. И. Менделеева (ВНИИМ), 1975

ПРЕДИСЛОВИЕ

Улучшение качества промышленной продукции, повышение ее надежности, эффективности и экономичности являются одними из важнейших проблем современного производства и находятся под постоянным контролем партии и правительства, о чем наглядно свидетельствуют решения XXIV съезда КПСС. Особенно важное значение на современном этапе развития приобретает проблема надежности средств измерений, от качества которых в конечном счете зависит качество всей выпускаемой промышленной продукции.

Решение указанных проблем в первую очередь связано с необходимостью развития научных основ теории надежности и инженерных методов расчета показателей надежности различных технических устройств.

Данный сборник посвящен исследованиям в области надежности средств измерений и является вторым выпуском, охватывающим ряд мало исследованных теоретических и практических вопросов.

Непрерывное усложнение современных средств измерений вызывает необходимость разработки ряда специальных теоретических вопросов, связанных с надежностью сложных систем. Новизна и малознучность этих вопросов пока еще не позволяют предложить универсальные инженерные методы для расчета показателей надежности таких систем, однако уже получены обнадеживающие результаты, часть которых приведена в данном сборнике.

Следует отметить, что под термином «сложная система» в сборнике понимаются как многоэлементные системы, характеризующиеся структурной сложностью, так и сравнительно малоэлементные системы, характеризующиеся функциональной сложностью. Указанное различие, связанное с особенностями формулирования состояния отказа, накладывает специфический отпечаток на методы решения соответствующих задач.

Большое значение при разработке и эксплуатации средств измерений имеют вопросы, связанные с исследованием постепенных отказов и сбоев. Эти вопросы пока еще недостаточно изучены и не рассматриваются в теории надежности. В связи с этим возникает необходимость тщательного исследования факторов, влияющих на стабильность средств измерений, и разработки методов, способствующих минимизации дрейфа их метрологических характеристик.

В первом разделе сборника изложены некоторые основные положения, относящиеся к вопросам определения показателей надежности различных типов сложных систем, основанного, главным образом, на методах марков-

ских и полумарковских процессов и теории графов, а также расчета показателей надежности с помощью ЭЦВМ.

Во втором разделе приводятся результаты исследований постепенных отказов (включая вопросы прогнозирования) и сбоев различных средств измерений.

В сборнике нашли отражение лишь некоторые вопросы надежности средств измерений. Среди других важнейших проблем в этой области, имеющих большое значение, но пока мало изученных, можно указать следующие: повышение надежности функционально-сложных систем, в частности, систем комплексного сбора и обработки информации; повышение ремонтпригодности и оптимизации процессов обслуживания; улучшение стабильности метрологических характеристик средств измерений; повышение надежности средств измерений за счет применения новых материалов и новых технологических процессов; технико-экономические вопросы (выбор критериев оценки, оптимизация показателей надежности, экономические обоснования новых разработок и т. д.); совершенствование испытаний и разработка новых методов ускоренных и неразрушающих испытаний.

Редактор

I. НАДЕЖНОСТЬ СЛОЖНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

УДК 681.2/3.001.57 : 518.5

Б. И. КОЗЛОВ, И. П. КУЗЬМИН

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ОДНОГО КЛАССА

К рассматриваемому классу измерительных систем (ИС) относятся многоканальные системы, обладающие структурной избыточностью и предназначенные для измерения и анализа в промежутке времени $[0, t_2]$ текущих значений некоторых параметров автономного объекта в различных его точках. Цепочку устройств, обеспечивающих передачу информации от одной точки объекта, назовем каналом, а систему, измеряющую параметры объекта в n точках, n -канальной ИС.

Поступающая по n каналам ИС информация однородна, пропускная способность каналов одинакова, каналы идентичны и равнонадежны. При выходе из строя одного канала теряется $\eta = \frac{1}{n}$ информации. Вследствие из-

быточности выход из строя каналов числом не более $m_{кр}$ не считается отказом. В состав системы входят устройства, являющиеся общими для k ($k < n$) каналов. Если число $k > m_{кр}$, то при выходе из строя хотя бы одного общего устройства наступает отказ системы.

По условиям размещения устройств системы на объекте часть из них при отказе до момента времени t_2 может быть восстановлена. Другая часть этих устройств в промежутке времени $[0, t_2]$ восстановлению не подлежит, так как доступа к ней в этот период эксплуатации обслуживающий персонал не имеет.

Показателем надежности функционирования ИС является математическое ожидание функционала $K(t)$, заданного на траектории процесса смены состояний системы, значение математического ожидания в каждый данный момент времени t пропорционально объему информации, поступающей от системы в данный момент времени. Надежность функционирования ИС является удовлетворительной, если объем поступающей от нее информации не ниже критического. В этом случае $0 < K_{кр} < K(t) < 1$. При объеме информации, меньшем критического, $K(t) = 0$.

Известно, что в настоящее время не существует точных аналитических методов расчета показателей надежности функционирования ИС данного класса. Ввиду большой сложности этих систем, анализ надежности их функционирования целесообразно осуществлять путем статистического моделирования на ЭЦВМ.

Формализация процесса функционирования ИС

Рассмотрим укрупненную структурную блок-схему надежности ИС, представленную на рис. 1, где $A_{1, 2, \dots, k, \dots, n} = A_i$; $B_{1, 2, \dots, k, \dots, n} = B_i$ — элементы блок-схемы, включающие в себя все восстанавливаемые и все восстанавливаемые устройства соответственно, входящие в i -й канал и имеющие

свои показатели надежности; C_j — элемент, общий для k каналов ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n/k$). Пусть N — число независимых элементов блок-схемы надежности ИС. Очевидно, что $N = 2n + n/k$.

Состояние элементов характеризуется случайным двоичным вектором $\mathbf{a}(t) = \|a_1(t), a_2(t), \dots, a_N(t)\|$, где $a_i = 1$, если i -й элемент работоспособен, $a_i = 0$ в противном случае.

Определение математического ожидания $MK(t)$ функционала $K(t)$ путем моделирования на ЭЦВМ сводится к многократной имитации в промежутке времени $[0, t_2]$ реализаций вектора $\mathbf{a}(t)$:

$$\hat{\mathbf{a}}(t) = \|\hat{a}_1(t), \hat{a}_2(t), \dots, \hat{a}_N(t)\|,$$

фиксации значений функционала $K(t)$ при каждом новом значении вектора $\mathbf{a}(t)$ и статистической обработке результатов по окончании заданного количества реализаций.

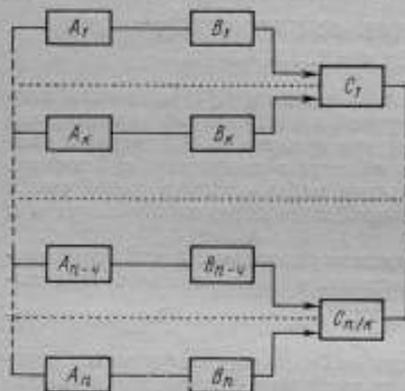


Рис. 1. Увеличенная структурная блок-схема надежности

задачи. Пусть выход из строя одного из элементов C приводит к отказу системы. Это значит, что число каналов k , переставших функционировать при отказе одного элемента C (независимо от того, исправны они или часть из них отказала), больше m_{cr} . Пусть также возможность ремонта восстанавливаемых элементов не ограничена — количества ЗИП и обслуживающего персонала вполне достаточно.

Предположим, что отказы и восстановления элементов блок-схемы независимые случайные события. Из этого предположения следует, что моменты смены состояний системы являются независимыми случайными величинами.

Алгоритм реализации процесса функционирования и оценки показателей надежности данной ИС представлен на рис. 2.

Описание алгоритма

Оператор I ($Op I$) «очищает» рабочие ячейки перед началом моделирования. С этой целью он осуществляет операцию, при которой:

$$R = S = r_A = r_B = J = 0,$$

где R — счетчик текущего числа реализаций алгоритма; S — счетчик числа реализаций алгоритма, в течение которых ни один элемент системы не отказал; r_A, r_B — счетчики отказов, неустранимых и устранимых соответственно;

Поскольку, в соответствии с предположением, сделанным выше, качество функционирования ИС постоянно на отрезках времени между моментами смены состояний системы и изменяется скачками в моменты принятия вектором $\mathbf{a}(t)$ новых значений, в основу построения моделирующего алгоритма положен принцип, названный Н. П. Бусленко принципом «особых состояний» [1]. Выбор этого принципа дает возможность существенно сократить, по сравнению с другими принципами (« Δt », «последовательной проводки запяток» и др.), расход машинного времени при решении на ЭЦВМ задач данного типа.

Представленная на рис. 1 схема ИС является весьма общей. Построение моделирующего алгоритма требует дополнительной конкретизации

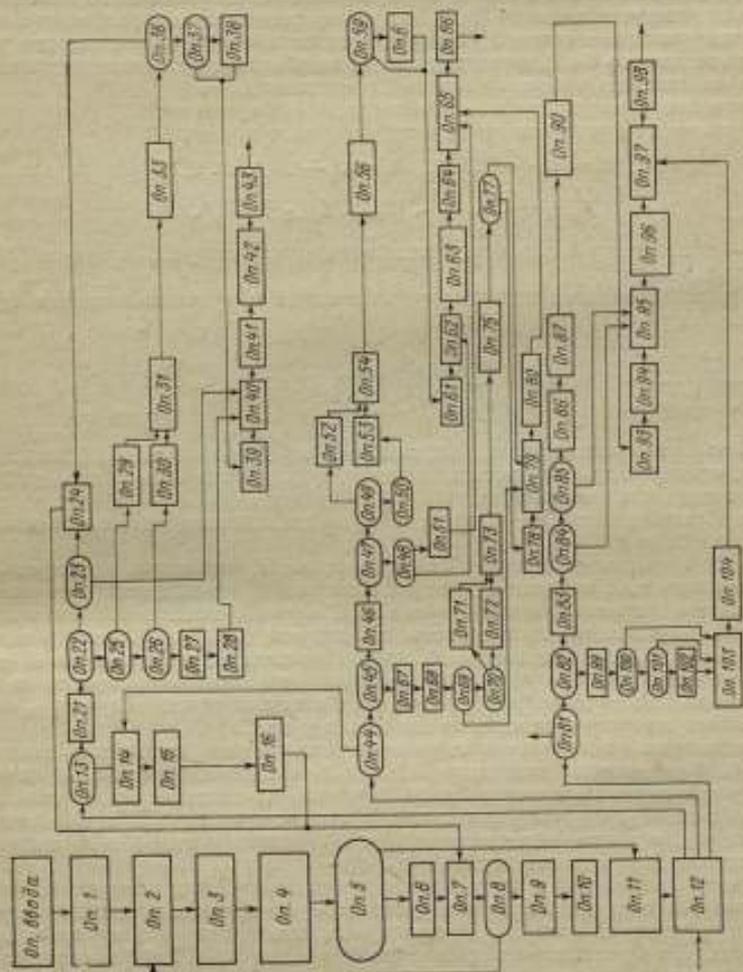


Рис. 2. Алгоритм функционирования ИС

J — ячейка, в которой накапливается сумма: $\sum_{j=1}^u J_j = \sum_{j=1}^u K_j \Delta t_j$ (здесь Δt_j — промежуток времени между соседними моментами смены состояния системы).

Оп 2 очищает ячейки $m_A, m_B, m_C, t_a, l_{A1}, l_{A2}, \dots, l_{An}, l_{B1}, l_{B2}, \dots, l_{Bn}$, где m_A, m_B, m_C — счетчики отказавших элементов типа A, B и C соответственно; t_a — ячейка, в которой запоминается момент времени смены состояния системы в начале каждого очередного интервала Δt_j ; $l_{A1}, \dots, l_{An}, l_{B1}, \dots, l_{Bn}$ — вспомогательные ячейки, служащие для выяснения состояния элемента A_i при отказе элемента B_i и наоборот.

Оп 3 формирует, на основе гипотезы экспоненциального закона, массивы времен безотказной работы элементов блок-схемы и засылает их в ячейки $\tau_A [1 : n], \tau_B [1 : n]$ и $\tau_C [1 : n/k]$.

Оп 4 осуществляет выбор из массивов $\tau_A [1 : n], \tau_B [1 : n]$ и $\tau_C [1 : n/k]$ наименьших по величине чисел и засылает их в ячейки τ_{Amin}, τ_{Bmin} и τ_{Cmin} .

Оп 5 выясняет, есть ли хотя бы один элемент, отказавший до момента t_2 . Если в промежутке времени $[0, t_2]$ ни один элемент не отказал, то это событие фиксируется счетчиком S (*Оп 6*) и, в зависимости от выполнения условия, проверяемого *Оп 8*, производится либо обработка и печать результатов моделирования, либо переход к новой реализации.

Алгоритм предусматривает возможность определения:

а) значений функционала K в промежутках времени

$$[t_0, t_1 = t_0 + \Delta t_1] [t_1, t_2 = t_1 + \Delta t_2], \dots, [t_{j-1}, t_{j-1} + \Delta t_j, \dots, [t_{u-1}, t_{u-1} + \Delta t_u],$$

где u — число интервалов Δt_j , составляющих промежуток времени $[0, t_2]$ ($\Delta t = \tau_{min} - t_a$);

б) усредненного по количеству реализаций и времени значения функционала K ;

$$K = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} K(t) dt \approx \frac{1}{R t_2} \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^u K_i(t_{j-1}, t_j) \cdot \Delta t_j = \frac{1}{R t_2} \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^u J_{ij}$$

в) основных показателей надежности: среднего времени безотказной работы, среднего времени восстановления, вероятности безотказной работы, коэффициента готовности и др.

Оп 11 запоминает номера элементов, отказавших первыми среди элементов своего типа.

Оп 12 определяет очередной момент времени изменения вектором $a(t)$ своего значения. В зависимости от типа элемента, изменившего свое состояние в рассматриваемый момент времени t , процесс моделирования направляется *Оп 13* по одной из трех ветвей: к группе *Оп 13 + 43*, если в момент времени $t = \tau_{min}$ отказал один из элементов типа A ; к группе *Оп 44 + 80*, если в момент времени $t = \tau_{min}$ отказал или был восстановлен один из элементов типа B ; к группе *Оп 81 + 104*, если в момент времени $t = \tau_{min}$ отказал или был восстановлен один из элементов типа C .

Рассмотрим работу алгоритма в случае, когда очередное значение $\tau_{min} > t_2$. При наступлении этого события от *Оп 13* (либо от *Оп 44* или от *Оп 81*) управление передается *Оп 14*, который выясняет, сколько элементов каждого типа m_A, m_B и m_C неисправно в момент времени t_2 . По информации о числах m_A, m_B и m_C определяется (*Оп 15*) и фиксируется (*Оп 16*) значение функционала J на отрезке времени (t_a, t_2) .

Прежде чем перейти к дальнейшему рассмотрению алгоритма, дадим некоторое пояснение. В алгоритме учтены ситуации, когда в течение времени t_2 откажут элементы типа A и B , принадлежащие одному и тому же каналу. Допустим, что в рассматриваемый момент времени $t \in [0, t_2]$ произошел отказ элемента B_i , принадлежащего i -му каналу. Для принятия решения о восстановлении элемента B_i необходимо знать, был ли до момента t отказ

элемента A_i , принадлежащего тому же i -му каналу, так как при неисправности элемента A_i , который в промежутке времени $[0, t_2]$ восстановлен быть не может, ремонтировать элемент B_i не имеет смысла.

Аналогично при отказе элемента A_i необходимо знать состояние в данный момент времени элемента B_i . Если элемент B_i неисправен, то отказ A_i не повлияет на качество функционирования системы; в противном случае отказ A_i вызовет ухудшение качества ее функционирования на величину, пропорциональную доле γ .

Поэтому для отображения предистории рассматриваемого процесса в алгоритм включены вспомогательные ячейки $I_A [1 : n]$ и $I_B [1 : n]$. Ячейка I_{A_i} (I_{B_i}) принимает значение 0, если элемент A_i (B_i), принадлежащий i -му каналу, исправен, и значение 1 в противном случае.

Оп 21 по номеру, записанному в ячейке α , выбирает из множества $I_A [1 : n]$ ячейку $I_{A\alpha}$ и присваивает ей значение 1, фиксируя тем самым факт отказа элемента A_α , имеющего номер $i \tau_{A \min}$.

Оп 22 разветвляет процесс моделирования, в зависимости от наличия или отсутствия отказавших элементов C в рассматриваемый момент времени $t = \tau_{\min}$. Если имеется хотя бы один отказавший элемент C ($m_C \neq 0$), то система по условию считается неисправной и с помощью Оп 23 проводится анализ, не привел ли отказ элемента A_α к неустранимому отказу системы. Если наступил неустранимый отказ системы, то это событие фиксируется счетчиком r_A (Оп 24) и осуществляется переход к Оп 7. Если, с учетом отказа элемента A_α , $m_A < m_{кр}$, то считается, что система находится на восстановлении.

Рассмотрим ситуацию, когда все блоки C исправны ($m_C = 0$). В этом случае в первую очередь необходимо знать, есть ли среди элементов B неисправные, т. е. равно ли нулю содержимое счетчика m_B (Оп 25). Если $m_B = 0$, то выясняется (Оп 29) число отказавших до момента τ_{\min} элементов A и определяется (Оп 31) значение функционала J на отрезке времени (t_2, t_1) , соответствующее показаниям счетчиков m_A , m_B и m_C .

Затем с помощью Оп 33 значение функционала $J(t_2, \tau_{\min})$ фиксируется в соответствующей ячейке. После этого выясняется (Оп 36), привел ли отказ элемента A_α к неустранимому отказу системы. Если неустранимый отказ системы не наступил, то проверяется (Оп 37), не вызвал ли отказ элемента A_α отказа системы, который может быть устранен путем восстановления одного из неисправных элементов B . Если $m_A + m_B = m_{кр}$, то отказ еще одного элемента (A_α) приведет к неустранимому отказу системы. Это событие фиксируется счетчиком r_B (Оп 38). Затем так же, как и в случае, когда $m_A + m_B < m_{кр}$, Оп 39 в ячейке I_B фиксируется очередной момент времени смены состояния системы, равный числу, записанному в ячейке τ_{\min} , и после пополнения счетчика m_A (Оп 40) и исключения из дальнейшего рассмотрения элемента A_α путем засылки в ячейку $\tau_{A\alpha}$ максимально возможного для данной ЭЦВМ числа (Оп 41) производится выбор из массива $\tau_A [1 : n]$ очередного наименьшего числа, которое присваивается ячейке $\tau_{A \min}$. После этого в ячейке α записывается новое число — номер очередного наименьшего числа из массива $\tau_A [1 : n]$ (Оп 43) и осуществляется переход к Оп 12.

Вернемся к Оп 25 и рассмотрим ситуацию, когда $m_B > 0$. В этом случае необходимо выяснить, есть ли среди отказавших элементов B такой, который принадлежит каналу, содержащему элемент A_α . Эта операция осуществляется с помощью Оп 26. Равенство $I_{B\alpha} = 1$ означает, что среди отказавших элементов B есть элемент, принадлежащий каналу $i \tau_{\min}$, и, следовательно, его восстановление надо прекратить и исключить его из дальнейшего рассмотрения. Эту операцию осуществляет Оп 27. Затем от содержимого счетчика m_B отнимается единица и управление передается Оп 40. Таким образом, мы рассмотрели первую ветвь алгоритма, по которой протекает процесс моделирования, когда очередная смена состояния системы вызвана отказом одного из элементов A .

Перейдем к описанию второй ветви алгоритма (Оп 44 + 80).

В отличие от первой, вторая ветвь имеет оператор (Оп 45), выясняющий, какое событие — отказ или восстановление — «произошло» в момент вре-

мени τ_{\min} . Аналогичный оператор имеется и в третьей ветви (Оп 82). В данном алгоритме это выяснение производится путем определения знака числа τ_{\min} .

Например, можно условиться приписывать моментам отказов элементов В и С знак плюс, а моментам их восстановления — знак минус.

Рассмотрим событие — отказ в момент времени $t = \tau_{\min}$ элемента В_р. С «наступлением» этого события работают Оп 46 + 66. Функционирование многих из них аналогично работе Оп 21 + 43, описанных выше. Операторами, не встречавшимися ранее, являются Оп 62, формирующий время восстановления данного элемента, и Оп 63, присваивающий ячейке $\tau_{Вр}$ новое значение $\tau_{В}$ с признаком восстановления (например, с знаком минус).

Теперь рассмотрим событие — восстановление в момент времени $t = \tau_{\min}$ элемента В_р. При «наступлении» этого события работают Оп 67 + 80. Оп 67 фиксирует событие, заключающееся в том, что элемент В_р восстановлен. Работа Оп 68 + 78 ясна из блок-схемы. Аналогичные им операторы рассмотрены выше. Оп 79 формирует время работы элемента В_р до очередного отказа, а Оп 80 обновляет содержимое ячейки $\tau_{Вр}$, снабжая его признаком отказа.

Рассмотрим третью ветвь алгоритма, составленную из Оп 81 + 104. Пусть очередная смена состояния системы в момент $t = \tau_{\min}$ вызвана отказом одного из элементов С. Если к моменту τ_{\min} неисправных элементов С не было, а суммарное число неисправных элементов А и В не превышало $m_{кр}$ (эти условия проверяются Оп 84 и 85), то выполняется уже известная процедура: выясняются числа неисправных элементов А и В (Оп 86), определяется и фиксируется значение функционала $J(t_a, \tau_{\min})$ (Оп 87), ячейке t_a присваивается новое значение, равное τ_{\min} (Оп 93), отказ системы фиксируется счетчиком r_B (Оп 94). Затем формируется время восстановления устройства C_j (Оп 95) и в ячейку τ_{Cj} заносится момент времени окончания его восстановления.

Далее производится выбор из массива $\tau_C [1 : n/k]$ очередного $\tau_{C \min}$ и определяется его номер (Оп 97, Оп 98), который присваивается ячейке γ . От Оп 98 управление передается Оп 12 и процесс повторяется.

Пусть в момент времени $t = \tau_{\min}$ «произошло» восстановление одного из элементов С, а именно элемента C_γ . Тогда от содержимого счетчика m_C отнимается 1 (Оп 99) и с помощью Оп 100 и 101 выясняется, вышла ли система из состояния отказа. Если с восстановлением элемента С система стала опять работоспособной ($m_C = 0$, $m_A + m_B < m_{кр}$), то момент смены состояния системы фиксируется в ячейке t_a (Оп 102). Если восстановление элемента C_γ оказалось недостаточным для приведения системы в работоспособное состояние, в связи с тем, что либо $m_C > 0$, либо $m_A + m_B > m_{кр}$, то ячейка t_a не обновляется, так как значение функционала J в момент τ_{\min} не изменилось (осталось равным нулю). Далее формируется время безотказной работы элемента C_γ (Оп 103) и фиксируется в ячейке τ_{Cj} момент очередного его отказа (Оп 104).

Ниже приведены результаты расчета с помощью данного алгоритма некоторых показателей качества ИС при следующих исходных данных: общее число каналов системы $n = 40$; число каналов, «замкнутых» на один элемент типа С, $k = 5$; распределение времени безотказной работы и восстановления элементов блок-схемы экспоненциальное; интенсивность отказов и восстановлений устройств имеет значения

$$\lambda_A = \lambda_C = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ 1/ч; } \lambda_B = 0,154 \cdot 10^{-3} \text{ 1/ч;}$$

$$\mu_B = 3 \text{ 1/ч; } \mu_C = 2 \text{ 1/ч;}$$

требуемая точность вычисления показателей качества функционирования системы $\epsilon = 0,1$; требуемое число реализаций $R_{тр} = 900$; длительность одной реализации $t_3 = 200$ ч.

Получены следующие средние значения характеристик качества функционирования ИС: «производительности» системы $K = 0,91$; параметра по-

тока отказов $\omega = 0,0124$ 1/ч; времени восстановления $T_D = 0,41$ ч; коэффициента готовности $K_G = 0,9$; доли неустраняемых в течение времени t_3 отказов системы $p = \frac{r_A}{r_A + r_B} \cdot 100\% = 13,5\%$.

Полная программа решения данной задачи, записанная на языке АЛГОЛ, содержит 324 оператора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бусленко Н. П. Моделирование сложных систем. М. «Наука», 1968. 366 с. с-ил.

Поступила в редакцию 15/IV 1974 г.

Л. В. РАЗУБАЕВА

ВНИИМ

УДК 681.2/3—192 : 517.9

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ СПОСОБ АНАЛИЗА НАДЕЖНОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Задача определения показателей надежности сложных измерительных систем во многих случаях сводится к составлению и решению систем дифференциальных уравнений Колмогорова—Чепмена, связывающих вероятности состояний системы. При большом числе состояний системы определение указанных вероятностей, являющихся базой для вычисления основных показателей надежности, связано с большими затратами инженерного труда или машинного времени. Значительное упрощение решения задачи может быть достигнуто применением топологических методов анализа надежности [1, 2, 3, 4].

Из числа известных топологических методов можно выделить группу [1, 2], связывающую процедуру определения вероятностей состояний с машинным анализом структуры некоторых графов. Предлагаемую работу следует рассматривать в рамках последнего направления.

Система дифференциальных уравнений Колмогорова—Чепмена в матричном виде записывается следующим образом:

$$\frac{d}{dt} [P_i(t)] = [a_{ij}] [P_i(t)], \quad (1)$$

где $[P_i(t)]$ — матрица-столбец вероятностей состояний системы с множеством состояний $X = \{x_i\}$,

$$i \in I = \{1, n\};$$

$[a_{ij}]$ — квазистохастическая матрица интенсивностей переходов системы из состояния x_j в состояние x_i ($i, j = \overline{1, n}$) со свойствами:

$$a_{ij} > 0 (i \neq j); a_{ij} < 0 (i = j);$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 0. \quad (2)$$

Процесс перемещения системы в пространстве состояний представим в виде графа системы $G(X, W)$. Множество вершин X этого графа соответствует множеству состояний системы, а множество дуг $W = \{w_{ij}\}$ — множеству возможных переходов системы из одних состояний в другие с весами $d(w_{ij}) = a_{ij}$ ($i, j = \overline{1, n}; i \neq j$).

Будем считать, что в начальный момент времени система с вероятностью, равной 1, находится в состоянии $x_q \in X$, т. е.

$$\left. \begin{aligned} P_q(0) &= 1 \\ P_i(0) &= 0 \quad (i = \overline{1, n}; i \neq q) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Путем операторного преобразования приведем дифференциальные уравнения (1) и (3) к системе алгебраических уравнений

$$A(S) [P_i(S)] = [B_i], \quad (4)$$

где $[P_i(S)]$ — матрица-столбец операторных изображений вероятностей состояний системы при условии (3);

$[B_i]$ — матрица-столбец свободных членов, причем $B_i = 0$ ($i \neq q$);

$$B_q = -1;$$

$A(S) = [a_{ij}] - SE$ — матрица коэффициентов;

E — единичная матрица порядка n ;

S — комплексная переменная преобразования Лапласа.

В [2] показано, что вероятность $P_i(S)$ определяется как отношение двух полиномов, каждый из которых определяется как сумма весов всех прадеревьев некоторых вспомогательных графов, строящихся на основании графа системы, с корнем, совмещенным с дополнительно вводимой вершиной. Для определения $P_i(S)$ требуется введение дополнительной вершины и соединяющих ее с другими вершинами графа дуг с определенными весами.

В настоящей работе предлагается самостоятельный способ определения $P_i(S)$, не требующий дополнительных построений в исходном графе системы. Содержание способа раскрывается следующими двумя утверждениями.

Утверждение 1. Вероятности состояний системы в преобразованиях Лапласа определяются соотношением:

$$P_k(S) = \frac{R_k(S)}{S \sum_{i=1}^n R_i(S)} \quad (k \in I), \quad (5)$$

где $R_i(S)$ — сумма весов всех прадеревьев с корнем в вершине x_i графа $C_i^S(X, W)$, полученного транспонированием графа $G(X, W)$ и последующим добавлением к весам дуг, исходящих из вершины x_q , соответствующей начальному состоянию системы комплексной переменной S , т. е.

$$\left. \begin{aligned} d_i^*(w_{ij}) &= a_{ij} \quad (i \neq j, q), \\ d_i^*(w_{qj}) &= a_{qj} + S \quad (j = \overline{1, n}; j \neq q)^* \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Напомним, что транспонированием графа называется изменение направления всех его дуг на противоположные с сохранением их весов, а вес прадерева определяется как произведение весов дуг, составляющих данное прадерево.

Утверждение 2. Финальные вероятности системы определяются соотношением:

$$P_k = \frac{R_k}{\sum_{i=1}^n R_i} \quad (k \in I), \quad (7)$$

* Если $a_{qj} = 0$, то $d_i^*(w_{qj}) = S$.

где R_i — сумма весов всех прадеревьев с корнем в вершине x_i графа $G_i(X, W)$, полученного транспонированием графа $G(X, W)$.

Ниже приводится доказательство сформулированных утверждений. В [3] доказано, что для вероятностей состояний системы, записанных в преобразовании Лапласа, справедливо равенство

$$P_k(S) = \frac{A_{qk}(S)}{S \sum_{k=1}^n A_{qk}(S)}, \quad (8)$$

где $A_{qk}(S)$ — алгебраическое дополнение элемента, стоящего на пересечении q -й строки и k -го столбца матрицы $A(S)$.

Для определения алгебраического дополнения вычеркнем из матрицы $A(S)$ q -ю строку и k -й столбец. Получившуюся матрицу обозначим A^{qk} .

Тогда алгебраическое дополнение $A_{qk}(S)$ имеет вид:

$$A_{qk}(S) = (-1)^{q+k} \det A^{qk} =$$

$$(-1)^{q+k} \det \begin{pmatrix} (a_{11} - S) \dots a_{1(k-1)} & a_{1(k+1)} & \dots & a_{1q} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{k(k-1)} & a_{k(k+1)} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(q-1)1} & \dots & a_{(q-1)(k-1)} & a_{(q-1)(k+1)} & \dots & a_{(q-1)n} \\ a_{(q+1)1} & \dots & a_{(q+1)(k-1)} & a_{(q+1)(k+1)} & \dots & a_{(q+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(k-1)} & a_{n(k+1)} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Хотя порядок матрицы A^{qk} на единицу меньше порядка матрицы $A(S)$, оставим неизменной нумерацию строк и столбцов матрицы A^{qk} по сравнению с матрицей $A(S)$.

Прибавим к k -й строке матрицы A^{qk} все остальные строки. Тогда элементы \bar{a}_{kj} новой k -й строки, учитывая (2), определяются следующим образом

$$\bar{a}_{kj} = \sum_{l=1}^n a_{lj} + (a_{jj} - S) - a_{qj} = -(S + a_{qj})(j = \overline{1, n}; j \neq k, q) \quad (10a)$$

$$a_{kq} = \sum_{l=1}^n a_{lj} + (a_{qq} - S) - (a_{qq} - S) = -a_{qq}. \quad (10b)$$

Умножим элементы новой k -й строки на (-1) и произведем последовательную перестановку полученной строки на место вычеркнутой q -й строки, не нарушая в итоге порядка следования строк с номерами от $k+1$ до $q-1$. Получим матрицу \bar{A}^{qk} , в которой, в отличие от A^{qk} , отсутствуют уже k -я строка и k -й столбец.

$$\bar{A}^{qk} = \begin{pmatrix} (a_{11} - S) \dots a_{1(k-1)} & a_{1(k+1)} & \dots & a_{1q} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(k-1)1} \dots (a_{(k-1)(k-1)} - S) & a_{(k-1)(k+1)} & \dots & a_{(k-1)q} & \dots & a_{(k-1)n} \\ a_{(k+1)1} \dots a_{(k+1)(k-1)} & (a_{(k+1)(k+1)} - S) & \dots & a_{(k+1)q} & \dots & a_{(k+1)n} \\ (a_{q1} + S) \dots (a_{q(k-1)} + S) & (a_{q(k+1)} + S) & \dots & a_{qq} & \dots & (a_{qn} + S) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(k-1)} & a_{n(k+1)} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Очевидно, матрицу A_i^j можно представить, как матрицу \bar{A}_i^{qk} , полученную транспонированием матрицы \bar{A}^{qk} , дополненную «нулевым» столбцом и «нулевой» строкой. При этом сохраняется отмеченное выше свойство: сумма элементов любой строки (столбца) матрицы A_i^j равна 0. Согласно результатам, полученным в работе [5],

$$\det \bar{A}_i^{qk} = \sum_{i \in \Phi_i} p_i^j, \quad (19)$$

где p_i^j — вес i -го прадерева некоторого графа G^j , поставленного в соответствие матрице A_i^j , с корнем в произвольной вершине x_i ; Φ_i — множество прадеревьев графа G^j с корнем в вершине x_i .

Граф $G^j(X^j, W^j)$ поставлен в соответствие матрице A_i^j по следующим правилам [5]:

— каждой строке и столбцу матрицы с одинаковыми индексами соответствует вершина $x_i \in X^j$;

— каждому недиагональному элементу матрицы, стоящему на пересечении i -й строки и j -го столбца ($i \neq j$), соответствует дуга $w_{ij} \in W^j$, исходящая из вершины x_j и входящая в вершину x_i , с весом соответствующего элемента матрицы, взятым с обратным знаком;

— диагональный элемент матрицы определяется как сумма весов дуг, исходящих из соответствующей вершины графа, взятых с обратным знаком.

Если в качестве корня прадеревьев (19) принять вершину x_0 , соответствующую «нулевой» строке и столбцу, то для вычисления $\det \bar{A}_i^{qk}$ веса дуг, входящих в эту вершину, не имеют значения, так как дуги, входящие в x_0 , не участвуют в образовании прадеревьев с корнем в этой вершине. Учитывая это, заменим нулевую строку в матрице A_i^j строкой с элементами:

$$a_{i0} = a_{ik} \quad (i = \overline{1, n}; i \neq k) \quad (20)$$

и образовавшейся матрице A^* поставим в соответствие граф G^* по правилам, приведенным выше. Тогда $\det \bar{A}_i^{qk}$ на основании сказанного определится как сумма весов всех прадеревьев графа G^* с корнем в вершине x_0 . Легко проверить, что граф G^* отличается от графа $G_i^S(X, W)$ только противоположными знаками весов всех дуг (при этом отождествляем вершину x_0 графа G^* с вершиной x_k графа G_i^S). Принимая во внимание это различие, $\det \bar{A}_i^{qk}$ определим через веса прадеревьев графа $G_i^S(X, W)$ следующим образом:

$$\det \bar{A}_i^{qk} = (-1)^{n-1} \sum_{i \in \Phi_k} p_i^k, \quad (21)$$

где p_i^k — вес i -го прадерева графа G_i^S с корнем в x_k ;

Φ_k — множество прадеревьев графа G_i^S с корнем в x_k ;

n — число вершин графа G_i^S .

Подставив в выражение (9) соотношения (12) и (21), получим

$$A_{qk}(S) = (-1)^{n-1} \sum_{i \in \Phi_k} p_i^k. \quad (22)$$

Обозначив $\sum_{i \in \Phi_k} p_i^k = R_k(S)$, получим из (8) и (22) выражение (5) для $P_k(S)$.

Для доказательства выражения (7) воспользуемся предельной теоремой преобразования Лапласа:

$$P_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t) = \lim_{S \rightarrow 0} S P_k(S) = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{R_k(S)}{\sum_{i=1}^n R_i(S)}. \quad (23)$$

Учитывая, что согласно (6) комплексная переменная S входит только в веса дуг w_{qj} ($j = \overline{1, n}$; $j \neq q$) в качестве слагаемого, приходим к утверждению 2.

В заключение еще раз подчеркнем, что предлагаемый топологический способ анализа надежности измерительных систем эффективен только при использовании ЭЦВМ для поиска прадеревьев графа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Медведев Г. А. Анализ дискретных марковских систем при помощи стохастических графов. «Автоматика и телемеханика», 1965, № 3, с. 485—492.
2. Блажкович Б. И., Михайлова Е. Д. О возможности применения топологического метода для решения некоторых задач теории надежности. — В сб. «Теоретическая электротехника». Изд-во Львовского государственного университета, вып. 5, 1968, с. 51—57.
3. Губинский А. И., Кобзев В. В., Пантелей В. Г. Оценка готовности судовых систем управления и логико-топологический метод определения показателей готовности. — В сб. «Проблемы создания систем управления судовыми техническими средствами». Л., «Судостроение», вып. 15, 1972, с. 57—60, с ил.
4. Червоный А. А., Лукьященко В. И., Котин Л. В. Надежность сложных систем. М., «Машиностроение», 1972, 304 с.
5. Блажкович Б. И. Применение топологического метода к исследованию линейных систем. — В сб. «Теоретическая электротехника». Изд-во Львовского государственного университета, вып. 1, 1966, с. 37—44.

Поступила в редакцию 15/IV—1974 г.

УДК 518.4 : 681.2/3—192

А. И. ГУБИНСКИЙ, В. Г. ПОЗНИК, В. И. ЕРЕМЕЕВ, Т. Ф. БОРИСОВА
ВНИИМ

ГРАФО-ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ГОТОВНОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

При исследовании измерительных систем необходимы объективные критерии количественной оценки надежности. Одним из основных показателей надежности является функция готовности. В настоящей статье излагается графо-операционный метод определения функции готовности на основе марковской модели надежности, сопоставляемой исследуемой системе.

Функция готовности определяется путем решения системы уравнений вида:

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = - \sum_{j=1}^n a_{ij} P_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ji} P_j(t), \quad (i \in \overline{1, n}),$$

где $P_i(t)$ — вероятность нахождения системы в i -м состоянии;
 a_{ij} — интенсивность перехода из состояния x_i в состояние x_j .

Определение функции готовности классическими методами значительно усложняется по мере увеличения числа несовместных состояний системы. Предлагаемый ниже графо-операционный метод позволяет существенно упростить процесс нахождения данного показателя надежности.

Будем предполагать, что однородному марковскому процессу, моделирующему процесс переключения системы на множестве ее состояний X , однозначно сопоставляется вероятностный граф состояний G с множеством вершин $X = \{x_i\}$ при $i \in I = \{1, n\}$. Если определено множество возможных состояний системы X , то вероятность нахождения системы в i -м состоянии в преобразовании Лапласа $P_i(S)$ определяется соотношением [1]:

$$P_i(S) = \frac{C_i(S)}{S \sum_{i \in I} C_i(S)}, \quad (i \in I), \quad (1)$$

а функция готовности, записанная в преобразовании Лапласа, определяется формулой

$$\Gamma(S) = \frac{\sum_{i \in I_P} C_i(S)}{\sum_{i \in I} C_i(S)}, \quad (2)$$

где I_P — подмножество индексов работоспособных состояний системы;

$C_i(S)$ — коэффициент, определяемый по структуре вероятностного графа состояний G для каждого состояния системы.

Основные понятия

Прямой путь I_{ji} из вершины x_j в вершину x_i есть непрерывная последовательность однонаправленных дуг из вершины x_j в вершину x_i , вдоль которой каждая встречается не более одного раза. Вершина x_j называется входной вершиной, вершина x_i — выходной. Более строгое определение дано в работе [2]. Вес прямого пути определяется соотношением:

$$d(I_{ji}) = \prod_{(x_i x_j) \in W(I_{ji})} d(x_i x_j),$$

где $d(x_i x_j)$ — вес дуги вероятностного графа состояний, равный интенсивности перехода из состояния x_i в состояние x_j ; $W(I_{ji})$ — множество дуг, входящих в прямой путь I_{ji} .

Замкнутый контур P есть замкнутый прямой путь, вдоль которого каждая вершина встречается не более одного раза за один обход контура.

Вес замкнутого контура $d(P)$ определяется формулой:

$$d(P) = \prod_{(x_i x_j) \in W(P)} d(x_i x_j).$$

Замкнутые контуры называются зависимыми, если они имеют общие вершины.

Замкнутый контур не следует отождествлять с петлей на графе.

Основное построение m есть граф, состоящий из взаимозависимых замкнутых контуров.

Основные построения называются независимыми, если они не имеют общих вершин.

Вес основного построения $d(m)$ определяется соотношением:

$$d(m) = \prod_{i \in V(m)} [d(x_i x_i) + S] - \sum_{\rho_m \in R(m)} \left\{ \prod_{(x_i x_j) \in W(\rho_m)} d(x_i x_j) \prod_{i \in V(m)/V(\rho_m)} [d(x_i x_i) + S] \right\}.$$

где $V(m)$ — множество вершин основного построения m ;
 $R(m)$ — множество замкнутых контуров, входящих в основное построение;
 $d(x_i x_i)$ — вес петли $(x_i x_i)$, определяемый по формуле:

$$d(x_i x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n d(x_i x_j), \quad (i \in I).$$

Первичным построением s на некотором графе G' называется суграф, состоящий из независимых основных построений, определенных на данном графе. На тех вершинах, которые не входят в основные построения, строятся петли.

Вес первичного построения $d(s)$ определяется по формуле:

$$d(s) = \prod_{m_i \in M(s)} d(m_i) \prod_{i \in V_1(s)} [d(x_i x_i) + S], \quad (3)$$

где $M(s)$ — множество основных построений в первичном построении;
 $V_1(s)$ — множество вершин на графе s , которые не входят в основные построения.

Дополнительное построение $(p_{i_1}, \dots, p_{i_r})$ есть часть графа G' , состоящая из независимых замкнутых контуров p_{i_1}, \dots, p_{i_r} , принадлежащих множеству $R(G')/R(s)$. Порядок дополнительного построения определяется количеством замкнутых контуров r в дополнительном построении. Вес дополнительного построения определяется соотношением:

$$d(p_{i_1}, \dots, p_{i_r}) = (-1)^r \frac{\prod d(p_i)}{\prod_{i \in R} (p_{i_1}, \dots, p_{i_r})}$$

h -м вторичным построением s^h называется суграф некоторого графа G' , состоящий из дополнительного построения. На вершинах суграфа, не входящих в дополнительное построение, строится подграф первичного построения \bar{s}^h .

Вес вторичного построения $d(s^h)$ определяется соотношением:

$$d(s^h) = d(\overline{p_{i_1}, \dots, p_{i_r}})^h d(\bar{s}^h), \quad (4)$$

где $d(\bar{s}^h)$ — вес подграфа первичного построения,

$$d(\bar{s}^h) = \prod_{m_i \in M(\bar{s}^h)} d(m_i) \prod_{i \in V_1(\bar{s}^h)} [d(x_i x_i) + S];$$

h — номер вторичного построения. (Этим же номером нумеруются и дополнительное построение, входящее в данное вторичное построение);

$H(G')$ — множество вторичных построений на графе G' , соответствующих первичному построению.

Топологические формулы

Топологическая формула для определения коэффициента $C_l(S)$ имеет вид [1]

$$C_l(S) = \sum_{k \in K} d(I_{li}^k) \Delta_k, \quad (5)$$

где K — множество прямых путей на графе G от входной вершины к выходной;

Δ_k — определитель подграфа G_k , определенного на вершинах графа, не входящих в I_{li}^k прямой путь.

Определитель Δ_k вычисляется по формуле:

$$\Delta_k = d(s_k) + \sum_{(s_k^h) \in H(G_k)} d(s_k^h). \quad (6)$$

При вычислении по топологической формуле (5) следует иметь в виду, что в качестве выходной вершины следует рассматривать вершину x_i , для кото-

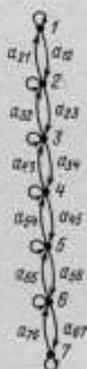


Рис. 1. Граф G

Рис. 2. Подграф G_1

Рис. 3. Первичное построение s_1

Рис. 4. Вторичное построение s_i

рой определяется коэффициент $C_i(S)$. В качестве входной вершины принимается вершина, которой соответствует начальное состояние процесса, т. е.

$$\text{Вер}(x_j = x_j(t=0)) = 1.$$

При числе несовместных состояний $n < 8$ определение прямых путей и замкнутых контуров можно проводить визуально. При числе несовместных состояний $n > 8$ рекомендуется пользоваться алгоритмами, описанными в работах [2, 3].

Для иллюстрации метода определим функцию готовности, записанную в преобразовании Лапласа, для измерительного комплекса, состоящего из $N = 6$ систем. Имеется некоторая восстановительная система, организация которой не конкретизируется.

Измерительный комплекс может находиться в различных состояниях, зависящих от состояния систем.

Модель траектории системы можно представить в виде вероятностного графа с состояниями (рис. 1): 1 — все системы исправны; 2 — отказала одна система; 3 — отказали две системы и т. д. состояния 4, 5, 6; 7 — отказали все системы.

Для общности рассуждений интенсивность перехода из состояния x_i в состояние x_j обозначим через a_{ij} . Комплекс переходит в состояние отказа при отказе $n = 4$ систем. При принятии допущения, что поток событий, образованный отказами или восстановлениями элементов комплекса, есть ординарный стационарный поток без последствия, для определения изображения функций готовности данного измерительного комплекса можно воспользоваться формулой (2):

$$\Gamma(S) = \frac{\sum_{i=1}^3 C_i(S)}{S \sum_{i=1}^7 C_i(S)}$$

Определим коэффициент $C_1(S)$ по формуле (5). В качестве входной и выходной вершины определяем вершину x_1 . Множество прямых путей $\{l_{11}\}$ вырождается в единичное множество l'_{11} , вес данного прямого пути

$$d(l'_{11}) = 1. \quad (7)$$

На рис. 2 изображен подграф G_1 . Множество замкнутых контуров на графе G_1 есть

$$R(G_1) = \{x_2 - x_3 - x_2; x_3 - x_4 - x_3; x_4 - x_5 - x_4; x_5 - x_6 - x_5; x_6 - x_7 - x_6\}.$$

На рис. 3 изображено первичное построение s_1 на подграфе G_1

$$R(s_1) = \{x_2 - x_3 - x_2; x_3 - x_4 - x_3; x_5 - x_6 - x_5; x_6 - x_7 - x_6\}.$$

Вес $d(s_1)$ определяем по формуле (3):

$$d(s_1) = (a'_{22}a'_{33}a'_{44} - a'_{23}a'_{32}a'_{44} - a'_{34}a'_{43}a'_{22}) \times \\ \times (a'_{55}a'_{66}a'_{77} - a'_{56}a'_{65}a'_{77} - a'_{67}a'_{76}a'_{55}), \quad (8)$$

где

$$a'_{ii} = d(x_i x_i) + S.$$

Вторичное построение s'_1 , изображенное на рис. 4, единственное, так как множество $R(G_1)/R(s_1)$ вырождается в единичное $\{x_4 - x_5 - x_4\}$.

Вес вторичного построения $d(s'_1)$ определим по формуле (4):

$$d(s'_1) = (-1)^1 a_{45} a_{54} (a'_{22} a'_{33} - a'_{23} a'_{32}) (a'_{66} a'_{77} - a'_{67} a'_{76}). \quad (9)$$

Определитель Δ_1 вычислим по формуле (6) с учетом формул (8) и (9). Запишем в общем виде:

$$\Delta_1 = d(s_1) + d(s'_1). \quad (10)$$

Топологический коэффициент $C_1(S)$ определим по формуле (5), подставляя в нее формулы (7) и (10).

Аналогично определяются другие коэффициенты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Губинский А. И., Кобзев В. В., Пантелей В. Г. Оценка готовности судовых систем управления и логико-топологический метод определения показателей готовности.— В сб. «Проблемы создания систем управления судовыми техническими средствами. Л., «Судостроение», вып. 15, 1972, с. 57—60, с ил.
2. Зыков А. А. Теория конечных графов. Новосибирск, М., «Наука», 1969, 496 с., с ил.
3. Губинский А. И., Кобзев В. В., Пантелей В. Г. Методические рекомендации по аналитическим методам исследования и оценки надежности систем «человек—техника».— В сб. «Методические рекомендации по оценке надежности и эффективности систем «человек—техника». М., Изд-во Научного совета по кибернетике АН СССР, 1971, с. 34—118.

Поступила в редакцию 15/IV—1974 г.

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СРЕДНЕЙ
НАРАБОТКИ СИСТЕМЫ ДО ПЕРВОГО ОТКАЗА

Рассмотрим систему с конечным множеством состояний:

$$X = \{x_i, i \in I = \overline{1, n}\}.$$

Будем предполагать, что процесс $X(t)$ перемещения системы на множестве состояний X описывается однородной марковской цепью с непрерывным временем, задаваемой квазистохастической матрицей интенсивностей переходов:

$$A = [a_{ij}] \quad (i, j \in I),$$

где a_{ij} — интенсивность перехода в состояние x_i из состояния x_j .

Матрица A обладает следующими свойствами:

$$a_{ij} > 0 \quad (i \neq j), \quad a_{ii} < 0 \quad (i \in I),$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 0 \quad (j \in I).$$

Из последнего соотношения, в частности, следует

$$a_{ij} = - \sum_{i \neq j}^n a_{ij} \quad (j \in I). \quad (1)$$

Пусть $\bar{X}_p = \{x_i, i \in J \subset I\} \subseteq X$ — некоторое подмножество состояний, характеризующееся тем, что переход системы в одно из состояний $x_i \in \bar{X}_p$ означает отказ системы. Подмножество $X_p = X/\bar{X}_p$ назовем подмножеством работоспособных состояний. Без ограничения общности будем полагать

$$X_p = \{x_i, i \in I_p = I/J = \overline{1, n_p}\},$$

а состояние $x_1 \in X_p$ начальным состоянием системы, т. е.

$$\text{Вер} \{X(t=0) = x_1\} = 1.$$

Важными показателями большого класса измерительных систем являются средняя наработка системы до первого отказа T_1 (среднее время до первого попадания системы в состояние $x_i \in \bar{X}_p$) и вероятность безотказной работы системы $P_c(t)$ в интервале $[0, t]$. В работе предлагаются топологические формулы для определения показателя T_1 , а также $P_c(S)$ — вероятности $P_c(t)$, записанной в преобразованиях Лапласа, позволяющие вычислять T_1 и $P_c(S)$ только на основе структурного анализа вероятностного графа состояний системы, без составления и решения системы уравнений.

Представим процесс $X(t)$ перемещения системы на множестве состояний X в виде вероятностного графа состояний $G(X, W)$, где X множество вершин, соответствующее множеству состояний системы, а W — множество дуг $w_{ij} = (x_j, x_i)$ ($x_i, x_j \in X$), соответствующее множеству возможных переходов системы из состояния в состояние с весами $d(w_{ij})$, задаваемыми элементами матрицы A .

В графе $G(X, W)$ будем различать следующие интегральные образования [1].

Прямой путь l^{ij} из вершины x_i в вершину x_j — цепь последовательно соединенных однонаправленных дуг, у которой каждая вершина имеет только одну входящую и одну выходящую дугу, за исключением x_i и

x_j , имеющих только одну выходящую и одну входящую дугу соответственно. Вершины x_i и x_j могут быть соединены несколькими прямыми путями. Вес k -го прямого пути l_k^{ij} из вершины x_i в вершину x_j определяется соотношением:

$$d(l_k^{ij}) = \prod_{w_{ij} \in W(l_k^{ij})} d(w_{ij}), \quad (2)$$

где $W(l_k^{ij}) \subseteq W$ множество дуг, входящих в k -й прямой путь.

Замкнутый контур r — цепь последовательно соединенных однонаправленных дуг, у которой каждая вершина имеет только одну входящую и одну выходящую дугу.

Вес m -го замкнутого контура r_m определяется соотношением

$$d(r_m) = \prod_{w_{ij} \in W(r_m)} d(w_{ij}), \quad (3)$$

где $W(r_m) \subseteq W$ — множество дуг, входящих в m -й замкнутый контур. Важным частным случаем замкнутого контура является петля r_{jj} при вершине x_j ($j \in I$), представляющая собой замкнутый контур, в котором входящая и выходящая дуги сливаются в одну. Вес петли α_j определим как

$$d(r_{jj}) = \alpha_j = - \sum_{i=1}^n d(w_{ij}) \quad (j \in I), \quad (4)$$

Соединение графа (части графа) S — образование в графе (в части графа), включающее все вершины и только те дуги и петли графа (части графа), которые образуют независимые замкнутые контуры, т. е. контуры без общих вершин. Вес j -го соединения графа S_j определяется как

$$d(S_j) = (-1)^{q_j} \prod_{w_{ij} \in W(S_j)} d(w_{ij}) = (-1)^{q_j} \prod_{m=1}^{q_j} d(r_m), \quad (5)$$

где $W(S_j) \subseteq W$ — множество дуг, входящих в соединение S_j ; q_j — число независимых замкнутых контуров, образующих j -е соединение графа S_j .

Определитель графа $\Delta(G)$ — сумма весов множества S возможных соединений графа $G(X, W)$

$$\Delta(G) = \sum_{S_j \in S} d(S_j). \quad (6)$$

Обозначим через G^{x_i, x_k, \dots, x_j} подграфы графа $G(X, W)$, образованные из $G(X, W)$ удалением вершин $x_i, x_p \in X_k, \dots, x_j$ ($i, j, \dots, p \in I, X_k \subseteq X$) и примыкающих к ним дуг.

Тогда для показателя T_1

$$T_1 = \frac{\Delta(G^{\bar{x}_p, x_1}) + \sum_{i=2}^{n_p} \sum_{k \in K_{ij}(G^{\bar{x}_p})} d(l_k^{ij}) \Delta(G^{\bar{x}_p, x_k})}{\Delta(G^{\bar{x}_p})}, \quad (7)$$

где $K_{ij}(G^{\bar{X}p})$ — множество прямых путей из вершины x_i в вершину x_j графа $G^{\bar{X}p}$; X_k — множество вершин, входящих в k -й прямой путь.
 Аналитическое выражение для $P_c(S)$ может быть записано в виде

$$P_c(S) = \frac{\Delta(G^{\bar{X}p, x_1}) + \sum_{l=2}^n \sum_{k \in K_{1l}(G^{\bar{X}p})} d(l|_k) \Delta(G^{\bar{X}p, X_k})}{\Delta(G^{\bar{X}p})}; \quad (8)$$

здесь $G^{\bar{X}p, x_i}$, $G^{\bar{X}p, X_k}$, $G^{\bar{X}p}$ — подграфы графа $G_S(X, W)$ изоморфного графу $G(X, W)$ с весами дуг $d(\omega_{ij}(S))$, задаваемыми элементами матрицы

$$A(S) = [a_{ij}] - SE, \quad (9)$$

где S — комплексная переменная преобразования Лапласа; E — единичная матрица размерности $n \times n$.

Другими словами, графы $G(X, W)$ и $G_S(X, W)$ отличаются только весами петель. В графе $G(X, W)$ вес петли определяется соотношением (4), а в графе $G_S(X, W)$, в соответствии с (9), соотношением

$$d(\omega_{jj}(S)) = \alpha_j(S) = - \left[S + \sum_{i \neq j}^n a_{ij} \right] \quad (j \in I). \quad (10)$$

Доказательство. Вероятности состояний системы в любой момент времени связаны дифференциальными уравнениями Колмогорова—Чепмена, имеющими вид

$$\frac{d}{dt} P_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} P_j(t) \quad (i \in I). \quad (11)$$

Выполнив преобразования Лапласа, запишем систему (11) в развернутом виде

$$\begin{bmatrix} -\left(S + \sum_{l \neq 1}^n a_{1l}\right) & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & -\left(S + \sum_{l \neq 2}^n a_{2l}\right) & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & -\left(S + \sum_{l \neq j}^n a_{jl}\right) & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & -\left(S + \sum_{l \neq n}^n a_{ln}\right) \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} P_1(S) \\ P_2(S) \\ \vdots \\ P_j(S) \\ \vdots \\ P_n(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Положим равными нулю интенсивности событий, переводящих систему из \bar{X}_p в X_p на графе $G_S(X, W)$ и в матрице $A(S)$, стоящей в левой части уравнения (12), т. е. положим

$$a_{im} = 0 \quad (n_p < m < n), \quad (i < n_p). \quad (13)$$

Равенство (13) обязательно должно быть выполнено при определении показателей $P_c(t)$ и T_1 , характеризующих функционирование системы до первого отказа. Очевидно, что на графах невосстанавливаемых систем соответствующие интенсивностям a_{im} переходы просто отсутствуют. С учетом (13)

$$P_c(t) = \sum_{i=1}^{n_p} P_i(t). \quad (14)$$

Имея в виду свойство суперпозиции преобразования Лалласа, запишем

$$P_c(S) = \sum_{i=1}^{n_p} P_i(S). \quad (15)$$

Если в момент времени $t = 0$ система находится в состоянии полной работоспособности, то [2]

$$T_1 = P_c(S)|_{S=0}. \quad (16)$$

Действительно,

$$P_c(S) = \int_0^{\infty} P_c(t) e^{-St} dt. \quad (17)$$

Полагая $S = 0$, получим

$$P_c(S)|_{S=0} = \int_0^{\infty} P_c(t) dt = T_1. \quad (18)$$

Учитывая (13), первые n_p уравнений системы (12) можно решать независимо от $n - n_p$ остальных уравнений, так как неизвестные с индексом $i > n_p$ в эти уравнения не входят.

Главный определитель выделенной системы из n_p уравнений представляет собой главный минор n_p -го порядка матрицы $A(S)$.

Полученная таким образом система алгебраических уравнений может быть интерпретирована графом Коутса H_S , полученным из графа $G_S^{\bar{X}_p}$ добавлением вершины x_0^* и дуги w_{10} с весом, равным 1, если вершине x_0 приписать значение 1, а каждой из оставшихся вершин значение $P_i(S)$. При этом, хотя дуги, примыкающие к \bar{X}_p , в графе $G_S^{\bar{X}_p}$ удаляются, веса петель графа $G_S^{\bar{X}_p}$ равны весам петель исходного графа $G_S(X, W)$.

Известно [3], что к графу Коутса H_S может быть применена оптимальная топологическая формула Дезоера для определения выходной величины графа, в нашем случае имеющая вид:

$$P_i(S) = \frac{\sum_{k \in K_{of}(H_S)} d(t_k^{Di}) \Delta(H_S^{Xk})}{\Delta(H_S)}. \quad (19)$$

* Вершина x_0 называется входной вершиной графа.

Учитывая (15), получим

$$P_c(S) = \frac{\sum_{l=1}^{n_p} \sum_{k \in K_0^l(H_S)} d(i_k^{0l}) \Delta(H_S^{X_k})}{\Delta(H_S)} \quad (20)$$

Заметим теперь, что введенные в графе H_S входная вершина x_0 и дуга w_{10} не влияют на образование замкнутых контуров в графе $G^{\bar{X}_p}$ (вершина x_0 не имеет петли), в силу чего

$$\Delta(H_S) = \Delta(G^{\bar{X}_p}) \quad (21)$$

Поскольку вес дуги w_{10} равен 1, то

$$d(i_k^{0l}) = d(i_k^{ll}) \quad (l \in I, (i \neq 1)) \quad (22)$$

В вершину x_1 из вершины x_0 ведет единственный прямой путь с весом $d(i_k^{0l}) = 1$.

Множество X_k для вершины x_1 содержит только вершину x_1 . Так как входная вершина x_0 и начальная вершина x_1 входят в любой прямой путь i_k^{0l} ($l = \bar{1}, n$) и обязательно подлежат удалению при образовании определителя $\Delta(H_S^{X_k})$, то

$$\Delta(H_S^{X_k}) = \Delta(G^{\bar{X}_p}, X_k) \quad (23)$$

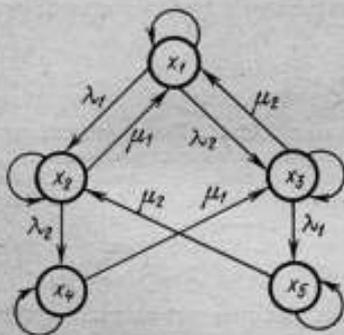


Рис. 1. Граф состояний системы

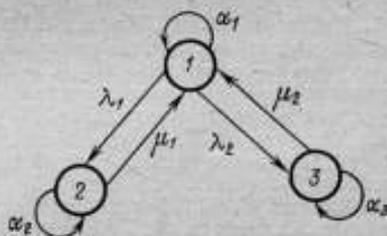


Рис. 2. Граф $G^{\bar{X}_p}$

Подставляя (21), (22) и (23) в (20), приходим к (8). Учитывая (16), убеждаемся в справедливости (7).

Выведенные соотношения проиллюстрируем простым примером. В измерительной системе автоматический канал измерения некоторого параметра с выходом на цифровое табло дублируется аналоговым каналом с выходом на стрелочный прибор. Интенсивности отказов и восстановлений цифрового канала обозначим λ_1 и μ_1 , аналогового λ_2 и μ_2 соответственно. Восстановление системы осуществляется одной ремонтной бригадой. Предполагается наличие бесконечного объема ЗИП. Требуется определить среднюю наработку системы до первого отказа (выхода из строя основного и резервного каналов). Граф состояний системы представлен на рис. 1.

В состоянии x_1 оба канала работоспособны. В состоянии x_2 (x_3) цифровой (аналоговый) канал отказал и восстанавливается, а аналоговый (цифровой) канал работоспособен. Состояние x_4 (x_5) соответствует отказу аналого-

вого (цифрового) канала при отказавшем и восстанавливаемом цифровом (аналоговом) канале:

$$\alpha_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2); \quad \alpha_2 = -(\mu_1 + \lambda_2); \quad \alpha_3 = -(\lambda_1 + \mu_2).$$

Граф $G^{\bar{X}_p}$ представлен на рис. 2. Имеем

$$\Delta(G^{\bar{X}_p}) = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2(\lambda_2\mu_2) + \alpha_3(\lambda_1\mu_1) = (\lambda_1 + \lambda_2)(\mu_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \mu_2) -$$

$$-(\mu_1 + \lambda_2)\lambda_2\mu_2 - (\lambda_1 + \mu_2)\lambda_1\mu_1 = \lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2);$$

$$\Delta(G^{\bar{X}_p, x_1}) = \alpha_2\alpha_3 = (\mu_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \mu_2);$$

$$\sum_{i=2}^3 \sum_{k \in K_{1/}(G^{\bar{X}_p})} d(i_k^{ij}) \Delta(G^{\bar{X}_p, x_k}) = -\lambda_1\alpha_3 - \lambda_2\alpha_2 =$$

$$= \lambda_1(\lambda_1 + \mu_2) + \lambda_2(\lambda_2 + \mu_1);$$

$$T_1 = \frac{(\mu_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \mu_2) + \lambda_1(\lambda_1 + \mu_2) + \lambda_2(\lambda_2 + \mu_1)}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2)} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_1} \left[1 + \frac{(\lambda_1 + \mu_2)(\lambda_1 + \mu_1)}{\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2)} \right] = \frac{1}{\lambda_2} \left[1 + \frac{(\mu_1 + \lambda_2)(\mu_2 + \lambda_2)}{\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2)} \right].$$

Приведенные аналитические выражения, очевидно, могут быть получены и алгебраическими методами, но, значительно более сложным путем. Отметим, что применение предлагаемых топологических формул особенно целесообразно в тех случаях, когда $n_p \ll n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Губинский А. И., Кобзев В. В., Пантелей В. Г. Методические рекомендации по аналитическим методам исследования и оценки надежности систем «человек—техника». — В сб. «Методические рекомендации по оценке надежности и эффективности систем «человек—техника». М., Изд-во Научного совета по кибернетике АН СССР, 1971, с. 34—118.

2. Васильев Б. В., Козлов Б. А., Ткаченко Л. Г. Надежность и эффективность радиоэлектронных устройств. М., «Советское радио», 1964, 368 с. с ил.

3. Райцын Т. М. Синтез систем автоматического управления методом направленных графов. Л., «Энергия», 1970, 96 с. с ил.

Поступила в редакцию 15/IV—1974 г.

УДК 519.422 : 518.42

А. И. ГУБИНСКИЙ, В. Г. ПАНТЕЛЕЙ, Л. В. РАЗУБАЕВА

ВНИИМ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВА ИЗОМОРФИЗМА ГРАФОВ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГОРОВА—ЧЕПМЕНА

Широкое распространение уравнений Колмогорова—Чепмена для исследования разнообразных задач теории надежности заставляет исследователей интенсивно искать пути уменьшения трудозатрат на их решение. Последние годы характеризуются использованием в теории и практике надежности топологических методов, позволяющих непосредственно определять показате-

тели надежности на основе структурного анализа вероятностного графа состояний системы без составляющей и алгебраического решения систем уравнений Колмогорова—Чепмена [1, 2, 3, 4].

Применение топологических методов с этой целью тем более целесообразно, что запись самих уравнений Колмогорова—Чепмена, как правило, осуществляется по вероятностному графу состояний системы с использованием простого мнемонического правила [5].

Процедура топологического определения показателей надежности заключается в отыскании (визуальном или алгоритмизированном) некоторых интегральных образований в графе состояний системы, по которым затем записывается аналитическое выражение для искомого показателя.

Топологические методы адекватны соответствующим алгебраическим методам и допускают полную формализацию процесса нахождения решения, что позволяет успешно реализовать их на ЭЦВМ. При ручных же расчетах, обладая большей по сравнению с алгебраическими методами наглядностью, топологические методы позволяют максимально использовать способность человека к зрительному восприятию топологических образов в графе, что значительно сокращает объем производимых вычислений.

Использование топологических методов не вносит принципиально новых моментов в разработанную на сегодняшний день теорию надежности и интересно, в первую очередь, простотой интерпретации получаемых результатов и значительным упрощением процедуры нахождения решения.

Однако работа непосредственно с графом в ряде случаев позволяет вскрыть некоторые связи и закономерности, трудно обозримые при алгебраическом анализе.

В качестве подтверждения последнего высказывания рассмотрим приведенную в работе [4] топологическую формулу для P_i — финальной вероятности i -го состояния системы, случайный процесс перемещения которой в пространстве состояний описывается однородной марковской цепью с непрерывным временем. Если задан вероятностный граф состояний системы $G(X, W)$, где X — множество вершин, соответствующих множеству состояний системы, а W — множество дуг, соответствующих множеству возможных переходов системы из состояния в состояние с назначенными весами, то результат, позволяющий наиболее полно использовать топологические свойства вероятностного графа $G(X, W)$, выражается следующей топологической формулой:

$$P_i = \frac{\sum_{k \in K_{ji}(G)} d(I_k^{ii}) \Delta(G^{X_k})}{\sum_{q=1}^n \sum_{k \in K_{ji}(G)} d(I_k^{ii}) \Delta(G^{X_k})} = \frac{C_i}{\sum_{q=1}^n C_q} \quad (1)$$

где $C_i = \sum_{k \in K_{ji}(G)} d(I_k^{ii}) \cdot \Delta(G^{X_k})$ — коэффициент, определяемый для состояния системы x_i ($i = \overline{1, n}$) по топологии вероятностного графа состояний;

$K_{ji}(G)$ — множество прямых путей* из произвольно выбранной начальной вершины x_j графа G к вершине x_i ;

$d(I_k^{ii})$ — вес k -го прямого пути I_k^{ii} от вершины x_j графа к вершине x_i ;

X_k — множество вершин, входящих в k -ый прямой путь;

* См. стр. 21—22.

$\Delta(G^{X_k})$ — определитель части графа, не касающейся k -го прямого пути, равный сумме весов всех возможных соединений этой части графа;

n — число вершин графа.

Анализ формулы (1) позволяет сделать следующие необходимые для дальнейшего изложения замечания: для вычисления финальной вероятности P_i достаточно знания n коэффициентов C_i (для каждой вершины графа); при определении любого отдельно взятого коэффициента C_i для конечной вершины x_i , начальная вершина графа x_j может быть выбрана произвольно; граф состояний системы $G(X, W, x_i, x_j)$ с выбранными начальной и конечной вершинами x_j и x_i , именуемый в дальнейшем «отмеченным» графом, определяет собой один способ вычисления коэффициента C_i (из n возможных, соответствующих выбору одной из n вершин в качестве начальной).

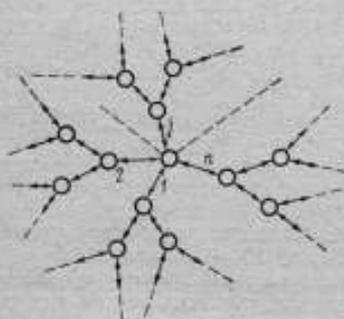


Рис. 1. «Звездчатый» ветвящийся граф

Задача настоящей работы состоит в том, чтобы показать, что для большого класса математических моделей, используемых на практике, финальные вероятности P_i (а также целый ряд других показателей) могут быть определены на основе знания числа $m \ll n$ коэффициентов C_i .

Указанная возможность основывается на следующем частном свойстве изоморфных графов: множества соответствующих прямых путей из вершины в вершину в множествах возможных соединений любых двух изоморфных графов $G'(X, W)$ и $G(X, W)$ совпадают. Приведенное выше частное свойство изоморфных* графов вполне очевидно, поскольку изоморфизм графов означает тождественность всех их свойств [6].

Таким образом, принципиально оказывается возможным вместо некоторого графа $G'(X, W)$ анализировать изоморфный ему граф $G(X, W)$. Переход от множеств прямых путей и возможных соединений графа $G(X, W)$ к соответствующим множествам графа $G'(X, W)$ может быть осуществлен с помощью формул подстановки, устанавливающих индексное соответствие между вершинами графов $G(X, W)$ и $G'(X, W)$.

Допустим, что при определении произвольного коэффициента C_i в качестве начальной вершины была выбрана вершина x_j . Для «отмеченного» графа $G(X, W, x_i, x_j)$ определено множество прямых путей из начальной вершины x_j в вершину x_i , и для каждого из найденных прямых путей определено множество возможных соединений части графа, не касающейся этого прямого пути. Если при определении некоторого другого коэффициента C_{i_2} за счет произвольного выбора начальной вершины x_j удается получить «отмеченный» граф $G(X, W, x_i, x_j)$, изоморфный «отмеченному» графу $G(X, W, x_i, x_j)$, то согласно сформулированному выше частному свойству изоморфных графов, используя формулы подстановки, можно сразу записать коэффициент C_{i_2} , минуя этапы нахождения топологических образов в графе и записи аналитического выражения для C_{i_2} .

* Два графа $G(X, W)$ и $G'(X, W)$ называются изоморфными, если между их вершинами существует такое взаимнооднозначное соответствие, что пары вершин графа $G(X, W)$ в том и только в том случае соединены дугой, когда соединены дугой соответствующие пары вершин графа $G'(X, W)$.

Заметим, что использование сформулированного принципа связано с известными трудностями установления факта изоморфизма графов. В связи с этим представляется целесообразным использование принципа в тех случаях, когда факт изоморфизма «отмеченных» графов является очевидным. Последнее относится в первую очередь к моделям, обладающим симметрией.

Приведем несколько примеров таких моделей.

1. «Звездчатые» ветвящиеся графы (рис. 1 — схемы гибели—размножения). Если в качестве начальной вершины графа принять центр «звезды», то знание коэффициентов C_i для вершин, принадлежащих одной ветви, например первой, позволяет легко записать коэффициенты и для всех остальных ветвей. Способ образования формулы подстановки очевиден: в выражениях для известных коэффициентов первой ветви множество индексов вершин первой ветви должно быть заменено множеством соответствующих индексов ветви, для которой определяются коэффициенты, и наоборот.

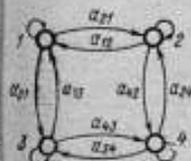


Рис. 2. Двумерная «бинарная» модель

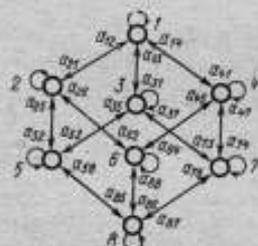


Рис. 3. Трехмерная «бинарная» модель

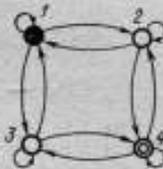


Рис. 4. Граф $G(X, W, x_1, x_4)$

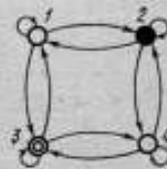


Рис. 5. Граф $G(X, W, x_2, x_3)$

2. Полные графы Бержа. Для систем, интерпретируемых такими графами, возможны непосредственные переходы из любого состояния в любое другое (естественно, при сохранении марковости процесса). Формулы подстановки получаются в этом случае особенно просто: если получено аналитическое выражение для C_{i_1} , то формулу подстановки для C_{i_2} определяет любая из перестановок символов $1, 2, \dots, i_1, \dots, i_2, \dots, n$, ставящая индекс i_2 на место индекса i_1 , в частности, простая перемена местами только этих двух индексов при неизменных остальных.

3. «Бинарные» модели, представляющие собой многомерные кубы, в которых вершины сопоставлены состояниям системы таким образом, что все соседние вершины куба соответствуют соседним состояниям системы, т. е. состояниям, между которыми возможны непосредственные переходы. Примеры двумерной и трехмерной бинарных моделей представлены на рис. 2 и рис. 3 соответственно. Один из возможных способов образования формулы подстановки для моделей этого вида проиллюстрируем на примере.

Пусть граф состояний системы имеет вид, представленный на рис. 2.* Запишем выражение для C_1 , выбрав вершину 4 в качестве начальной. Отмеченный граф $G(X, W, x_1, x_4)$ схематически показан на рис. 4. Из вершины 4 в вершину 1 ведут два прямых пути с весами $d(i_1^{41}) = a_{34} \cdot a_{13}$ и $d(i_2^{41}) = a_{24} \cdot a_{12}$. Возможными соединениями части графа, не входящей в k -й прямой путь, являются петли при вершинах 2 и 3 с весами $\alpha_2 = -(a_{12} + a_{42})$ и $\alpha_3 = -(a_{13} + a_{43})$ соответственно, откуда

$$C_1 = -a_{24} \cdot a_{13} \cdot \alpha_2 - a_{24} \cdot a_{12} \cdot \alpha_3.$$

* Этот граф, в частности, может быть использован для определения показателей надежности дублированной восстанавливаемой системы с перераспределением интенсивностей отказов и восстановлений в различных состояниях.

Определим теперь коэффициент C_2 , выбрав вершину 3 в качестве начальной. Отмеченный граф $G(X, W, x_2, x_3)$ приведен на рис. 5.

Очевидно, что графы $G(X, W, x_1, x_4)$ и $G(X, W, x_2, x_3)$ изоморфны. Индексное соответствие между вершинами устанавливается формулой подстановки

$$\Phi_{1-2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Производя замену индексов в C_1 , получим

$$C_2 = -a_{13} \cdot a_{21} \cdot \alpha_4 - a_{43} \cdot a_{24} \alpha_1.$$

Аналогично получены формулы подстановки для образования C_3 и C_4

$$\Phi_{1-3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ и } \Phi_{1-4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$C_3 = -a_{42} a_{34} \alpha_1 - a_{12} a_{31} \alpha_4;$$

$$C_4 = -a_{21} a_{42} \alpha_3 - a_{21} a_{43} \alpha_2.$$

Способ получения формул подстановки в данном случае состоит в мысленном перемещении рисунка графа на 90° и 180° вокруг воображаемого центра и установлении индексного соответствия между вершинами графов. Способ получения формул подстановки для «бинарных» моделей общего вида приведен в [7].

Область использования описанного принципа не ограничивается приведенными выше показателями и моделями. Опыт показывает на возможность его широкого применения для решения самых разнообразных задач теории и практики надежности. Хотя обоснование, приведенное выше, относилось к топологическому методу, описанному в [4], установленный принцип применения свойства изоморфизма графов для упрощения решения уравнений Колмогорова—Чепмена справедлив при использовании для этой цели любого другого топологического метода [1, 2, 3]. В заключение отметим, что приведенные результаты могут быть адекватно интерпретированы соответствующими алгебраическими методами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блажкевич Б. И., Михайлова Е. Д. О возможности применения топологического метода для решения некоторых задач теории надежности.— В сб. «Теоретическая электротехника», Изд. Львовского государственного университета, вып. 5, 1968, с. 51—57.
2. Половко А. М., Гурович Б. И. Метод расчета надежности резервированных восстанавливаемых устройств. Изв. АН СССР. «Техническая кибернетика», № 4, 1971, с. 15—18.
3. Червоный А. А., Лукьященко В. И., Котин Л. В. Надежность сложных систем. М., «Машиностроение», 1972, 304 с. с ил.
4. Губинский А. И., Кобзев В. В., Пантелей В. Г. Оценка готовности судовых систем управления и логико-топологический метод определения показателей готовности.— В сб. «Проблемы создания систем управления судовыми техническими средствами», Л., «Судостроение», вып. 15, 1972, с. 57—60, с ил.
5. Васильев Б. В., Козлов Б. А., Ткаченко Л. Г. Надежность и эффективность радиоэлектронных устройств. М., «Советское радио», 1964, 384 с. с ил.
6. Мелихов А. Н. Ориентированные графы и конечные автоматы. М., «Наука», 1971, с. 416. с ил.

7. Губинский А. И., Кобаев В. В., Пантелей В. Г. Методические рекомендации по аналитическим методам исследования и оценки надежности систем «человек—техника». — В сб. «Методические рекомендации по оценке надежности и эффективности систем «человек—техника», М., Изд-во Научного Совета по кибернетике АН СССР, 1971, с. 34—118.

Поступила в редакцию 15/IV 1974 г.

УДК 519.217 : 681.2/3—192

Б. И. КОЗЛОВ, П. И. ПАДЕРНО, Л. Л. ПЕСОЧНИНСКИЙ, А. Э. ФРИДМАН

ВНИИМ

ПРИМЕНЕНИЕ МАРКОВСКИХ И ПОЛУМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Из определения измерительной системы, приведенного в ГОСТ 16263—70, следует, что в любой измерительной системе осуществляются следующие основные функции: 1) восприятие параметров исследуемого объекта; 2) измерительные операции; 3) обработка результатов измерительных операций; 4) хранение и выдача измерительной информации.

Измерительная система (ИС) предназначена для измерения целого комплекса параметров исследуемого объекта. Естественно, что последствия отказов отдельных ее элементов могут быть различными. В первом приближении все элементы ИС могут быть разбиты на два подмножества — A и B . К подмножеству A относятся элементы, отказ которых приводит к полному прекращению функционирования системы, а к подмножеству B — элементы, отказ которых приводит лишь к ухудшению качества функционирования. Строго говоря, такое разбиение справедливо для большинства технических устройств. Однако принципиальным является то, что в ИС множество B составляет весьма значительную часть элементов системы.

Таким образом, непосредственно из назначения ИС вытекает, что она является мультимодальной системой, т. е. системой, которая в процессе функционирования может находиться более чем в двух состояниях, отличающихся различным уровнем работоспособности.

Общий подход к оценке надежности и технической эффективности мультимодальных систем заключается в моделировании процесса функционирования исследуемого устройства дискретным вероятностным процессом с непрерывным временем и в определении характеристик надежности и технической эффективности как функционалов, заданных на траекториях полученного вероятностного процесса. Но если удастся построить вероятностный процесс, дальнейшее решение задачи часто оказывается практически невозможным из-за ограниченных технических характеристик (объема памяти, быстроты действия и т. д.) современных ЭЦВМ.

Приведем простой пример. Пусть исследуется сравнительно простая ИС, предназначенная для измерения десяти физических параметров. Тогда, даже без учета имеющейся избыточности в средствах обработки и выдачи измерительной информации, исходный вероятностный процесс будет состоять из 2^{10} различных состояний системы. Следовательно, определение показателей надежности и технической эффективности традиционными методами требует составления графа состояний из 1024 позиций, решения системы дифференциальных или алгебраических уравнений порядка 1024 и т. д. Ясно, что ожидаемый выигрыш в надежности вряд ли окупит затраты на проведение этих расчетов.

Если же иметь в виду, что современные ИС предназначены для измерения сотен, тысяч и даже десятков тысяч физических параметров [1], стано-

вится очевидным, что такой путь исследования надежности является нецелесообразным, а во многих случаях и практически неосуществимым.

В данной работе исследуется принципиально новый метод оценки надежности и технической эффективности мультимодальных систем, который заключается в следующем.

1. Исходя из характера выполняемых системой задач выбирается $(k+1)$ уровней работоспособности системы $\gamma_0, \dots, \gamma_k$ таким образом, что при $i > j$ $\gamma_i < \gamma_j$ и $\gamma_k = 0$.

2. Определяются укрупненные состояния системы $j = 0, \dots, k+1$. При этом система находится в состоянии j в момент времени t , если ее работоспособность $\alpha_j(t)$ удовлетворяет условию

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0(t) &> \gamma_0 && \text{если } j=0; \\ \gamma_{i-1} > \alpha_j(t) > \gamma_j && \text{если } j_{k+1} \neq 0; \\ \alpha_{k+1}(t) &= \gamma_k = 0 && \text{если } j = k+1. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

3. Строится вероятностный процесс переходов между укрупненными состояниями системы j и определяются характеристики надежности и технической эффективности системы как функционалы, заданные на траектории укрупненного вероятностного процесса.

Такой метод имеет значительные преимущества по сравнению с традиционными, так как вместо вероятностного процесса с 2^l (где l — число измеряемых параметров) состояниями рассматривается процесс перехода системы между несколькими укрупненными состояниями. В то же время он имеет реальные предпосылки в инженерной практике. Действительно, анализ качества функционирования системы удобнее проводить путем сравнения кривых, показывающих вероятность выполнения системой некоторого объема работы (100%, 80%, 60% и т. д.). Поэтому при исследовании мультимодальных систем обычно выбирают ряд уровней работоспособности и результаты анализа представляют в виде вероятностных характеристик, рассчитанных относительно этих уровней. Таким образом, предлагаемый подход является логическим обобщением сложившейся инженерной практики.

Для исследования метода укрупнения состояний прежде всего необходимо найти закономерности, которым будет подчиняться укрупненный вероятностный процесс.

В соответствии с известными положениями теории надежности, исходными вероятностными процессами, описывающими функционирование мультимодальной системы, в которой возникают только внезапные отказы, являются марковские процессы. Поэтому указанные вопросы будут исследованы при условии, что исходный процесс является марковским.

Объединение состояний марковской цепи

Рассматривается марковская цепь x_t с числом состояний r (r не обязательно конечно) и непрерывным временем. Пусть $P = \{p_{ik}\}_{i,k=1}^r$ — матрица переходов между состояниями и $\{\tau_i\}_{i=1}^r$ — вектор средних времен пребывания процесса в этих состояниях.

Предположим далее, что для цепи x_t существует стационарное распределение вероятностей, и оно является начальным, т. е. существует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \pi_{ij}(t) = \pi_j \text{ для всех } i, j \in \overline{1, r} \quad (2)$$

и

$$P\{x_0 = i\} = \pi_i,$$

где π_{ij} — переходная вероятность цепи x_t для состояний.

Пусть далее состояния цепи произвольным образом объединяются в группы J_1, \dots, J_k и на этих новых состояниях рассматривается процесс J_t , порожденный цепью x_t . Иными словами, процесс J_t — та же цепь x_t , но при

переходах между состояниями J_m ($m = 1, \dots, k$) не рассматриваются конкретные состояния цепи x_t , принадлежащие J_m .

При условиях (2) справедлива следующая теорема.

Теорема. Процесс J_t , порожденный цепью x_t на множестве состояний J_1, \dots, J_k , является полумарковским.

Доказательство. Для доказательства необходимо и достаточно показать, что можно определить $P(m, n)$ — вероятности скачкообразного перехода из J_m в J_n за конечное время и что распределение времени ожидания перехода из состояния J_m в состояние J_n не зависит от момента и порядкового номера попадания в состояние J_m .

Пусть $f_{ij}^H(t)$ — распределение времени перехода из состояния i в j при «запрещенном» множестве состояний H (последнее означает, что переходы в состояния j из множества H не допускаются); E — множество состояний цепи x_t ($E = 1, 2, \dots, r$, если r конечно). Тогда $H_m = E \setminus J_m$; $f_{J_m J_n}^H(t + \tau, t) = \text{Вер}$ [первого достижения состояния j из J_m при «запрещенном» множестве $H_m/x_t \in J_m$]. Из марковского свойства $j \in H_m$ следует, что

$$f_{J_m J_n}^H(t + \tau, t) = \sum_{i \in J_m} \frac{\pi_i(t)}{\sum_{i \in J_m} \pi_i(t)} f_{ij}^H(\tau),$$

где

$$\pi_i(t) = \sum_{k \in E} \pi_k(0) \pi_{ki}(t).$$

При условиях (2)

$$f_{J_m J_n}^H(t + \tau, t) = \sum_{i \in J_m} \frac{\pi_i}{\sum_{i \in J_m} \pi_i} f_{ij}^H(\tau), \quad (3)$$

т. е. не зависит от t . Определим теперь $f_{J_m J_n}^H(t + \tau, t)$ аналогично $f_{J_m J_n}^H(t + \tau, t)$. Ясно, что

$$f_{J_m J_n}^H(t + \tau, t) = \sum_{i \in J_n} f_{J_m J_n}^H(t + \tau, t). \quad (4)$$

Из (3) следует, что $f_{J_m J_n}^H(t + \tau, t)$ не зависит от t .

Нетрудно заметить, что $f_{J_m J_n}^H(\tau)$ есть вероятность скачкообразного перехода из J_m в J_n до момента τ , а в (2) и (3) показано, что она не зависит от момента попадания в состояние J_m .

Положим

$$P(m, n) = f_{J_m J_n}^H(\infty) \quad \left. \begin{array}{l} \text{и} \\ F_{m, n}(t) = \frac{f_{J_m J_n}^H(t)}{P(m, n)} \end{array} \right\} \quad (5)$$

Эти величины определяют соответственно: вероятность скачка из J_m в J_n за конечное время и функцию распределения времени ожидания скачка из J_m в J_n .

Теорема доказана.

Замечание 1. Стационарность цепи x_t существенна при переходе от соотношения (2) к (3), и, следовательно, для нестационарной цепи результат верен лишь асимптотически.

З а м е ч а н и е 2. Вероятности $f_{J_m}^{H_m}(t)$ можно определить с помощью преобразования Лапласа.

Для $f_{ij}^{H_m}(t)$ из марковского свойства получаем уравнение

$$f_{ij}^{H_m}(t) = \sum_{l \in J_m} C_l \int_0^t e^{-c_l x} p_{il} f_{lj}^{H_m}(t-x) dx + p_{ij} (1 - e^{c_l t}), \quad (6)$$

где $c_l = 1/\tau_l$ или, в преобразованиях Лапласа,

$$f_s(i, j) = \sum_{l \in J_m} \frac{c_l}{s + c_l} p_{il} f_s(l, j) + \frac{c_l p_{ij}}{s(s + c_l)} \quad (i \in J_m, j \in J_n). \quad (6a)$$

Вводя вектор-столбец $f_s(m, j) = \{f_s(i, j)\}_{i \in J_m}$ для фиксированного $j \in J_n$, из (6a) имеем

$$f_s(m, j) = \frac{c}{s + c} P_m f_s(m, j) + \frac{1}{s} \frac{c}{s + c} P(m, j), \quad (7)$$

где $P(m, j) = \{p_{ij}\}_{i \in J_m, j \in J_n}$;

$P_m = \{P_{il}\}_{i, l \in J_m}$ — часть матрицы $P(m, j)$

$\frac{c}{s + c}$ — диагональная матрица с элементами $\frac{c_l}{s + c_l}$ и $l \in J_m$.

Из (7) находим

$$f_s(m, j) = \frac{1}{s} \left(I - \frac{c}{s + c} P_m \right)^{-1} \frac{c}{s + c} P(m, j), \quad (8)$$

где I — матрица, у которой элементы главной диагонали равны единице, а остальные — нулю:

$$f_s(J_m, J_n) = \sum_{i \in J_m} \frac{\pi_i}{\sum_{l \in J_m} \pi_l} \sum_{j \in J_n} f_s(i, j) \text{ — преобразование Лапласа вероятности перехода из } J_m \text{ в } J_n.$$

Учитывая формулу (8), имеем

$$f_s(J_m, J_n) = \frac{1}{s} \pi_m \left(I - \frac{c}{s + c} P_m \right)^{-1} \frac{c}{c + s} Q_{J_m, J_n}, \quad (9)$$

где

$$\pi_m = \left\{ \frac{\pi_l}{\sum_{i \in J_m} \pi_i} \right\}_{l \in J_m}$$

и

$$Q_{J_m, J_n} = \left\{ \sum_{j \in J_n} p(i, j) \right\}_{i \in J_m}.$$

Из формулы (9) нетрудно заметить, что

$\pi_m \left(I - \frac{c}{s + c} P_m \right)^{-1} \frac{c}{s + c}$ — вектор-строка, определяющая $f_s(J_m, J_n)$ при любом J_n .

Далее,

$$\lim_{s \rightarrow 0} s f_s(J_m, J_n) = P(m, n)$$

и из (9)

$$P(m, n) = \pi_m (I - P_m)^{-1} Q_{J_m} J_n. \quad (10)$$

Матрица $P = \| P(m, n) \|_{m, n=1}^k$ — матрица переходов нового полумарковского процесса на объединенных состояниях J_1, \dots, J_k . Из (9) также можно найти распределения времени пребывания процессов в укрупненных состояниях или моменты распределения.

Условия, при которых укрупненный процесс функционирования ИС является марковским

Выше было доказано, что любой стационарный марковский процесс в результате произвольного укрупнения состояний сводится, по крайней мере, к полумарковскому стационарному процессу. Исследуем теперь условия, при которых при укрупнении стационарного марковского процесса сохраняются марковские свойства.

Пусть исходный марковский процесс имеет r состояний. Вероятность перехода процесса из состояний i в j за промежуток времени $(t, t + \Delta t)$ равна $p_{ij} \Delta t$, где $p_{ij} = \lambda_{ij}$, если в системе происходит отказ, и μ_{ij} , если происходит восстановление. Рассмотрим процесс, состоящий из $s < r$ состояний и полученный из исходного в результате его произвольного укрупнения. Без потери общности можно считать, что состояния исходного процесса пронумерованы таким образом, что из $i' > j'$ вытекает $i > k$, где i', j' — состояния укрупненного процесса, $i \in i', k \in j'$ — состояния исходного процесса. Тогда состояния укрупненного процесса объединяют следующие состояния исходного процесса:

$$\begin{aligned} 1' &= \{1, 2, \dots, n\}; \\ 2' &= \{n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2\}; \\ &\dots \dots \dots \\ s' &= \left\{ \sum_{i=1}^{s-1} n_i + 1, \dots, r \right\}. \end{aligned}$$

Далее, пусть $\pi = (\pi_i)$ ($i = 1, \dots, r$) — вектор стационарного распределения исходного марковского процесса; $P = \{P_{ij}\}$ — матрица интенсивностей переходов процесса, причем полагаем $p_{ii} = 1 - \sum_{j \neq i} p_{ij}$; U — матрица порядка $(s \times r)$, i -я строка которой представляет собой вероятностный вектор, имеющий компоненты $\alpha_j^{(i)} = \frac{\pi_j}{\sum_{i \in i'} \pi_i}$ в столбцах и нули на прочих местах

$$U = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} \dots \alpha_{m_1}^{(1)} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{m_2}^{(2)} & \dots & \alpha_{m_2}^{(2)} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ & & & & & & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & & & & \alpha_1^{(s)} \dots \alpha_{m_s}^{(s)} \end{pmatrix}; \quad (11)$$

Теорема доказана.

Таким образом, для того, чтобы укрупненный процесс сохранил марковские свойства, необходимо и достаточно выполнение условий (13) и (14).

Рассмотрим эти условия. Предварительно получим следующие вспомогательные матрицы:

$$VU = \begin{vmatrix} W_1 0 & \dots & 0 \\ 0 W_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 0 & \dots & W_s \end{vmatrix},$$

где

$$W_j = \begin{vmatrix} \alpha_1^{(j)} & \dots & \alpha_{m_j}^{(j)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{(j)} & \dots & \alpha_{m_j}^{(j)} \end{vmatrix},$$

и

$$PV = \begin{vmatrix} p_{11'} p_{12'} & \dots & p_{1s'} \\ p_{21'} p_{22'} & \dots & p_{2s'} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{r1'} p_{r2'} & \dots & p_{rs'} \end{vmatrix},$$

$$UP = \begin{vmatrix} p_{1'1} p_{1'2} & \dots & p_{1'r} \\ p_{2'1} p_{2'2} & \dots & p_{2'r} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{s'1} p_{s'2} & \dots & p_{s'r} \end{vmatrix},$$

где $p_{ij} = \sum_{k \in I'} p_{ik}$ — вероятность перехода из состояния i в укрупненное состояние j' ;

$p_{i'j} = \sum_{k \in I} \alpha_k^{(i')} p_{kj}$ — вероятность перехода из укрупненного состояния i' в состояние j .

Далее

$$VUPV = \begin{vmatrix} p_{1'1'} p_{1'2'} & \dots & p_{1's'} \\ p_{1'1'} p_{1'2'} & \dots & p_{1's'} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{1'1'} p_{1'2'} & \dots & p_{1's'} \\ p_{2'1'} p_{2'2'} & \dots & p_{2's'} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{s'1'} p_{s'2'} & \dots & p_{s's'} \\ p_{s'1'} p_{s'2'} & \dots & p_{s's'} \end{vmatrix},$$

$$UPVU = \begin{vmatrix} \alpha_1^{(1)} p_{1'1'} \alpha_2^{(1)} p_{1'1'} & \dots & \alpha_{m_1}^{(1)} p_{1'1'} & \dots & \alpha_1^{(s)} p_{1's'} \alpha_2^{(s)} p_{1's'} & \dots & \alpha_{m_s}^{(s)} p_{1's'} \\ \alpha_1^{(1)} p_{1'1'} \alpha_2^{(1)} p_{2'1'} & \dots & \alpha_{m_1}^{(1)} p_{2'1'} & \dots & \alpha_1^{(s)} p_{2's'} \alpha_2^{(s)} p_{2's'} & \dots & \alpha_{m_s}^{(s)} p_{2's'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{(1)} p_{s'1'} \alpha_2^{(1)} p_{s'1'} & \dots & \alpha_{m_1}^{(1)} p_{s'1'} & \dots & \alpha_1^{(s)} p_{s's'} \alpha_2^{(s)} p_{s's'} & \dots & \alpha_{m_s}^{(s)} p_{s's'} \end{vmatrix}.$$

$$\text{где } p_{i'j'} = \sum_{k \in i'} \sum_{l \in j'} \alpha_k^{(i)} p_{kl} = \sum_{k \in i'} \alpha_k^{(i)} p_{ki} = \sum_{l \in j'} p_{l'j'}$$

p_{ij} — вероятность перехода процесса из состояния i в состояние j .
Тогда условие (15) выполняется, если

$$p_{kl'} = \text{const} \quad (19)$$

для $k \in i'$, j' , $i' = 1, \dots, s$.

Это означает, что вероятность перехода процесса из состояния i' в состояние j' (i' и j' — любые) не зависит от того, в каком состоянии $k \in i'$ находится процесс.

Условие (16) выполняется, если

$$p_{i'k} = \alpha_k^{(i)} p_{i'j'} = \frac{\pi_k}{\sum_{k \in i'} \pi_k} p_{i'j'}, \quad (20)$$

$$\forall k \in j'; \quad i', j' = 1', \dots, s'.$$

Это означает, что вероятность перехода процесса из состояния i' в состояние $k \in j'$ пропорциональна стационарной вероятности нахождения системы в состоянии k .

Следовательно, для того, чтобы марковский стационарный процесс после укрупнения остался марковским, необходимо выполнение хотя бы одного из условий (19), (20) или, в другой форме, условия

$$\sum_{k \in i'} p_{lk} = \text{const}, \quad \forall l \in i' \quad (19a)$$

или условия

$$\sum_{l \in i'} \alpha_l^{(i)} p_{lk} = \alpha_k^{(i)} \sum_{k \in j'} \sum_{l \in i'} \alpha_l^{(i)} p_{lk} \quad \forall k \in j'. \quad (20a)$$

Можно привести следующий простой пример выполнения этих условий.

Пусть система состоит из такого большого числа элементов, что отказ одного из них приводит к незначительному изменению интенсивности $\lambda_{i'j'}$ перехода системы между укрупненными состояниями. Пусть также интенсивность $\mu_{i'j'}$ переходов в результате восстановления отказавших элементов не зависит от количества отказавших элементов. Тогда вероятности $p_{kl'}$ не зависят от номера состояния k и, следовательно, выполняется условие (19).

Пусть теперь процесс функционирования измерительной системы укрупнен до трех состояний $0'$, $1'$, $2'$, где состояние $1'$ соответствует полностью работоспособной системе, состояние $1'$ — частично работоспособной и состояние $2'$ — отказу системы. Так как состояние $0'$ состоит из одного исходного процесса $0'$, естественно, что $p_{01'} = \text{const}$ и $p_{02'} = \text{const}$. Так как восстановление системы из состояния $2'$ в состояние $1'$, как правило, технически нецелесообразно, положим $p_{2'1'} = 0$. Тогда $p_{k1'} = 0$ для любого $k \in 2'$ и условие (19) также выполняется. Следовательно, для того, чтобы укрупненный процесс был марковским, необходимо выполнение условия (19) или (20) для переходов $1' \rightarrow 2'$, $1' \rightarrow 0'$ и $2' \rightarrow 0'$.

Выводы

1. Измерительные системы являются типичными и наиболее сложными мультимодальными системами, характеризующимися тем, что в процессе эксплуатации они сменяют значительное число состояний, различных по своей работоспособности.

2. Исследование процессов функционирования ИС практически осуществимо только путем построения укрупненных математических моделей.

4. Методом, описанным выше (см. формулы (2) — (4)), определяются вероятности p_i , $i = 1, \dots, k$ стационарной марковской цепи с матрицей переходов $[p_{ij}]$, вложенной в полумарковский процесс.

5. Определяются стационарные вероятности того, что система находится в состоянии i' , по формуле:

$$\pi_{i'} = \frac{p_i \tau_i}{\sum_{i=0}^k p_i \tau_i} \quad (8)$$

6. По формуле (1) определяется величина W .

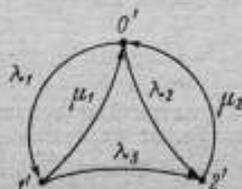
Рассмотрим частный случай.

Укрупненный вероятностный процесс состоит из трех состояний. При анализе функционирования ИС часто выделяются три состояния системы:

- а) состояние $0'$ — соответствует полностью исправной системе;
- б) состояние $1'$ — состояние ограниченной работоспособности;
- в) состояние $2'$ — соответствует полному прекращению функционирования системы.

Рис. 1. Граф состояний укрупненной марковской цепи

λ_i, μ_i — интенсивность переходов между состояниями (в соответствии со стрелками)



Если условия марковости укрупненного процесса выполняются, то

$$\left. \begin{aligned} \pi_{0'} &= \frac{\mu_1(\mu_2 + \mu_3) + \mu_2\lambda_3}{\mu_1(\mu_2 + \mu_3 + \lambda_2) + \mu_2(\lambda_1 + \lambda_3) + (\mu_3 + \lambda_3)(\lambda_1 + \lambda_2)} \\ \pi_{1'} &= \frac{\mu_2\lambda_1 + \mu_3(\lambda_1 + \lambda_2)}{\mu_1(\mu_2 + \mu_3 + \lambda_2) + \mu_2(\lambda_1 + \lambda_3) + (\mu_3 + \lambda_3)(\lambda_1 + \lambda_2)} \\ \pi_{2'} &= \frac{\mu_1\lambda_2 + \lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2)}{\mu_1(\mu_2 + \mu_3 + \lambda_2) + \mu_2(\lambda_1 + \lambda_3) + (\mu_3 + \lambda_3)(\lambda_1 + \lambda_2)} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

а техническая эффективность системы равняется

$$W = \frac{\alpha_{0'} [\mu_1(\mu_2 + \mu_3) + \mu_2\lambda_3] + \alpha_{1'} [\mu_2\lambda_1 + \mu_3(\lambda_1 + \lambda_2)]}{\mu_1(\mu_2 + \mu_3 + \lambda_2) + \mu_2(\lambda_1 + \lambda_3) + (\mu_3 + \lambda_3)(\lambda_1 + \lambda_2)} \quad (10)$$

где λ_i, μ_i ($i = 1, 2, 3$) — интенсивности переходов между состояниями укрупненной цепи, обозначенные на рис. 1.

Если условия марковости укрупненного процесса не выполняются, то укрупненная цепь является полумарковской. Тогда техническая эффективность системы рассчитывается по формуле:

$$W = \sum_{i=0}^1 \alpha_i \cdot \pi_{i'} \quad (11)$$

где

$$\pi_i = \frac{\rho_i \tau_i}{\sum_{i=0}^2 \rho_i \tau_i} \quad (i = 0, 1, 2); \quad (12)$$

$$\tau_i = \sum_{j=0}^2 \rho_{ij} \tau_{ij}; \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 &= \frac{1 - \rho_{12} \rho_{21}}{3 - \rho_{01} \rho_{10} - \rho_{02} \rho_{20} - \rho_{12} \rho_{21}} \\ \rho_1 &= \frac{1 - \rho_{02} \rho_{20}}{3 - \rho_{01} \rho_{10} - \rho_{02} \rho_{20} - \rho_{12} \rho_{21}} \\ \rho &= \frac{1 - \rho_{01} \rho_{10}}{3 - \rho_{01} \rho_{10} - \rho_{02} \rho_{20} - \rho_{12} \rho_{21}} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

τ_{ij} — определяется выражением (6);

$$\rho_{ij} = \int_0^{\infty} F_{ij}(t) dF_{ik}(t) \quad (i, j, k = 0, 1, 2 \quad i \neq j \neq k). \quad (15)$$

Если в укрупненной полумарковской цепи часть переходов является марковской, то расчет величины ρ_{ij} можно несколько упростить. Действительно, пусть $F_{ik}(t) = 1 - e^{-at}$.

$$\text{Тогда } \rho_{ij} = \int_0^{\infty} F_{ij}(t) d[1 - e^{-at}] = a \int_0^{\infty} e^{-at} F_{ij}(t) dt = a F_{ij}^*(a),$$

где $F_{ij}^*(s)$ — преобразование Лапласа функции $F_{ij}(t)$.

Кроме того,

$$F_{ij}^*(s) = \frac{1}{s} - \rho_{ij}^*(s),$$

где

$$\rho_{ij}(t) = 1 - F_{ij}(t).$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \rho &= 1 - a \rho_{ij}^*(a) \\ \rho_{ik} &= 1 - \rho_{ij} = a \rho_{ij}^*(a) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Формулу (16) можно применить для определения величины технической эффективности значительной части измерительных систем. Причем, если элементы, отказ которых приводит к полному отказу системы, не резервированы, то переход из состояния 0' в состояние 2' подчиняется экспоненциальному распределению. Кроме того, восстановление системы из состояний 1' и 2' в состояние 0' обычно подчиняется показательному распределению.

При этих условиях

$$F_{02}(t) = 1 - e^{-\lambda t};$$

$$F_{10}(t) = 1 - e^{-\mu t};$$

$$F_{20}(t) = 1 - e^{-\mu_2 t}.$$

Применяя выражение (16) последовательно ко всем узлам графа состояний системы, получим

$$\left. \begin{aligned} p_{01} &= 1 - \lambda_2 p_{01}^* (\lambda_2) \\ p_{02} &= \lambda_2 p_{01}^* (\lambda_2) \\ p_{12} &= 1 - \mu_1 p_{12}^* (\mu_1) \\ p_{10} &= \mu_1 p_{12}^* (\mu_1) \\ p_{20} &= \mu_2 p_{21}^* (\mu_2) \end{aligned} \right\} (17)$$

Тогда по формуле (7)

$$\left. \begin{aligned} \tau_0 &= p_{01}^* (\lambda_2) + p_{01}^* (0) - \lambda_2 p_{01}^* (\lambda_2) p_{01}^* (0) \\ \tau_1 &= p_{12}^* (\mu_1) + p_{12}^* (0) - \mu_1 p_{12}^* (\mu_1) p_{12}^* (0) \\ \tau_2 &= p_{21}^* (\mu_2) + p_{21}^* (0) - \mu_2 p_{21}^* (\mu_2) p_{21}^* (0) \end{aligned} \right\} (18)$$

и

$$x_i = \frac{p_i^* \tau_i}{\sum_{i=0}^2 p_i^* \tau_i} \quad (i = 0, 1, 2), \quad (19)$$

где

$$\left. \begin{aligned} p_0^* &= \mu_1 p_{12}^* (\mu_1) + \mu_2 p_{21}^* (\mu_2) - \mu_1 \mu_2 p_{12}^* (\mu_1) p_{21}^* (\mu_2) \\ p_1^* &= 1 - \lambda_2 \mu_2 p_{01}^* (\lambda_2) p_{21}^* (\mu_2) \\ p_2^* &= 1 - \mu_1 p_{12}^* (\mu_1) + \lambda_2 \mu_1 p_{01}^* (\lambda_2) p_{12}^* (\mu_1) \end{aligned} \right\} (20)$$

Если же, кроме того, система из состояния полного отказа восстанавливается только в состояние 0', то в уравнениях (18)

$$\tau_2 = \frac{1}{\mu_2}, \quad (21)$$

а система (20) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} p_0^* &= 1 \\ p_1^* &= 1 - \lambda_2 p_{01}^* (\lambda_2) \\ p_2^* &= 1 - \mu_1 p_{12}^* (\mu_1) + \lambda_2 \mu_1 p_{01}^* (\lambda_2) p_{12}^* (\mu_1) \end{aligned} \right\} (22)$$

Пример расчета эффективности типовой структуры измерительных систем. На примере типовой структуры рассмотрим метод аналитической оценки технической эффективности ИС.

Измерительная система состоит из m_1 одинаковых блоков первого ранга и одного блока второго ранга (рис. 2).

Обозначим: $i = 1, 2$ — ранги системы;

λ_i — интенсивность отказов блока i -го ранга;

m_i — число блоков i -го ранга;

$\beta_i = \frac{1}{m_i}$ — коэффициент значимости блока i -го ранга;

- $\gamma_0 = 1$ — нижняя граница коэффициента значимости состояний, объединяемых в состояние $0'$;
 $0 \leq \gamma_1 < 1$ — нижняя граница коэффициента значимости состояний, объединяемых в состояние $1'$;
 μ_1 — интенсивность перехода из состояния $1'$ в состояние $0'$ (интенсивность устранения частичного отказа),
 μ_2 — интенсивность перехода из состояния $2'$ в состояние $0'$ (интенсивность устранения полного отказа).

При наступлении состояния $2'$ система выключается и ремонтируется до полного восстановления. Так как $\gamma_0 = 1$, состоянию $0'$ соответствует полностью исправная система. В состоянии $1'$ система находится, если неисправны $1, 2 \dots k_1$ блоков первого ранга, где

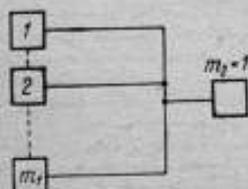


Рис. 2. Блок-схема измерительной системы

m_1 — число блоков 1-го ранга

$$k_1 = \left[\frac{1 - \gamma_1}{\beta_1} \right] = [(1 - \gamma_1) m_1]. \quad (23)$$

Если же неисправны больше, чем k_1 блоков первого ранга или блок второго ранга, то система находится в состоянии $2'$.

Определим функции распределения. Очевидно, что

$$\begin{aligned}
 F_{01}(t) &= 1 - e^{-m_1 \lambda_1 t}; & F_{10}(t) &= 1 - e^{-\mu_1 t}; \\
 F_{02}(t) &= 1 - e^{-\lambda_2 t}; & F_{20}(t) &= 1 - e^{-\mu_2 t}; \\
 F_{21}(t) &= 0.
 \end{aligned}$$

Найдем $F_{12}(t)$. Переход из состояния $0'$ в $1'$ произойдет при отказе одного блока первого ранга. Последующие отказы блоков первого ранга не переводят систему в состояние $2'$, если суммарное количество неисправных блоков не превышает k_1 . Поэтому переход системы из состояния $1'$ в состояние $2'$ наступит либо при отказе блока второго ранга, либо при k_1 -м отказе в группе блоков первого ранга, считая с момента последнего попадания системы в состояние $1'$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
 F_{12}(t) &= \text{Вер} \{1' \rightarrow 2' \text{ за время } t\} = \\
 &= \text{Вер} \{A\} + [1 - \text{Вер} \{A\}] \text{Вер} \{B\}, \quad (24)
 \end{aligned}$$

где событие A — отказ блока 2-го ранга за время t ; событие B — отказ хотя бы k_1 блока 1-го ранга из $(m_1 - 1)$ исправных.

Событие B определяется следующим образом: $\{B\} = \bigcap_{i=0}^{k_1-2} \{ \text{за время } \tau_i \text{ откажет один из } (m_1 - 1 - i) \text{ исправных блоков 1-го ранга} \} \cap \{ \text{за время } (t - \sum_{i=0}^{k_1-2} \tau_i) \text{ откажет хотя бы один из } (m_1 - k_1) \text{ исправных блоков 1-го ранга} \}$.

Но $\text{Вер} \{ \text{за время } \tau_i \text{ откажет один из } (m_1 - 1 - i) \text{ исправных блоков 1-го ранга} \} = [(m_1 - 1 - i) \lambda_1 \tau_i] e^{-(m_1 - 1 - i) \lambda_1 \tau_i}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Вер} \left\{ \text{за } t - \sum_{i=0}^{k_1-2} \tau_i \text{ откажет хотя бы один из } (m_1 - k_1) \text{ блоков 1-го ранга} \right\} = \\
 = 1 - e^{-(m_1 - k_1) \lambda_1 \left(t - \sum_{i=0}^{k_1-2} \tau_i \right)}.
 \end{aligned}$$

Сворачивая приведенные выражения в соответствии с (24), получим для отображения по Лапласу функции $F_{12}(t)$:

$$\left. \begin{aligned} F_{12}^*(s) &= \frac{\lambda_2}{s(s+\lambda_2)} + \frac{1}{s+\lambda_2} \prod_{i=0}^{k_1-1} \frac{(m_1-1-i)\lambda_1}{s+\lambda_2+(m_1-1-i)\lambda_1} \\ p_{12}^*(s) &= \frac{1}{s+\lambda_2} \left[1 - \prod_{i=0}^{k_1-1} \frac{(m_1-1-i)\lambda_1}{s+\lambda_2+(m_1-1-i)\lambda_1} \right] \end{aligned} \right\} (25)$$

По формулам (18-22) получим

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{1}{m_1\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{1}{m_1\lambda_1} - \frac{\lambda_2}{(m_1\lambda_1 + \lambda_2)m_1\lambda_1} = \frac{2}{m_1\lambda_1 + \lambda_2}; \\ \tau_1 &= \frac{1}{\mu_1 + \lambda_2} \left[1 - \prod_{i=0}^{k_1-1} \frac{(m_1-1-i)\lambda_1}{\mu_1 + (m_1-1-i)(\lambda_1 + \lambda_2)} \right] + \\ &+ \frac{1}{\lambda_2} \left[1 - \prod_{i=0}^{k_1-1} \frac{(m_1-1-i)\lambda_1}{(m_1-1-i)\lambda_1 + \lambda_2} \right] - \frac{\mu_1}{\lambda_2(\mu_1 + \lambda_2)} \times \\ &\times \left[1 - \prod_{i=0}^{k_1-1} \frac{(m_1-1-i)\lambda_1}{\mu_1 + (m_1-1-i)(\lambda_1 + \lambda_2)} \right] \left[1 - \prod_{i=0}^{k_1-1} \frac{(m_1-1-i)\lambda_1}{(m_1-1-i)\lambda_1 + \lambda_2} \right] = \\ &= \frac{2}{\mu_1 + \lambda_2} + \frac{\mu_1 - \lambda_2}{\lambda_2(\mu_1 + \lambda_2)} \Omega(\mu_1) - \frac{1}{\mu_1 + \lambda_2} \Omega(0) - \\ &- \frac{\mu_1}{\lambda_2(\mu_1 + \lambda_2)} \Omega(\mu_1) \Omega(0), \\ \tau_2 &= \frac{1}{\mu_2}; \quad \rho_0' = 1; \end{aligned}$$

$$\rho_1' = 1 - \frac{\lambda_2}{m_1\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{m_1\lambda_1}{m_1\lambda_1 + \lambda_2};$$

$$\begin{aligned} \rho_2' &= 1 - \frac{\mu_1}{\mu_1 + \lambda_2} \left[1 - \prod_{i=0}^{k_1-1} \frac{(m_1-1-i)\lambda_1}{\mu_1 + \lambda_2 + (m_1-1-i)\lambda_1} \right] + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + m_1\lambda_1} \times \\ &\times \frac{\mu_1}{\mu_1 + \lambda_2} \left[1 - \prod_{i=0}^{k_1-1} \frac{(m_1-1-i)\lambda_1}{\mu_1 + \lambda_2 + (m_1-1-i)\lambda_1} \right] = \\ &= \frac{\lambda_2(\mu_1 + \lambda_2 + m_1\lambda_1) + m_1\mu_1\lambda_1\Omega(\mu_1)}{(\mu_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + m_1\lambda_1)}, \end{aligned}$$

где

$$\Omega(s) = \prod_{i=0}^{k_1-1} \frac{(m_1-1-i)\lambda_1}{s + \lambda_2 + (m_1-1-i)\lambda_1}.$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \pi_0 &= \frac{A}{A+B+C} \\ \pi_1 &= \frac{B}{A+B+C} \\ \pi_2 &= \frac{C}{A+B+C} \end{aligned} \right\} (26)$$

и эффективность системы равна

$$W = \frac{A + \alpha B}{A + B + C}, \quad (27)$$

где

$$A = 2(\mu_1 + \lambda_1)$$
$$B = m_1 \lambda_1 \left[2 + \frac{\mu_1 - \lambda_2}{\lambda_2} \Omega(\mu_1) + \Omega(0) - \frac{\mu_1}{\lambda_2} \Omega(\mu_1) \cdot \Omega(0) \right],$$
$$C = \frac{\lambda_2}{\mu_2} (\mu_1 + \lambda_2 + m_1 \lambda_1) + \frac{m_1 \mu_1 \lambda_1}{\mu_2} \Omega(\mu_1).$$

УДК 681.2/3—192.001.24 : 519.422

И. П. ПАДЕРНО

ВНИИМ

МЕТОД РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ СО СТРУКТУРАМИ МОСТОВОГО ВИДА ПРИ ДВУХ ТИПАХ ОТКАЗОВ ЭЛЕМЕНТОВ

При создании современных сложных измерительных систем, в частности, метрологических систем и систем автоматического управления и контроля, особое внимание уделяется обеспечению их высокой надежности. С целью повышения вероятности безотказной работы систем применяются различные методы резервирования, причем для соединения основных и резервных элементов и образования необходимой структуры системы часто используются специальные устройства, надежность которых не является идеальной. В подобных случаях структуры систем значительно усложняются и, как правило, не могут быть непосредственно сведены к обычным структурам последовательно-параллельного вида, что существенно затрудняет анализ и расчет их надежности. Графы, изоморфные структурам таких систем, получающиеся при замене функциональных элементов ребрами графа, характеризуются наличием циклов и не всегда являются плоскими.

Для расчета показателей надежности подобных систем на практике обычно используют метод логического анализа, заключающийся в составлении логических уравнений, определяющих условия их работоспособности.

Сущность указанного метода в общем случае сводится к выявлению множества всех возможных состояний рассматриваемой системы и выделению подмножества состояний, соответствующих ее работоспособности. Нетрудно видеть, что для системы, содержащей k элементов, общее число ее возможных состояний, в предположении возможности возникновения в каждом из элементов двух типов отказов, равно 3^k . Таким образом, даже при сравнительно небольших значениях k число возможных состояний системы оказывается чрезвычайно большим и выделение подмножества состояний, соответствующих работоспособности системы, является весьма трудоемкой задачей.

При практическом применении этого метода оказывается возможным использовать некоторые специальные приемы, позволяющие существенно облегчить расчет показателей надежности систем.

Наиболее известным приемом является представление структуры системы в виде нескольких структур последовательно-параллельного вида, которые образуются из исходной путем введения ряда предположений о нахождении некоторых элементов в несовместных состояниях, составляющих полную

группу событий. В качестве таких несовместных состояний обычно принимаются состояния работоспособности и отказов обоих типов. В случае, если предположения делаются в отношении мостовых элементов, то общее число структур последовательно-параллельного вида, эквивалентных исходной структуре в отношении надежности,* существенно снижается по сравнению с приведенной выше величиной и становится равным 3^{k_M} (k_M — число мостовых элементов исходной структуры). Однако в ряде случаев и это число оказывается достаточно большим и вызывает необходимость больших затрат времени для расчета показателей надежности.

В подобных случаях целесообразно пользоваться приводимым ниже аналитическим методом расчета показателей надежности систем со структурами мостового вида и неидеальными (в смысле надежности) связями между основными и резервными элементами, позволяющим сводить подобные структуры к структурам последовательно-параллельного вида и пригодным для многих встречающихся в практике случаев.

Приводимый метод предназначен для определения показателей надежности невосстанавливаемых (неремонтируемых) систем, но при небольшой модификации допускает возможность использования его также для определения показателей надежности восстанавливаемых (ремонтируемых) систем.

Модель системы и основные предположения

Система (рис. 1) преобразует входной сигнал $I_{вх}$, подводимый к узловой точке $A_{вх}$, в выходной сигнал $I_{вых}$, снимаемый с точки $A_{вых}$, причем $I_{вых} = f(I_{вх})$, где $f(I_{вх})$ — заданная функция $I_{вх}$.

Система состоит из l основных $\{[1, 0], [2, 0], \dots, [l, 0]\}$ и $n_l < n_l$ резервных $\{[1, 1], [1, 2], \dots, [1, n], [2, 1], [2, 2], \dots, [l, n]\}$ элементов, где n — предельная кратность резервирования. Элементы объединены в l звеньев, ограниченных входами $A_{i-1, j}$ и выходами $A_{i, j}$ ($i = 1, 2, \dots, l, j = 0, 1, \dots, n, A_{вх} \cong A_{-1, j}, A_{вых} \cong A_{l, n}$). Все резервные элементы находятся в режиме нагруженного резерва. Соединение основных и резервных элементов выполняется с помощью неидеальных в отношении надежности элементов $\{[1, 1, c], [1, 2, c], \dots, [1, m_1, c], [2, 1, c], [2, 2, c], \dots, [2, m_2, c]\}$ и т. д., причем все величины m_q ($q = 1, 2, \dots, l-1$) удовлетворяют неравенству $m_q < \frac{n(n+1)}{2}$ по способу, специфичному для каждого звена (способ

соединения элементов, показанный на рис. 1 для звена i , соответствует $m_i = \frac{n(n+1)}{2}$). Сигнал, возникающий в любой узловой точке системы, является логической суммой всех сигналов, подходящих к этой точке.

Отказавшие элементы в процессе эксплуатации системы не заменяются и не исключаются из схемы. Каждый элемент может находиться в трех качественно различных состояниях:

- 1) исправном;
- 2) отказа типа I (пассивного отказа), при котором на выходе элемента всегда отсутствует сигнал, вне зависимости от того, какой сигнал подведен ко входу этого элемента;
- 3) отказа типа II (активного отказа), при котором на выходе элемента всегда имеется определенный сигнал вне зависимости от того, какой сигнал подведен к входу этого элемента.

Вероятности нахождения элемента в этих состояниях определяются соответственно величинами p_r , $(1-p_r)\alpha_r$ и $(1-p_r)(1-\alpha_r)$,** где r — условный индекс элемента в системе.

* В дальнейшем вместо термина «эквивалентный в отношении надежности» будет использоваться термин «эквивалентный».

** Величины p_r и α_r являются функциями времени.

Под пассивным и активным отказами соединительного элемента понимаются соответственно невозможность прохождения через него сигнала в любом направлении и возникновение ложного сигнала на всех его выходах. Переход любого (в том числе соединительного) элемента из исправного состояния в состояние отказа любого типа происходит мгновенно, а каждое состояние отказа считается необратимым (поглощающим). Отказы отдельных элементов считаются независимыми событиями.

Состояние отказа системы, под которым понимается любое нарушение зависимости $I_{\text{вых}} = f(I_{\text{вх}})$, считается необратимым (поглощающим).

Метод расчета

Рассмотрим наиболее общую структуру системы, все звенья которой (кроме звена I) имеют схему звена i , приведенную на рис. 1, т. е. случай n -кратного поэтапного резервирования.

Пусть субструктура L — звено структуры, характеризующееся наличием $n+1$ входов и одного выхода* (рис. 2).

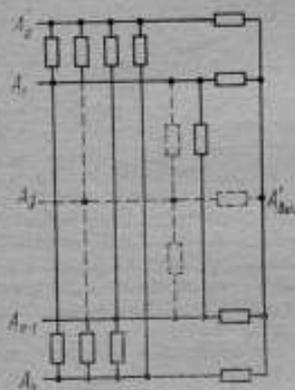


Рис. 2. Схема звена i

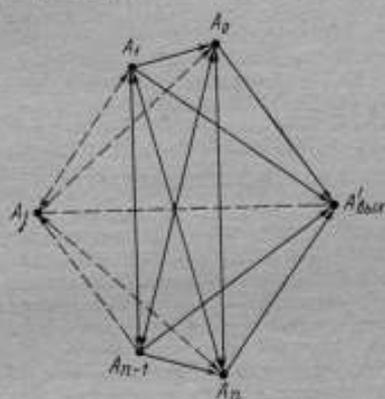


Рис. 3. Граф, изоморфный субструктуре L

Граф, изоморфный субструктуре L (рис. 3), является полным, связным и характеризуется наличием циклов (цикломатическое число графа — $\gamma_L = \frac{n(n+1)}{2}$).

Сущность предлагаемого метода расчета надежности сводится к такой замене субструктуры L эквивалентной ей субструктурой L' , при которой сохраняются все вероятностные характеристики передачи сигналов со всех входов A_0, A_1, \dots, A_n в точку $A_{\text{вых}}$, а также создается возможность уменьшения числа элементов и упрощения первоначальной структуры (при повтор-

* В любой структуре, как следует из определения, не имеется субструктур, сложность (цикломатическое число изоморфного графа) которых превосходит сложность субструктуры L .

** Цикломатическим числом называется увеличенная на единицу разность между числом элементов (ребер графа) и числом входов и выходов субструктуры (вершин графа) при условии, что все участки, содержащие последовательно-параллельные соединения элементов, считаются за один элемент (одно ребро графа).

ном выполнении подобных замен, которые в дальнейшем будут называться трансформациями, структура системы в ряде случаев может быть приведена к последовательно-параллельному виду). Очевидно, что трансформация может считаться приемлемой для практических целей только в том случае, если граф, изоморфный субструктуре L' будет характеризоваться цикломатическим числом $\gamma_L < \gamma_L$. При $\gamma_L = 0$, граф изоморфный субструктуре L' , имеет вид дерева, что эквивалентно последовательно-параллельному виду субструктуры L' , все элементы которой, кроме, возможно, одного, в этом случае могут быть объединены с соответствующими элементами предшествующей субструктуры (например, звена $i-1$).

Эквивалентность субструктур L и L' может быть задана различными способами и выражена в виде системы алгебраических уравнений, связывающих между собой показатели надежности элементов обеих субструктур. Очевидно, что общее число этих уравнений определяется числом различных несовместных (по правильной передаче сигналов с входов субструктуры L на ее выход) состояний субструктуры L .

В качестве таких несовместных состояний, как показывают проведенные исследования, в практически справедливом предположении, что все величины α удовлетворяют условию: $0 < \alpha_i < 1$, наиболее удобно принять следующие условия правильной передачи сигналов в субструктуре L : со всех $n+1$ входов на выход; с любых n входов на выход (сигнал с одного из входов на выход не поступает);

.....
 с любых i входов на выход (сигналы остальных $n+1-i$ входов на выход не поступают);

.....
 с любого одного входа на выход (сигнал с остальных входов на выход не поступает); сигналы ни с одного из входов на выход системы не поступают (или на входе системы всегда имеется определенный сигнал вне зависимости от наличия сигналов на ее входах).

В том случае, если все величины $\alpha = 1$, то последнее условие является следствием всех предшествующих.

Общее число условий эквивалентности субструктур L и L' может быть найдено по формуле:

$$N = \begin{cases} 2^{n+1} & \text{при } 0 < \sum_{i=0}^n \alpha_{i,i} < n+1; \\ 2^{n+1} - 1 & \text{при } \sum_{i=0}^n \alpha_{i,i} = n+1. \end{cases} \quad (1)$$

Предположим, что субструктура L содержит v_i' элементов, каждый из которых характеризуется в отношении надежности не более чем двумя показателями — $p_{i,s}$ и $\alpha_{i,s}$ (s — условный индекс элемента в субструктуре L'), вследствие чего общее число показателей определяется условием: $v_i < N_0 < 2v_i'$.

* Нижний предел соответствует предположению, что все элементы субструктуры L' характеризуются величинами $\alpha_{i,q}'$, равными 1, а верхний — предположению, что все величины $\alpha_{i,q}'$ удовлетворяют условию: $0 < \alpha_{i,q}' < 1$.

Очевидно, для того, чтобы условия эквивалентности могли быть реализованы в виде реальной субструктуры L' , необходимо, чтобы их число удовлетворяло условию $N < N_0$, и, следовательно, условиям:

$$\left. \begin{aligned} 2^n < v_i' \\ 2^{n+1} - 1 < v_i' \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Для возможности упрощения первоначальной структуры величина v_i' должна быть по крайней мере не больше числа элементов субструктуры L , т. е. величины $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Поэтому легко найти, что трансфигурация субструктуры L и L' целесообразна лишь при выполнении условий:

$$\left. \begin{aligned} 2^n < \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ 2^{n+1} - 1 < \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Оба указанных условия выполняются только при $n=0$ и $n=1$, причем случай $n=0$, как не представляющий практического интереса (субструктура L состоит только из одного элемента), рассмотрению не подлежит.

Нетрудно видеть, что при $n=1$ существуют лишь две различные субструктуры A и B , различающиеся способом соединения элементов (рис. 4) и, следовательно, имеются лишь две трансфигурации: первая — переводящая субструктуру A в субструктуру B (трансфигурация типа I) и вторая — переводящая субструктуру B в субструктуру A (трансфигурация типа II).

Имея в виду, что каждая из рассматриваемых субструктур A и B характеризуется в общем случае шестью независимыми параметрами ($\rho_{a,1}, \rho_{a,2}, \rho_{a,3}, \alpha_{a,1}, \alpha_{a,2}, \alpha_{a,3}$ и $\rho_{b,1}, \rho_{b,2}, \rho_{b,3}, \alpha_{b,1}, \alpha_{b,2}, \alpha_{b,3}$), в то время, как число условий эквивалентности не превышает четырех, можно сделать вывод о неоднозначности решения задач о трансфигурациях. С целью устранения этой неоднозначности целесообразно для параметров элементов субструктуры L принять:

— при трансфигурациях типа I

$$\begin{aligned} \alpha_{b,1} &= 1; \\ \alpha_{b,2} &= 1; \end{aligned}$$

— при трансфигурациях типа II

$$\begin{aligned} \alpha_{a,1} &= 1; \\ \alpha_{a,2} &= 1. \end{aligned}$$

При указанных предположениях условия эквивалентности субструктур A и B могут быть записаны в виде уравнений, справедливых при условии, что элемент [а, 3] является соединительным:

— при трансфигурации типа I

$$\left. \begin{aligned} \rho_{a,1}\rho_{a,2}[1 - (1 - \rho_{a,3})(1 - \alpha_{a,3})] + \rho_{a,1}\rho_{a,3}(1 - \rho_{a,2})\alpha_{a,2} + \\ + \rho_{a,2}\rho_{a,3}(1 - \rho_{a,1})\alpha_{a,1} = \rho_{b,1}\rho_{b,2}\rho_{b,3} \\ \rho_{a,1}(1 - \rho_{a,2})(1 - \rho_{a,3})\alpha_{a,2}\alpha_{a,3} = \rho_{b,1}\rho_{b,3}(1 - \rho_{b,2}) \\ \rho_{a,2}(1 - \rho_{a,1})(1 - \rho_{a,3})\alpha_{a,1}\alpha_{a,3} = \rho_{b,2}\rho_{b,3}(1 - \rho_{b,1}) \\ (1 - \rho_{a,1})(1 - \rho_{a,2})\alpha_{a,1}\alpha_{a,2} = (1 - \rho_{b,3})\alpha_{b,3} + (1 - \rho_{b,1})(1 - \rho_{b,2})\rho_{b,3} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

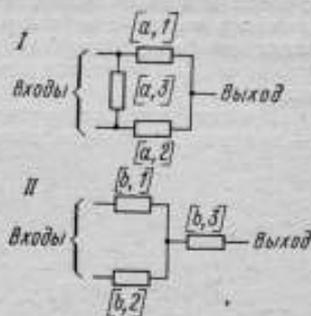


Рис. 4. Способы соединения элементов субструктур

— при трансфигурации типа II

$$\left. \begin{aligned} \rho_{b,1} \rho_{b,2} \rho_{b,3} &= \rho_{a,1} \rho_{a,2} [1 - (1 - \rho_{a,3}) (1 - \alpha_{a,3})] + \\ &+ \rho_{a,1} \rho_{a,3} (1 - \rho_{a,2}) + \rho_{a,2} \rho_{a,3} (1 - \rho_{a,1}) \\ \rho_{b,1} \rho_{b,2} (1 - \rho_{b,3}) \alpha_{b,3} &= \rho_{a,1} (1 - \rho_{a,2}) (1 - \rho_{a,3}) \alpha_{a,3} \\ \rho_{b,2} \rho_{b,3} (1 - \rho_{b,1}) \alpha_{b,1} &= \rho_{a,2} (1 - \rho_{b,1}) (1 - \rho_{a,3}) \alpha_{a,3} \\ (1 - \rho_{b,3}) \alpha_{b,3} + (1 - \rho_{b,1}) (1 - \rho_{b,2}) \rho_{b,2} \alpha_{b,1} \alpha_{b,2} &= (1 - \rho_{a,1}) (1 - \rho_{a,2}) \end{aligned} \right\} (6)$$

В системах (5) и (6) отдельные уравнения соответствуют следующим несовместным состояниям: первое уравнение — правильной передаче сигналов с обоих входов на выход; второе (третье) уравнение — правильной передаче сигналов только с верхнего (нижнего) входа на выход при отсутствии возможности передачи на выход сигналов с нижнего (верхнего) входа; четвертое уравнение — отсутствию возможности передачи сигналов с обоих входов на выход.

Решая указанные уравнения, найдем:

— при трансфигурации типа I

$$\left. \begin{aligned} \rho_{b,1} &= \frac{a_0}{a_1}; \\ \rho_{b,2} &= \frac{a_0}{a_2}; \\ \rho_{b,3} &= \frac{a_1 a_2}{a_0}; \\ \alpha_{b,3} &= (1 - \rho_{a,1}) (1 - \rho_{a,2}) \alpha_{a,1} \alpha_{a,2} \frac{a_0 - \rho_{a,1} \rho_{a,2} (1 - \rho_{a,3})^2 \alpha_{a,3}^2}{a_0 - a_1 a_2} \end{aligned} \right\} (7)$$

где

$$a_0 = \rho_{a,1} \rho_{a,2} \alpha_{a,3} + \rho_{a,1} \rho_{a,2} \alpha_{a,2} + \rho_{a,2} \rho_{a,3} \alpha_{a,1} + \rho_{a,1} \rho_{a,2} \rho_{a,3} \times \\ \times (1 - \alpha_{a,1} - \alpha_{a,2} - \alpha_{a,3}),$$

$$a_1 = \rho_{a,2} \alpha_{a,1} \alpha_{a,3} + \rho_{a,1} \rho_{a,2} \alpha_{a,3} (1 - \alpha_{a,1}) + \rho_{a,1} \rho_{a,3} \alpha_{a,2} + \\ + \rho_{a,2} \rho_{a,3} \alpha_{a,1} (1 - \alpha_{a,3}) - \rho_{a,1} \rho_{a,2} \rho_{a,3} [\alpha_{a,2} - (1 - \alpha_{a,1}) (1 - \alpha_{a,3})]$$

и

$$a_2 = \rho_{a,1} \alpha_{a,2} \alpha_{a,3} + \rho_{a,1} \rho_{a,2} \alpha_{a,3} (1 - \alpha_{a,2}) + \rho_{a,1} \rho_{a,3} \alpha_{a,2} (1 - \alpha_{a,3}) + \\ + \rho_{a,2} \rho_{a,3} \alpha_{a,1} - \rho_{a,1} \rho_{a,2} \rho_{a,3} [\alpha_{a,1} - (1 - \alpha_{a,2}) (1 - \alpha_{a,3})];$$

— при трансфигурации типа II

$$\left. \begin{aligned} \rho_{a,1} &= 1 - \frac{b_3 - b_2}{2\rho_{b,1} (1 - \rho_{b,2}) \alpha_{b,2}}; \\ \rho_{a,2} &= 1 - \frac{b_3 + b_2}{2\rho_{b,2} (1 - \rho_{b,1}) \alpha_{b,1}}; \\ \rho_{a,3} &= 1 - \frac{b_3 \rho_{b,3} + b_0 b_4}{2b_0 (1 - b_0)}; \\ \alpha_{a,3} &= 1 - \frac{2b_0}{b_3 \rho_{b,3} + b_0 b_4} [1 - (1 - \rho_{b,3}) \alpha_{b,3} - \\ &- [\rho_{b,1} (1 - \alpha_{b,1}) + \alpha_{b,1}] [\rho_{b,2} (1 - \alpha_{b,2}) + \alpha_{b,2}] \rho_{b,3}] \end{aligned} \right\} (8)$$

где

$$b_0 = (1 - p_{b,3}) \alpha_{b,3} + (1 - p_{b,1}) (1 - p_{b,2}) p_{b,2} \alpha_{b,1} \alpha_{b,2};$$

$$b_1 = p_{b,1} p_{b,2} (1 - p_{b,1}) (1 - p_{b,2}) \alpha_{b,1} \alpha_{b,2};$$

$$b_2 = [p_{b,2} (1 - p_{b,1}) \alpha_{b,1} - p_{b,1} (1 - p_{b,2}) \alpha_{b,2}] b_0;$$

$$b_3^2 = b_2^2 + 4b_0 b_1$$

$$b_4 = 2[1 - (1 - p_{b,3}) \alpha_{b,3}] - \{p_{b,1} p_{b,2} + (1 - p_{b,1}) (1 - p_{b,2}) \alpha_{b,1} \alpha_{b,2} + [p_{b,1} (1 - \alpha_{b,1}) + \alpha_{b,1}] [p_{b,2} (1 - \alpha_{b,2}) + \alpha_{b,2}]\} p_{b,3}.$$

Аналогичные формулы могут быть получены и в том случае, если элемент [а, 3] в субструктуре А не является соединительным.

Полученные формулы являются обобщением результатов [1] в случае двух типов отказов элементов.

Для одного из наиболее часто встречающихся в практике случаев —

$$p_{a,1} = p_{a,2} = p, \quad \alpha_{a,1} = \alpha_{a,2} = \alpha, \quad \alpha_{a,3} = 1$$

формулы (7) приобретают вид:

$$\left. \begin{aligned} p_{b,1} = p_{b,2} &= \frac{p + 2p_{a,3}(1-p)\alpha}{\alpha + p(1-\alpha) + p_{a,3}(1-p)\alpha} \\ p_{b,3} &= p \frac{[\alpha + p(1-\alpha) + p_{a,3}(1-p)\alpha]^2}{p + 2p_{a,3}(1-p)\alpha} \\ \alpha_{b,3} &= \frac{(1-p)p_{a,3}[2\alpha(1-p) + 2p - pp_{a,3}]\alpha^2}{p(1+p-2\alpha p) + (1-p)[2p_{a,3}(1+p) - p(1+p_{a,3})\alpha]\alpha} \end{aligned} \right\} (9)$$

В практических условиях часто встречаются системы с кратностью резервирования большей 1. Для применения указанного метода к расчету надежности таких систем приходится прибегать к последовательным трансформациям обоих типов и объединению элементов отдельных частей структуры схемы.

Хотя нахождение оптимальной последовательности преобразований, обеспечивающей быстрое приведение рассматриваемой структуры к структуре последовательно-параллельного вида, в отдельных случаях может представить некоторые затруднения, обычно процесс преобразования прост, а правильность его ведения легко проверяется по постепенно уменьшающемуся числу элементов.

При выполнении трансформаций субструктур и объединений элементов следует иметь в виду, что в тех случаях, когда граф, изоморфный структуре системы, не является плоским, применение описанного метода оказывается недостаточно эффективным в смысле обеспечения возможности приведения структуры к последовательно-параллельному виду.

Однако и в подобных случаях описанный метод позволяет существенно упростить расчет надежности метрологических систем и систем управления и контроля, вследствие возможности существенного сокращения числа логических уравнений, определяющих условия исправности систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Падерно И. П. К расчету надежности систем с элементами (узлами) мостового типа. — В сб. «Автоматизация производственных процессов в машиностроении», № 6, 1968, с ил.

Поступила в редакцию 15/IV 1974 г.

УДК 681.2.019.3

Б. И. КОЗЛОВ, А. Э. ФРИДМАН

ПЕРСПЕКТИВЫ ИССЛЕДОВАНИЙ МЕТРОЛОГИЧЕСКОЙ НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Количественная оценка и повышение надежности технических средств являются одной из наиболее актуальных проблем современной техники. Конкретные задачи и методы обеспечения надежности в значительной степени определяются видом технических средств. Применительно к средствам измерений (СИ) такие задачи рассмотрены*.

В настоящее время в основном завершены исследования методов анализа и синтеза надежности средств измерений с учетом отказов функционирования (внезапных отказов) и разработаны научные основы и практические методы оценки сложных измерительных систем по критерию технической эффективности. Теоретически обоснованы и разработаны способы моделирования процесса функционирования измерительных систем со структурой любой сложности, разработан комплекс инженерных способов анализа надежности измерительной техники с целью ее обеспечения в процессе проектирования, исследован ряд задач, являющихся актуальными при эксплуатации СИ.

В связи с этим важное значение приобретает методологический анализ состояния вопроса с целью выделения наиболее перспективных направлений дальнейших исследований.

С точки зрения метрологического обеспечения народного хозяйства страны наиболее важным направлением является теоретическое и экспериментальное исследование метрологической надежности средств измерений.

Под метрологической надежностью понимается свойство СИ сохранять значения своих метрологических характеристик в заданных пределах в течение требуемого времени при определенных условиях эксплуатации. Так как метрологический отказ по характеру проявления является скрытым, очевидно, что метрологическая надежность представляет собой один из основных факторов обеспечения единства и достоверности измерений. Отсюда следует, что оценка качества метрологического обеспечения не может быть полной без учета метрологической надежности средств измерений.

В теоретическом аспекте теория надежности тесно переплетается с теорией погрешности. Действительно, предметом исследования являются закономерности процесса снижения работоспособности СИ, выражающегося в изменении его метрологических характеристик. Основная задача исследова-

* Арутюнов В. О., Козлов Б. И., Татиевский А. Б., Фридман А. Э. Проблема и специфика надежности измерительных устройств. «Измерительная техника», 1968. №3, с. 9—13.

ния — количественная оценка стабильности СИ по известным характеристикам случайных изменений параметров его элементов — предполагает решение задачи надежности (оценка надежности системы по известным данным о надежности элементов) и задачи метрологии (оценка погрешности СИ по известным погрешностям его элементов).

Необходимо отметить сложность теоретических исследований метрологической надежности по сравнению с исследованиями надежности функционирования. Быстрое развитие теории надежности вызвано тем обстоятельством, что для внезапных отказов выполняются два фундаментальных допущения: 1) стационарность во времени потока отказов и 2) независимость надежности элемента изделия от состояния других его элементов.

Эти допущения, приводящие к экспоненциальному закону надежности, позволяя, с одной стороны, разработать эффективные расчетные методы, сводящиеся к анализу лишь внутренней структуры изделия и условий его эксплуатации, с другой стороны, существенно упростить сбор, анализ и представление исходных данных о надежности комплектующих элементов.

Указанные допущения заводом не выполняются для метрологических отказов, что не позволяет применить для анализа метрологической надежности СИ развитый аппарат статистических оценок надежности на основе λ -характеристик. Более перспективным является физико-статистический подход, заключающийся в исследовании физических закономерностей возникновения метрологических отказов на основе изучения кинетики физико-химических процессов в материалах и деталях, вызывающих дрейф метрологических характеристик, построении физической модели нестабильности СИ и определении распределений случайных параметров этой модели как функций схемы и конструкции СИ, технологических разбросов и констант протекающих физико-химических процессов.

Естественно, что такие исследования являются значительно более сложными. Кроме того, их результаты обладают, как правило, невысокой степенью общности. Поэтому представляется целесообразным разработать пусть приближенные, но зато универсальные физические модели нестабильности СИ и определить зависимости для распределений параметров этих моделей.

Особую остроту сегодня приобретает задача создания методов экспериментальной оценки метрологической надежности СИ. Обычно перед серийным выпуском новых образцов СИ экспериментально определяются фактические показатели надежности. Однако при этом возникают трудности, связанные с большой продолжительностью таких испытаний. Действительно, в соответствии с ГОСТ 8002—71 * минимальное значение межповерочного интервала равно одному году. Очевидно, что для обоснованного подтверждения требуемого уровня метрологической надежности необходимо проводить испытания продолжительностью не менее года. Но такие длительные испытания задерживают выпуск новой, более совершенной продукции, являясь фактически тормозом технического прогресса в приборостроении. Выходом из создавшегося положения может явиться организация комплекса мероприятий, включающего в себя:

- разработку теории и методов проведения сокращенных испытаний надежности с прогнозированием во времени значений метрологических характеристик на основе известной математической модели нестабильности СИ;
- сбор, анализ и использование в новых разработках информации по надежности приборов и отдельных узлов-аналогов;
- теоретическое обоснование и организационное оформление системы подконтрольной эксплуатации и др.

Эффективным способом обеспечения метрологической надежности является разработка и реализация научно обоснованных методов эксплуатации средств измерений. С этой целью необходимо исследовать влияние на метрологическую надежность основных организационно-технических мероприятий по обслуживанию СИ (поверки, ремонта, профилактики, транспортировки и т. п.) и разработать методы определения параметров и правил проведения указанных мероприятий (например, структуры поверочной схемы, значений межповерочных интервалов, показателей качества ремонта, периодичности,

объема и глубины профилактических проверок, методов отбраковки при поверке и т. д.) с учетом метрологической надежности.

В качестве вывода, отметим, что хотя названные направления исследований и не исчерпывают проблемы надежности средств измерений полностью, однако, их ускоренное развитие является необходимым условием ее решения.

УДК 519.251.4/5 : 681.2/3—182

М. А. КУЗЬМИНА, И. П. КУЗЬМИН

ВНИИМ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ МНОГОКАНАЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Оценка надежности системы сбора и обработки информации, подобной изображенной на рисунке, не укладывается в традиционные рамки [1], если принять во внимание следующие ее особенности:

1. На вход системы поступает поток заявок, каждая из которых представляет собой r -мерный вектор, т. е. характеризуется r признаками a, b, \dots, l, \dots, x . Заявка считается обслуженной, если правильно определены и выданы в обработанном виде потребителям (через устройства выдачи информации B_1, \dots, B_r) все ее признаки;

2. Каждый признак заявки характеризуется совокупностью дискретных значений. Для приема данного значения признака предназначен только один канал. В момент обслуживания заявки в каждом устройстве приема признака $l \in \{1, \dots, r\}$ (участок l на рисунке) занят только один канал $l_i \in \{1_i, \dots, p_i\}$, остальные каналы бездействуют и, следовательно, их отказ на обслуживание данной заявки влияния не оказывает;

3. В системе имеется избыточность, обусловленная эпизодичностью ее работы, тем большая, чем меньше интенсивность поступления заявок и длительность обслуживания каждой заявки.

Перечисленные особенности указывают на отсутствие прямой связи между отказом отдельного устройства и отказом всей системы. Под отказом системы понимается событие, заключающееся в потере заявки, обусловленной выходом из строя устройств, причем отказ и последующее восстановление отказавшего устройства могут происходить в промежутке времени, в течение которого заявка вообще не поступит.

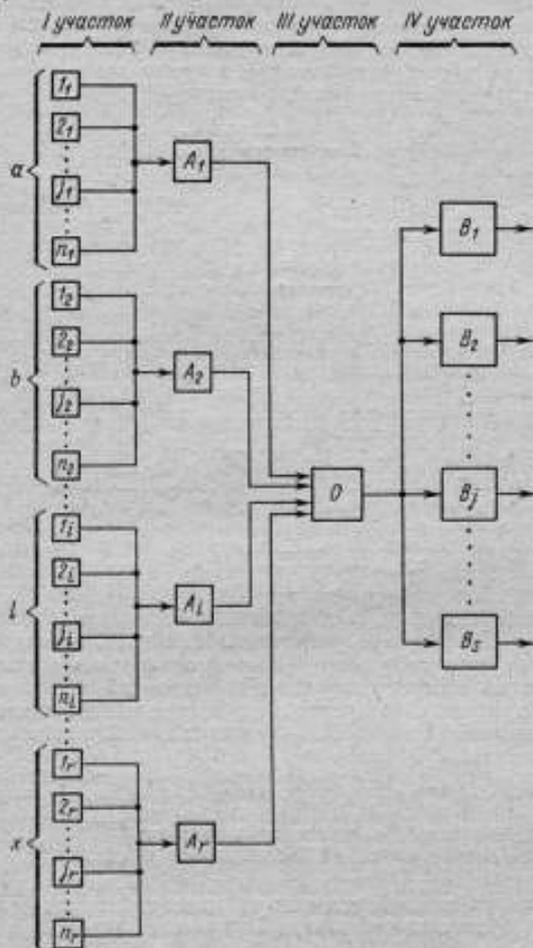
Выбор того или иного показателя надежности зависит от требований, предъявляемых к системе, которые, в свою очередь, являются функцией степени важности заявок, обслуживаемых системой. Если система обслуживает ответственные заявки (потеря заявки приводит к катастрофическим последствиям), то к ней, обычно, предъявляется требование обслужить все заявки, которые поступят в течение рассматриваемого отрезка времени t .

Показателем надежности системы в этом случае является вероятность безотказной работы $P(t)$, т. е. вероятность того, что все заявки, поступившие в течение времени t , будут обслужены. Если же обслуживаемые системой заявки неответственные, то к ней предъявляют требование обслужить возможно большее число заявок. В этом случае надежность функционирования системы можно охарактеризовать математическим ожиданием числа обслуженных ею заявок либо интенсивностью потока обслуженных заявок.

Рассмотрим систему, обслуживающую ответственные заявки. В качестве основных допущений примем следующие:

1) отказы отдельных устройств блок-схемы — события случайные и независимые;

2) потоки отказов отдельных устройств системы простейшие с параметрами: $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ — для каналов I участка соответственно; $\lambda_{A_1}, \dots, \lambda_{A_r}$, $\lambda_0, \lambda_{B_1}, \dots, \lambda_{B_s}$ — для устройств анализа A_1, \dots, A_r , устройства обработки O и устройств вывода B_1, \dots, B_s соответственно;



Блок-схема системы сбора и обработки информации

3) распределение времени восстановления устройств — экспоненциальное с параметрами $\mu_1, \dots, \mu_r, \mu_{A_1}, \dots, \mu_{A_r}, \mu_0, \mu_{B_1}, \dots, \mu_{B_s}$ соответственно;

4) поток заявок — простейший с параметром v ;

5) время обслуживания любой заявки детерминировано и равно θ .

Определим вероятность безотказной работы системы для случая, когда устройства системы не восстанавливаются; потребители получают информацию в том случае, если откажут не более m из s устройств типа B ; распределение значений каждого признака заявки равномерное.

Вероятность поступления N заявок в течение времени t равна

$$\frac{(vt)^N}{N!} e^{-vt}.$$

Процесс занятия каналов каким-либо признаком заявки в данном случае равносильна схеме выбора без возвращения [2]. Вероятность того, что в течение времени t потребуется канал j_i , в предположении равновероятного распределения значений признака l , согласно [2], равна

$$1 - \left(\frac{n_i - 1}{n_i} \right)^N.$$

Вероятность того, что в течение времени t выйдет из строя k каналов, принимающих признак l , равна

$$\frac{(\lambda_i t)^k}{k!} e^{-\lambda_i t}.$$

Вероятность того, что среди k отказавших в течение времени t каналов будет j_i канал, в предположении равнонадежности каналов, равна k/n_i .

Вероятность того, что в течение времени t признак l не будет принят, на основании приведенных выше выражений, равна

$$Q_i(t) = \int_0^t \sum_{k=1}^{n_i} \frac{(\lambda_i x)^k}{k!} e^{-\lambda_i x} \frac{k}{n_i} \sum_{N=1}^{N_{\max}} \frac{[v(t-x)]^N}{N!} e^{-v(t-x)} \times \\ \times \left[1 - \left(\frac{n_i - 1}{n_i} \right)^N \right] dx, \quad (1)$$

где $N_{\max} = \text{entier}(t/\theta)$.

Данное выражение можно упростить, если предположить, что система работает длительное время, в течение которого поступает достаточно большое число заявок, и что обслуживание каждой отдельной заявки занимает сравнительно мало времени. Это предположение применимо к достаточно большому числу систем сбора и обработки информации. С учетом принятых предположений, выражение (1) имеет вид

$$Q_i(t) = \frac{1}{n_i} \int_0^t \sum_{k=1}^{n_i} \frac{(\lambda_i x)^k}{(k-1)!} e^{-\lambda_i x} (1 - e^{-v(t-x)}) dx, \quad (2)$$

На основании известной теоремы об интегрировании функциональных рядов формулу (5) перепишем в виде

$$Q_i(t) = \frac{1}{n_i} \left[\sum_{k=1}^{n_i} \frac{\lambda_i^k}{(k-1)!} \int_0^t x^k e^{-\lambda_i x} dx - e^{-vt} \sum_{k=1}^{n_i} \frac{\lambda_i^k}{(k-1)!} \times \right. \\ \left. \times \int_0^t x^k e^{(v-\lambda_i)x} dx \right], \quad (3)$$

Интегралы в данной формуле являются табличными. В соответствии с приведенной блок-схемой вероятность безотказной работы системы можно определить по формуле:

$$P(t) = \prod_{i=1}^r [1 - Q_i(t)] P_{A_i}(t) P_o(t) P_{IV}(t), \quad (4)$$

где $P_{A_i}(t)$, $P_0(t)$ — вероятности безотказной работы в течение времени t устройства A_i и O соответственно;

$P_{IV}(t)$ — вероятность безотказной работы IV участка блок-схемы.

Вероятности P_{A_i} , P_0 , P_{IV} определяются по общей формуле:

$$P_{\alpha}(t) = 1 - \int_0^t \sum_{N=1}^{N_{\max}} P(N, t) P(t_N + N\theta > x) dF_{\alpha}(x) dx, \quad (5)$$

где $dF_{\alpha}(x)$ — вероятность отказа устройства α в интервале, $(x, x + dx)$;

$P(N, t)$ — вероятность того, что в промежутке времени $(0, t)$ поступит N заявок;

$P(t_N + N\theta > x)$ — вероятность того, что до момента x обслуживание N заявок не будет завершено;

t_N — суммарное время между обслуживаниями заявок ($t_N = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_N$), где τ_1 — момент поступления первой заявки, τ_2 — промежуток времени от момента окончания обслуживания первой заявки до момента поступления второй заявки и т. д.

В предположении о том, что величины τ_1, \dots, τ_N и время безотказной работы устройства α распределены по экспоненциальному закону, а также о том, что $\theta \ll t$, преобразуем формулу (5)

$$P_{\alpha}(t) = 1 - \int_0^t \sum_{N=1}^{N_{\max}} \frac{(vt)^N}{N!} e^{-vt} \sum_{r=0}^{N-1} \frac{(vx)^r}{r!} e^{-vx} \lambda_{\alpha} e^{-\lambda_{\alpha} x} dx, \quad (6)$$

Формула (6) может использоваться для вычисления только вероятностей P_{A_i} и P_0 , так как предположение о распределении времени безотказной работы в соответствии с экспоненциальным законом к участку IV в целом не применимо.

Для вычисления $P_{IV}(t)$ необходимо в формулу (5) подставить следующее выражение:

$$P_{IV}(t) = \sum_{l=\sigma+1}^{\sigma} C_l^{\sigma} P_B^{l-1}(t) [1 - P_B(t)]^l, \quad (7)$$

где $P_B(t)$ — вероятность безотказной работы одного устройства вывода информации в течение времени t (предполагается, что устройства B_1, \dots, B_{σ} равнонадежны).

Рассмотрим случай, когда восстановление устройств системы возможно, а для обеспечения потребителей информацией необходимо, чтобы все устройства типа B были исправны. Предположим, что отказ любого устройства обнаруживается мгновенно и число восстановлений не ограничено.

Для общности допустим, что значения признаков заявок распределены неравномерно, т. е. существуют определенные вероятности того, что признак l поступившей в систему заявки имеет значение l_{ji} , т. е. займет канал ji .

Пусть в течение времени t в систему поступило N заявок (вероятность этого события определяется выражением $(\frac{vt}{N!})^N e^{-vt}$). Тогда из N значений признака l в ji канал поступит в среднем

$$N_{ji} = P_{ji} N \quad (8)$$

одинаковых значений.

Условная вероятность приема l_{ji} каналом одного значения признака l , вычисляемая при условии, что признак l_{ji} поступил, равна

$$P_{ji}(t) = K_{ji} P_{ji}(\theta) = \frac{\mu_{ji}}{\mu_{ji} + \lambda_{ji}} e^{-\lambda_{ji} \theta}, \quad (9)$$

где $K_{rj}t$ — коэффициент готовности j -го канала;
 $P_{ji}(t)$ — вероятность безотказной работы в течение времени t j -го канала.

Условная вероятность приема j каналом N_{ji} значений признака l определяется формулой

$$P_{ji}(N) = [P_{ji}(1)]^{N_{ji}}. \quad (10)$$

Условная вероятность приема всех N значений признака l участком определяется формулой

$$P_l(N) = \prod_{j=1}^{n_l} P_{ji}(N). \quad (11)$$

Безусловная вероятность приема всех N значений признака l участком I определяется формулой:

$$P_{II}(N) = \frac{(vt)^N}{N!} e^{-vt} \prod_{j=1}^{n_l} P_{ji}(N), \quad (12)$$

а безусловная вероятность обслуживания всех N значений признака l участком II формулой:

$$P_{III}(N) = P_{II}(N) [P_{AI}(1)]^N = P_{II}(N) \left[\frac{\mu_A}{\mu_A + \lambda_A} e^{-\lambda_A \theta} \right]^N. \quad (13)$$

где $P_{AI}(1)$ — условная вероятность обслуживания устройством одного значения признака l .

Вероятность того, что на вход устройства O поступят все N заявок определяется формулой:

$$P_{\text{вх}}(N) = \prod_{l=1}^r P_{III}(N). \quad (14)$$

Безусловная вероятность того, что устройство O обслужит все N заявок, определяется формулой:

$$P_{III}(N) = P_{\text{вх}}(N) [P_0(1)]^N = P_{\text{вх}}(N) \left[\frac{\mu_0}{\mu_0 + \lambda_0} e^{-\lambda_0 \theta} \right]^N, \quad (15)$$

где $P_0(1)$ — условная вероятность обслуживания устройством O одной заявки.

Безусловная вероятность того, что все N заявок, поступивших в течение времени t , будут выданы потребителям, определяется формулой:

$$P_{IV}(N) = P_{III}(N) P_B(N) = P_{III}(N) \left[\prod_{j=1}^s \frac{\mu_{Bj}}{\mu_{Bj} + \lambda_{Bj}} e^{-\lambda_{Bj} \theta} \right]^N, \quad (16)$$

где $P_B(N)$ — условная вероятность того, что каждое устройство типа B обслужит все N заявок.

Вероятность того, что все заявки, поступившие в течение времени t , будут обслужены, т. е. вероятность безотказной работы системы, определяется формулой

$$P(t) = \sum_{N=1} P_{IV}(N) = \sum_{N=1} \frac{(vt)^N}{N!} e^{-vt} \prod_{l=1}^r \prod_{j=1}^{n_l} \left(\frac{\mu_l}{\mu_l + \lambda_l} \right)^{N_{lj}} e^{-N_{lj} \lambda_l \theta} \times \\ \times \left(\frac{\mu_A \mu_0}{(\mu_A + \lambda_A)(\mu_0 + \lambda_0)} \right)^N e^{-(\lambda_A + \lambda_0) N \theta} \left[\prod_{j=1}^s \frac{\mu_{Bj}}{\mu_{Bj} + \lambda_{Bj}} \right]^N \times \\ \times e^{-(\lambda_{B1} + \dots + \lambda_{B_s}) N \theta}. \quad (17)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Козлов Б., Ушаков И. Справочник по расчету надежности. «Советское радио», 1966, 432 с., с ил.
 2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. I. «Мир», 1967, 489 с., с ил.
- Поступила в редакцию 15/IV—1974 г.

УДК 681.2/3—192

Б. И. КОЗЛОВ

ВНИИМ

ВЛИЯНИЕ РЕМОНТОПРИГОДНОСТИ И БЕЗОТКАЗНОСТИ НА КАЧЕСТВО ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим многоканальные (многофункциональные) измерительные системы, принадлежащие классу сложных технических систем и сменяющие в процессе функционирования три состояния: номинальное (0), ограниченной работоспособности (1) и неработоспособное (2). Граф состояний систем такого рода представлен на рис. 1. По графу* получено следующее выражение комплексного показателя качества функционирования систем данного класса технической эффективности W :

$$W = \frac{\mu_2 (\mu_1 + \lambda_2 + \alpha \lambda_1)}{\mu_2 (\mu_1 + \lambda_1 + \lambda_2) + \mu_1 \lambda_2 + \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2)}, \quad (1)$$

где α — эффективность функционирования в состоянии 1.

Решим важную для практики проектирования задачу оценки влияния ремонтпригодности и безотказности рассматриваемых систем на качество их функционирования.

Эта задача возникает каждый раз, когда при ограниченных общих ресурсах (при ограничении веса, габаритов и стоимости системы) необходимо:

- а) найти такие $\Delta \lambda_i, \Delta \mu_i$ ($i = 1, 2, 3$), чтобы

$$\Delta W = W^{(2)} - W^{(1)} = \max;$$

- б) найти такие $\Delta \lambda_i, \Delta \mu_i$ ($i = 1, 2, 3$), чтобы

$$\Delta W = W^{(2)} - W^{(1)} > W - W^{(1)},$$

где ΔW — приращение технической эффективности;

$W^{(1)}$ — техническая эффективность номинального варианта системы;

$W^{(2)}$ — техническая эффективность рационального варианта системы;

W — заданное значение технической эффективности.

Решение задачи сводится к исследованию зависимости вида

$$\Delta W = \Delta W (\lambda_i, \mu_i, \Delta \lambda_i, \Delta \mu_i)$$

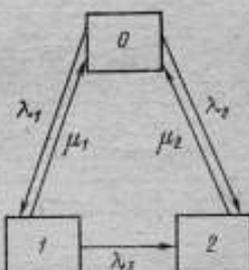


Рис. 1. Граф процесса функционирования $\mu_i, \lambda_i, \lambda_j$ ($i, j = 0, 1, 2$) λ_i, μ_i ($i = 1, 2, 3$) — интенсивности переходов системы из состояния в состояние

* См. статью Б. И. Козлова и А. Э. Фридмана «Методика аналитической оценки технической эффективности измерительных систем» на стр. 93—64.

при соблюдении ограничений величин

$$a_i < \lambda_i < A_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$b_i < \mu_i < B_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

и выполнении неравенств, выражающих ограничение затрат:

$$c(\lambda_i, \mu_i, \Delta\lambda_i, \Delta\mu_i) \quad (i = 1, 2, 3) < \epsilon \text{ для случая а)}$$

и

$$c_1(\lambda_i, \mu_i, \Delta\lambda_i, \Delta\mu_i) \quad (i = 1, 2, 3) = \min \text{ для случая б).}$$

Рассмотрим общий случай $\Delta W = F(\Delta x)$.

Пусть параметр системы x , получим приращение Δx . Тогда

$$\Delta W(x) = W(x + \Delta x) - W(x),$$

где $W(x)$ — дробно-линейная функция переменного x вида

$$W(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{i=0}^n b_i x^i}.$$

По формуле Тейлора имеем

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (\Delta x)^k = \sum_{k=0}^m \sum_{i=0}^{m-k} \frac{i+k}{k! i!} a_{i+k} x^i (\Delta x)^k + \\ &+ 0 [(\Delta x)^m] = \sum_{k=0}^m A_k(x) (\Delta x)^k + 0 [(\Delta x)^m], \end{aligned}$$

где

$$A_k(x) = \sum_{i=0}^{m-k} C_{i+k}^k a_{i+k} x^i,$$

$$C_{i+k}^k = \frac{(i+k)!}{k! i!} \quad \text{и} \quad g(x + \Delta x) = \sum_{k=0}^n B_k(x) (\Delta x)^k + 0 [(\Delta x)^n],$$

$$B_k(x) = \sum_{i=0}^{n-k} C_{i+k}^k b_{i+k} x^i;$$

тогда

$$\Delta W(x) = \frac{\sum_{k=0}^m A_k(x) (\Delta x)^k \sum_{i=0}^n b_i x^i - \sum_{i=0}^n B_k(x) (\Delta x)^k \sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{k=0}^n B_k(x) (\Delta x)^k \sum_{i=0}^n b_i x^i}$$

или, с учетом того, что

$$\sum_{k=0}^m A_k(x) (\Delta x)^k \sum_{i=0}^n b_i x^i = \sum_{k=0}^m (\Delta x)^k \sum_{i=0}^{m-k} C_{i+n}^k a_{i+k} \sum_{j=0}^n b_j x^{j+1}.$$

найдем

$$\Delta W(x) = \frac{\sum_{k=0}^m \alpha_1(k, x) (\Delta x)^k - \sum_{k=0}^n \alpha_2(k, x) (\Delta x)^k}{\sum_{k=0}^n \alpha_3(k, x) (\Delta x)^k}, \quad (2)$$

где

$$\alpha_1(k, x) = \sum_{i=0}^{m-k} C_{i+k}^i a_{i+k} \sum_{s=1}^{n+i} b_{s-1} x^s;$$

$$\alpha_2(k, x) = \sum_{i=0}^{m-k} C_{i+k}^i b_{i+k} \sum_{s=1}^{m+i} a_{s-1} x^s;$$

$$\alpha_3(k, x) = \sum_{i=0}^{n-k} C_{i+k}^i b_{i+k} \sum_{s=1}^{n+i} b_{s-1} x^s.$$

После вычислений по формуле (2) с учетом (1) с достаточной для практики степенью точности получаем

$$\Delta W(\lambda_1) \approx - \frac{W^2 (\mu_1 + \lambda_2) [(1-\alpha)\mu_2 + \lambda_3 - \alpha\lambda_2]}{\mu_2 (\mu_1 + \lambda_2 + \alpha\lambda_1)^2} \Delta\lambda_1; \quad (3)$$

$$\Delta W(\lambda_2) \approx - W^2 \frac{(\mu_1 + \lambda_2) \Delta\lambda_2}{\mu_2 (\mu_1 + \lambda_2 + \alpha\lambda_1)}; \quad (4)$$

$$\Delta W(\lambda_3) \approx - W^2 \frac{\lambda_1 [\mu_1 - (1-\alpha)\mu_2 + \alpha(\lambda_1 + \lambda_2)]}{(\mu_2 + \lambda_3 + \alpha\lambda_1)^2} \Delta\lambda_3; \quad (5)$$

$$\Delta W(\mu_1) \approx W^2 \frac{\lambda_1 [(1-\alpha)\mu_2 + \lambda_3 - \alpha\lambda_2] \Delta\mu_1}{\mu_2 (\mu_1 + \lambda_2 + \alpha\lambda_1)^2 (1 + \delta\mu_1)}; \quad (6)$$

$$\Delta W(\mu_2) \approx W^2 \frac{[\lambda_2 (\mu_1 + \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_3] \Delta\mu_1}{\mu_2^2 (\mu_1 + \lambda_2 + \alpha\lambda_1) (1 + \delta\mu_2)}, \quad (7)$$

где $\delta\mu = \frac{\Delta\mu}{\mu}$ — относительное приращение.

Анализ формул (3) — (7) позволяет сделать вывод о том, что уменьшение величины λ_3 целесообразно лишь при условии выполнения неравенства

$$(1-\alpha)\mu_2 < \mu_1 + \alpha(\lambda_1 + \lambda_2). \quad (8)$$

При выполнении неравенства (8) для случая $\Delta\lambda_i = \Delta\lambda_2$ целесообразны затраты на уменьшение величины λ_2 , а при выполнении обратного неравенства — на уменьшение величины λ_1 , если одинаковые изменения величин λ_1 и λ_2 равнозначны по стоимости. При одинаковых затратах на одинаковые относительные приращения величин $\delta\lambda_1$ и $\delta\mu_1$ целесообразно уменьшить λ_1 , а не увеличивать μ_1 .

Если выполняется неравенство

$$(1-\alpha)\mu_2 > \frac{\lambda_2 (\mu_1 + \lambda_2 + \alpha\lambda_1)^2}{\lambda_1 \mu_1}, \quad (9)$$

то при $\Delta\mu_1 = \Delta\mu_2$

$$\Delta W(\mu_1) > \Delta W(\mu_2).$$

а при выполнении обратного неравенства

$$\Delta W(\mu_1) < \Delta W(\mu_2).$$

Следовательно, при выполнении неравенства (9) целесообразно увеличивать μ_1 , а при выполнении обратного неравенства μ_2 .

На рис. 2 представлены зависимости приращений технической эффективности от относительных приращений интенсивностей переходов.

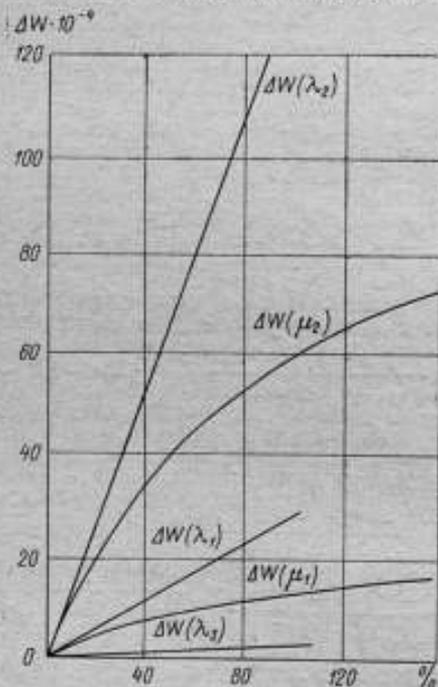


Рис. 2. График зависимости ΔW от относительных приращений интенсивностей переходов

Построение аналогичных графиков для различных вариантов систем позволяет на этапе проектирования выбрать наиболее эффективный способ повышения качества функционирования и определить узлы и элементы конструкции, применение которых может существенно улучшить конечные результаты разработки.

УДК 518.5 : 681.2/3—192.001.57

П. И. ПАДЕРНО
ВНИИМ

ПРИМЕНЕНИЕ ЭЦВМ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ СЛОЖНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

В связи с расширяющейся сферой применения средств измерений в настоящее время все более актуальной становится проблема оценки качества их функционирования [3].

Особенно важным представляется создание общего алгоритма, позволяющего производить такие оценки с помощью ЭЦВМ. Однако создание об-

щего алгоритма затруднено тем, что современные измерительные системы состоят из большого числа блоков, обладают сложной внутренней структурой [1] и могут быть использованы для различных целей.

Критерием качества функционирования измерительной системы в нашем случае будет техническая эффективность.

Для анализа и оценки показателей надежности и технической эффективности с помощью ЭЦВМ [2] необходимы создание обобщенной математической модели, описывающей функционирование ИС, алгоритмизация этой модели и создание типовой программы, реализующей этот алгоритм.

Эта задача, в свою очередь, распадается на две:

1. Алгоритмизация процесса построения модели, однозначно соответствующей структуре исследуемой ИС. Это необходимо для формализации структуры ИС для ввода в ЭЦВМ.

2. Создание алгоритма расчета показателей надежности и технической эффективности ИС при известных данных об отказавших блоках.

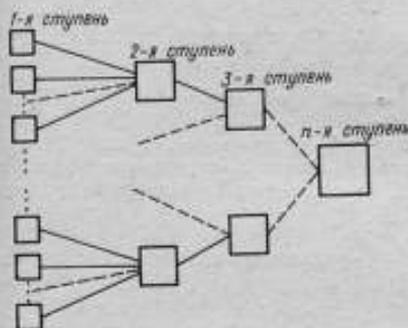


Рис. 1. ИС, граф структуры которой является деревом

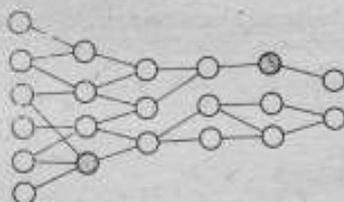


Рис. 2. Пример нерархической структуры ИС

Методы решения этих задач существенно различаются при различных видах структуры ИС.

Ниже будут рассматриваться ИС, у которых:

1) граф структуры ИС является деревом (рис. 1);

2) ИС имеет нерархическую структуру (рис. 2).

Рассмотрим создание общего алгоритма для ИС первого вида.

Будем полагать, что $0 < \omega(t) < 1$, причем при полной исправности всех блоков системы $\omega(t) = 1$.

Обозначим: n — число ступеней (рангов) ИС;

k_i — число блоков на i -й ступени ($i = 1, 2, \dots, n$);

a_{ij} — i -й блок j -й ступени ($i = 1, 2, \dots, k_j$).

В дальнейшем будем полагать, что блок может либо нормально функционировать, либо находиться в состоянии отказа.

Каждому блоку a_{ij} соответствует группа блоков $a_{c_{1j}/n}, a_{c_{2j}/n}, \dots, a_{c_{r_j j}/n}$, находящихся на n -й ступени, измерительная информация с которых передается (регистрируется) посредством блока a_{ij} . Пусть при полной исправности всех блоков системы произошел отказ блока a_{ij} , в результате которого техническая эффективность системы стала W_{ij} .

Величину $\beta_{ij} = 1 - W_{ij}$ будем называть информационным весом блока a_{ij} . Следует отметить, что β_{ij} является коэффициентом значимости блока a_{ij} , т. е. отражает влияние блока a_{ij} на качество функционирования. Назовем величину δ_{ij} индексом работоспособности.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 - a_{ij} & \text{— функционирует нормально.} \\ 0 - a_{ij} & \text{— в состоянии отказа.} \end{cases}$$

Множество блоков, функционирование или отказ которых в случае отказа блока a_{ij} не влияет на качество функционирования ИС, будем называть сферой влияния этого блока и обозначим его \hat{a}_{ij} . Математически это определение выглядит следующим образом:

$$a_{mi} \in \hat{a}_{ij} \Leftrightarrow W(t/\delta_{ij} = 0, \delta_{mi} = 1) = W(t/\delta_{ij} = 0, \delta_{mi} = 0). \quad (1)$$

Несложно показать, что из (1) следует, что

$$a_{mi} \in \hat{a}_{ij} \Leftrightarrow \hat{a}_{mi} \subset \hat{a}_{ij} \quad (2)$$

и, кроме того,

$$\beta_{ij} = \sum_k \beta_{kj+1} = \dots = \sum_l \beta_{ln}. \quad (3)$$

$$a_{kj+1} \in \hat{a}_{ij} \quad a_{ln} \in \hat{a}_{ij}$$

Следует заметить, что соотношения (2) и (3), а также соотношение:

$$\sum_{i=1}^{k_i} \beta_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

справедливы только для ИС без структурной избыточности.

Из (1), (2) и (3) видно, что отказ любого блока a_{ij} можно рассматривать как отказ группы блоков n -й ступени, принадлежащих его сфере влияния.

$\bigcup_{a_{in} \in \hat{a}_{ij}}$ a_{in} и, следовательно, вместо $2^{\sum_{i=1}^n k_i}$ различных возможных состояний системы достаточно учесть лишь 2^{k_n} состояний, что упрощает проведение расчетов.

Каждому блоку a_{ij} сопоставим вектор:

$$\bar{z}_{ij} = \begin{pmatrix} \delta_{1n_{ij}} \\ \vdots \\ \delta_{k_n n_{ij}} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где

$$\delta_{ln_{ij}} = \begin{cases} 0 & a_{ln} \in \hat{a}_{ij} \\ 1 & a_{ln} \notin \hat{a}_{ij} \end{cases}$$

Введем следующее определение. Логическим произведением двух n -мерных векторов a и b является n -мерный вектор c , i -й элемент которого есть логическое произведение i -х элементов векторов a и b , т. е.

$$c = a \wedge b = \begin{pmatrix} a_1 \wedge b_1 \\ a_2 \wedge b_2 \\ \vdots \\ a_n \wedge b_n \end{pmatrix}.$$

Нетрудно показать, что логическое умножение векторов обладает свойствами коммутативности и ассоциативности.

Рассмотрим состояние ИС, при котором отказали блоки $a_{i_1 j_1}, a_{i_2 j_2}, \dots, a_{i_l j_l}$. В этом случае техническая эффективность ИС может быть рассчитана по формуле:

$$W(t) = \beta (\bar{z}_{i_1 j_1} \wedge \bar{z}_{i_2 j_2} \wedge \dots \wedge \bar{z}_{i_l j_l}), \quad (6)$$

где

$$\beta = (\beta_{1n}, \beta_{2n}, \dots, \beta_{kn}).$$

Заметим, что матрица

$$\Delta = (\delta_{1n}, \dots, \delta_{kn}, \delta_{1n-1}, \dots, \delta_{k1})$$

полностью характеризует внутреннюю структуру ИС, причем первые k_n столбцов матрицы Δ образуют матрицу $I-E$, где I — квадратная матрица из единиц, а E — единичная матрица.

Матрица Δ , вектор β и характеристики отказов и восстановлений всех блоков являются исходными данными для определения надежности и технической эффективности рассматриваемой системы. Количество исходных данных (V) легко подсчитать

$$V = k_n \sum_{i=1}^{n-1} k_i + k_n + 2 \sum_{i=1}^n k_i. \quad (7)$$

Можно считать, что если для каких-либо двух блоков системы выполняется условие

$$\hat{a}_{ij} = \hat{a}_{ml}, \quad (8)$$

то с точки зрения надежности они представляют собой один блок. Отсюда следует, что

$$2k_n > \sum_{i=1}^n k_i. \quad (9)$$

Тогда

$$V < k_n^2 + 5k_n. \quad (10)$$

Отсюда следует, что при $k_1 > 6$

$$V < 2k^{kn}. \quad (11)$$

Заметим, что в современных ИС число блоков на n -й ступени — это число измеряемых параметров, которое достигает десятков и даже сотен, и, следовательно, неравенство (11) выполняется для реальных систем.

Для построения математической модели ИС с иерархической структурой рассмотрим матрицу размерности $k_{j+1} \times k_j (N_j)$, элементы которой определяются из условия:

$$n_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{— при наличии связи между блоками } a_{i,j+1} \text{ и } a_{kj} \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases} \quad (*)$$

Несложно доказать, что матрицы N_1, N_2, \dots, N_{n-1} однозначно определяют структуру исследуемой ИС. Проанализировав множество ИС, структуры которых содержат одинаковые количества блоков на ступенях с равными номерами, т. е. отличаются лишь связями между блоками, нетрудно показать, что оно может быть взаимнооднозначно сопоставлено (отображено «на») множеству наборов матриц, размерности которых определены в (*). Это показывает единственность представления структуры ИС в качестве исходных данных. Векторы весовых коэффициентов [2] для блоков n -й ступени $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k_n})$, причем

$$\sum_{i=1}^{k_n} \beta_i = 1. \quad (12)$$

Рассмотрим алгоритм расчета технической эффективности (суммарного весового коэффициента) на выходе ИС при условии, что отказали блоки

$$a_{i_1 j_1}, a_{i_2 j_2}, \dots, a_{i_k j_k} \quad (1 < j_l < n, 1 < i_l < k_l). \quad (13)$$

Не умаляя общности, будем полагать, что

$$1 < j_1 < j_2 < \dots < j_k. \quad (14)$$

т. е. блоки уже упорядочены по вторым индексам (по номерам ступеней). Из (14) выделяются группы равных номеров

$$(i_1, i_2, \dots, i_{j_1}), (i_{j_1+1}, \dots, i_{j_2}), \dots, (i_{j_{p-1}+1}, \dots, i_{j_p}), \quad (15)$$

где

$$p < k. \quad (16)$$

Равенство в (16) достигается лишь в том случае, когда все отказавшие блоки находятся на разных ступенях ИС.

Введем в рассмотрение матрицу $N_{j_1}^{i_1, i_2, \dots, i_k}$, полученную из матрицы N_{i_1} заменой столбцов с номерами i_1, i_2, \dots, i_k нулевыми столбцами, и будем сопоставлять ей вектор $M_{j_1}^{i_1, i_2, \dots, i_k}$ с элементами

$$m_{i_1} = \begin{cases} 1, & \text{если на } i\text{-й строке } N_{j_1}^{i_1, i_2, \dots, i_k} \text{ есть единицы;} \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases} \quad (17)$$

$= 1, 2, \dots, k_{j_1+1}$) или, что то же самое,

$$m_{i_1} = 1 - \prod_{t=1}^{k_{j_1}} (1 - \delta_{j_1}^{i_1, i_2, \dots, i_k}). \quad (18)$$

где $\delta_{j_1}^{i_1, i_2, \dots, i_k}$ — компоненты матрицы $N_{j_1}^{i_1, i_2, \dots, i_k}$.

Обозначим j_k — номер ступени, соответствующей группе

$$(i_{j_{k-1}+1}, \dots, i_{j_k}) \quad (k = 1, 2, \dots, p);$$

ω_k — множество номеров блоков из (13), отказавших на этой ступени. Алгоритм расчета технической эффективности строится следующим образом:

1. Рассматривается матрица $N_{j_1}^{(0)}$, и ей сопоставляется вектор $M_{j_1}^{(0)}$.
2. Множеству нулей вектора $M_{j_1}^{(0)}$ сопоставляется множество номеров

$$\omega_1^{(1)} = (i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \dots, i_q^{(1)} (\omega_1)).$$

3. Если вектор $M_{j_1}^{(0)}$ состоит из одних единиц, или что то же самое, множество $\omega_1^{(1)}$ пусто, то это значит, что отказ блоков $a_{i_1, i_1}, a_{i_2, i_1}, \dots, a_{i_{j_1}, i_1}$ не влияет на изменение выходного параметра и можно переходить к ω_2 , повторяя указанные действия.

4. Если же множество $\omega_1^{(1)}$ не пусто и $j_1 + 1 < j_2$, то ему сопоставляют матрицу $N_{j_1+1}^{\omega_1^{(1)}}$ и повторяют все действия.

5. Если получено некоторое непустое множество $\omega_1^{(k)}$, где $k_1 = j_2 - j_1$, то на j_2 -й ступени рассматривается множество

$$\omega_2^{(0)} = \omega_2 \cup \omega_1^{j_2 - j_1}. \quad (19)$$

Множество $\omega_2^{(0)}$ состоит из номеров блоков j_2 -й ступени, измерительная информация, перерабатываемая которыми, вследствие отказов блоков j_1 -й и j_2 -й ступеней не поступает на выход ИС. Для множества $\omega_2^{(0)}$ повторяют все операции, указанные в пп. 1—5.

В результате получают набор $\omega_p^{(n-j, p-1)}$, которому соответствует матрица $N_{n-1}^{(n-j, p-1)}$, и вектор $M_{n-1}^{(n-j, p-1)}$.

Скалярное произведение

$$W = \beta \cdot M_{n-1}^{(n-j, p-1)}, \quad (20)$$

где $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k_n})$ и дает значение технической эффективности ИС (суммарный весовой коэффициент на выходе) при выполнении (13).

В качестве примера покажем работу обоих алгоритмов применительно к ИС, изображенной на рис. 2. Нумерация ступеней производится справа налево, а блоков на каждой ступени сверху вниз.

Согласно (*) набор матриц, описывающих структуру исследуемой ИС, будет выглядеть следующим образом

$$\begin{aligned} N_1 &= \begin{pmatrix} 10 \\ 01 \\ 01 \end{pmatrix}; \\ N_2 &= \begin{pmatrix} 100 \\ 011 \\ 001 \end{pmatrix}; \\ N_3 &= \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 011 \end{pmatrix}; \\ N_4 &= \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \\ 011 \\ 001 \end{pmatrix}; \\ N_5 &= \begin{pmatrix} 1000 \\ 1100 \\ 0101 \\ 0110 \\ 0011 \\ 0001 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (21)$$

При расчете технической эффективности будем полагать, что заштрихованные на рис. 2 блоки a_{12} и a_{45} — находятся в состоянии отказа. Этим блокам соответствуют значения

$$j_1 = 2; \quad \omega_1 = (1); \quad j_2 = 5; \quad \omega_2 = (4). \quad (22)$$

Повторяя алгоритм расчета, будем последовательно получать следующие величины:

$$N_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad M_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \omega_1^{(1)} = (1); \quad (23)$$

$$N_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad M_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \omega_1^{(2)} = (1, 2); \quad (24)$$

$$N_4^{(1, 2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad M_4^{(1, 2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \omega_1^{(3)} = (1, 2); \quad (25)$$

$$\omega_2^{(3)} = \omega_1^{(3)} \cup \omega_2 = (1, 2, 4); \quad (26)$$

$$M_5^{(1, 2, 4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_5^{(1, 2, 4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Из (20) и (27) получаем значение технической эффективности ИС, изображенной на рис. 2 при отказе блоков a_{12} и a_{45} .

$$W = \beta M_5^{(1, 2, 4)} = \beta_4 + \beta_5. \quad (28)$$

Следует отметить, что иерархичность структуры ИС играет существенную роль при создании математической модели структуры и алгоритма расчета технической эффективности ИС. Существуют ИС со ступенчатыми струк-

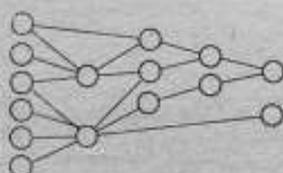


Рис. 3. Пример ступенчатой структуры ИС

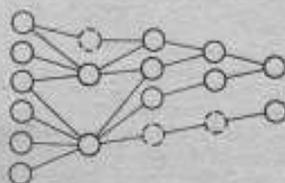


Рис. 4. Иерархическая структура ИС, полученная из ступенчатой структуры

турами связи, которые не являются иерархическими (рис. 3). Структуры такого типа путем формального введения абсолютно надежных блоков могут быть приведены к иерархическим. На рис. 4 показан метод приведения структуры к иерархической посредством введения фиктивных абсолютно надежных блоков (показаны пунктиром).

Предложенные методы для описания функционирования ИС позволяют формализовать процесс подготовки исходных данных для ввода в ЭЦВМ и значительно упростить процедуру расчета показателей надежности эффективности ИС.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнов В. О., Козлов Б. И., Татиевский А. Б., Фридман А. Э. Проблема и специфика надежности измерительных устройств. «Измерительная техника», 1968, № 3, с. 9—13.
2. Варжапетян А. Г. Техническая эффективность и надежность судовых систем управления. Л., «Судостроение», 1969, 226 с, с ил.
3. Шор Я. Б. Об интегральной оценке качества продукции. «Надежность и контроль качества», 1973, № 7, с. 27—32.

ОЦЕНКА СТАБИЛЬНОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Оценка стабильности средства измерения является одной из актуальных проблем метрологии. Эта проблема включает в себя две основные задачи: 1) оценку стабильности средств измерений при воздействии различного рода факторов, связанных с внешней средой (оценка внешней стабильности); 2) оценку стабильности средств измерений при постоянных (нормальных) условиях внешней среды (оценка внутренней стабильности).

При решении первой задачи оцениваются дополнительно погрешности или погрешности, возникающие в реальных условиях функционирования средства измерения. Теоретической базой для оценки дополнительной по-



Рис. 1. Канал воспроизводящей измерительной системы

грешности является теория чувствительности. Экспериментальное определение внешней стабильности основывается на планировании активного статистического эксперимента [1].

Вторая задача — оценка внутренней стабильности средства измерения, рассматривается в теории надежности при решении проблемы постепенных отказов технического устройства [2].

В настоящей статье рассматриваются вопросы, относящиеся к нормированию и оценке внутренней нестабильности многозвенной измерительной системы. Рассмотрим канал воспроизводящей измерительной системы, состоящий из n преобразователей (рис. 1). Пусть расчетный (теоретический) оператор i -го измерительного преобразователя равен A_{oi} , а его реальный оператор — A_i . Отличие реального оператора от расчетного (для неизменяющихся внешних условий) приводит к появлению основной погрешности i -го измерительного преобразователя:

$$\epsilon_i = (A_i - A_{oi}) x_i, \quad (1)$$

где x_i — входной сигнал i -го преобразователя.

Источником этой погрешности является технологический разброс и нестабильность конструктивных элементов измерительного преобразователя. Хотя выражение (1) справедливо как для статических измерений, так и для различных измерительных преобразований изменяющегося сигнала (процесса), в дальнейшем будут рассмотрены только статические измерения. Как известно [3], полная доверительная погрешность измерительной системы, приведенная ко входу в относительной форме, описывается выражениями

$$\left. \begin{aligned} \gamma_r^{(\Sigma)} &= \alpha_r^{(\Sigma)} + k\beta_r^{(\Sigma)} \\ \alpha_r^{(\Sigma)} &= \sum_{i=1}^n \alpha_r^{(i)}, \quad \beta_r^{(\Sigma)} = \left(\sum_{i=1}^n (\beta_r^{(i)})^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где $\alpha_r^{(\Sigma)}$, $\beta_r^{(\Sigma)}$ — суммарные относительные систематическая и случайная составляющие погрешности в r -ой точке рабочего диапазона; k — коэффициент, зависящий от вида распределения и доверительной вероятности P_d .

Полученная таким образом оценка полной основной погрешности системы характеризует ее значение в момент аттестации составляющих ее преобразователей. Однако с течением времени изменяется систематическая, а вместе с нею и полная погрешность системы (внутренняя нестабильность). В качестве достаточно общей модели погрешности средства измерения обычно используется случайный процесс вида:

$$\varepsilon = M(t) + \lambda(t), \quad (3)$$

где $M(t)$ — функция, характеризующая изменение систематической погрешности во времени;

$\lambda(t)$ — центрированный случайный стационарный процесс с дисперсией, характеризующий случайную погрешность средства измерения.

Функцию $M(t)$ можно рассматривать как неслучайную и как случайную функцию времени. Первая функция соответствует средству измерения с индивидуальной градуировкой, повторяющейся через определенный промежу-

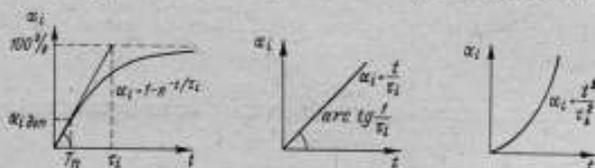


Рис. 2. Изменение систематической погрешности преобразователя

ток времени T_n ; вторая — типовому измерительному преобразователю, проверка которого в процессе функционирования системы невозможна. Для таких преобразователей, необходимо прогнозировать изменение систематической погрешности.

Опишем одну из возможных моделей прогноза. Предположим, что систематическая погрешность измерительного преобразователя в среднем возрастает по экспоненциальному закону (рис. 2):

$$\alpha_i(t) = 1 - e^{-t/\tau_i}, \quad (4)$$

где $1/\tau_i$ — коэффициент нестабильности, равный величине начальной скорости изменения относительной систематической погрешности, т. е.

$$\frac{1}{\tau_i} = \left. \frac{d\alpha_i(t)}{dt} \right|_{t=0}$$

Экспоненциальная модель нестабильности удобна тем, что она может быть сведена к линейной или параболической моделям или к их суперпозиции, так как

$$e^{-t/\tau} = \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{j-1}; \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), получим

$$\alpha_i(t) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} \left(\frac{t}{\tau_i}\right)^j. \quad (6)$$

Для достаточно стабильных звеньев ($\tau_i \gg 1$) и малых допустимых уровней дрейфа ($\alpha_{i \text{ доп}} \ll 1$) можно ограничиться линейным членом:

$$\alpha_i(t) \approx \frac{1}{\tau_i} \cdot t. \quad (7)$$

Погрешность аппроксимации при этом определяется первым отброшенным членом, то есть равна

$$\frac{1}{2\tau_i^2} \cdot t^2 = \frac{\alpha_{i \text{ доп}}^2}{2}.$$

Линейная модель нестабильности измерительного преобразователя используется, в частности, для погрешностей измерительных микрофонов фирмы Брюль и Кьер (рис. 3).

Для линейной измерительной системы суммарную нестабильность можно вычислить по заданным или известным нестабильностям звеньев

$$\alpha_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \alpha_i. \quad (8)$$

$$\alpha_{\Sigma} = t \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{\tau_i} = \frac{1}{\tau_{\Sigma}} \cdot t. \quad (9)$$

Коэффициенты нестабильности $1/\tau_i$ на множестве однотипных измерительных преобразователей являются случайными величинами. Зная первые два момента коэффициента нестабильности измерительного преобразователя — математическое ожидание $M(1/\tau)$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma(1/\tau)$ можно вычислить верхнюю оценку суммарной нестабильности систематической погрешности:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\Sigma} &= \frac{t}{M_{\Sigma} - k\sigma_{\Sigma}} \\ M_{\Sigma} &= M\left(\frac{1}{\tau_{\Sigma}}\right) = \sum_{i=1}^n M\left(\frac{1}{\tau_i}\right) \\ \sigma_{\Sigma}^2 &= \sigma^2\left(\frac{1}{\tau_{\Sigma}}\right) = \sum_{i=1}^n \sigma^2\left(\frac{1}{\tau_i}\right) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Коэффициент K выбирают из тех же соображений, что и в формуле (2). Если нестабильность системы, подсчитанная по формулам (10), получается выше допустимой $\alpha_{\Sigma \text{ доп}}$, то следует, если это возможно, предусмотреть автоматическую проверку системы в процессе измерения. При этом остаточные значения систематической погрешности можно вычислить, как рекомендовано в [4]:

$$\alpha_{\Sigma} = \frac{2t_y}{\tau_{\Sigma} \cdot \mu}. \quad (11)$$

Время изменения чувствительности, 0,105

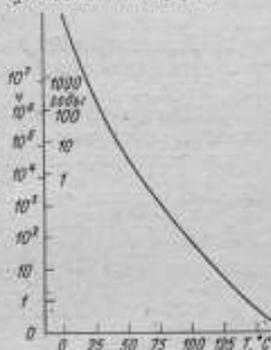


Рис. 3. Стабильность измерительного микрофона

где μ — относительная затрата времени на поверку системы;
 t_y — время установления переходного процесса в системе;
 $T_n = \frac{2t_y}{\mu}$ — период поверки системы.

Пользуясь выражением (10), можно оценить верхнюю границу нестабильности измерительной системы по заданным коэффициентам нестабильности звеньев $1/\tau_i$ для любого заданного времени ее функционирования t . Исходя из полученного суммарного коэффициента нестабильности системы $1/\tau_{\Sigma}$ и допустимой погрешности нестабильности α_{Σ} доп можно выбрать период поверки системы T_n по формуле (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Хикс Ч. Р. Основные принципы планирования эксперимента, «Мир», 1967, с. 406.
 2. Сотсков Б. С. Основы теории и расчета надежности элементов и устройств автоматики и вычислительной техники. М., «Высшая школа», 1970, с. 271, с ил.
 3. Рывкин Б. Л. Аппроксимация закона распределения суммарной погрешности измерительной системы нормальным законом. «Метрология», 1971, № 4, с. 10—15.
 4. Новицкий П. В., Персия С. М. Методы повышения точности цифровых измерительных систем путем автоматического учета систематических и случайных погрешностей. АСТА ИМЕКО, 10—SU—208, Стокгольм, 1964, с ил.
- Поступила в редакцию 15/IV—1974 г.

II. ПОСТЕПЕННЫЕ ОТКАЗЫ И СБОИ

УДК 519.283.001.33 : 53.08

С. А. ЧЕТВЕРТАКОВ

ВНИИМ

КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДРЕЙФА ПАРАМЕТРОВ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ ПО КРИТЕРИЮ ОБЪЕМА ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Применение математических методов прогнозирования (экстраполяции) временного дрейфа параметров средств измерений значительно сокращает длительность экспериментальных исследований стабильности средств измерений.

Однако практическое использование методов прогнозирования осложняется трудностью выбора удобного метода. При выборе метода решают одну из двух задач:

1. Определить объем априорной и эмпирической (исходной) информации о дрейфе параметров и метод прогнозирования, необходимые для оценки требуемых характеристик дрейфа.

2. Определить вид характеристик дрейфа, значения которых могут быть прогнозированы на основе исходной информации заданного объема, и выбрать соответствующий метод прогнозирования.

Решение этих задач возможно лишь при условии изучения всех существующих методов прогнозирования. Однако литература по математическим методам прогнозирования весьма обширна. Поэтому целесообразна классификация методов прогнозирования по критерию объема исходной информации.

В настоящей статье рассмотрены только методы, позволяющие прогнозировать характеристики процесса изменения параметров в будущем при известном начальном изменении этих параметров.

Проведенный обзор методов прогнозирования и их анализ позволил разделить рассмотренные методы по критерию объема исходной информации на три группы. Методы каждой группы полностью или частично решают свою задачу прогнозирования. Рассмотрим эти задачи, основываясь на теории случайных процессов.

Первая задача может быть названа индивидуальным прогнозированием I рода.

На интервале времени $[0, T)$ задана реализация $x(t)$ векторного случайного процесса $X(t)$, причем

$$x(t) \in G, t \in [0, T),$$

где G — область допустимых значений с границей L .

Требуется оценить:

а) $X(\tau)$, $\tau \in [T, \infty)$ или границу $K(\tau)$ области прогноза $Q(\tau)$ значений $X(\tau)$;

б) значение случайного времени T_1 первого пересечения процессом границы L области G .

Задача прогнозирования I рода решается численными методами интерполяции и аппроксимации полиномами, применением эмпирических формул [1]. Используется также метод построения области прогноза $Q(\tau)$,

$t \in [T, \infty)$, описанный в [1]. Применяются модели авторегрессии и скользящего среднего [13], методы скользящего прогноза коэффициентов эмпирических формул, в частности, метод экспоненциального сглаживания [14].

Вторая задача прогнозирования может быть названа прогнозированием по ансамблю.

На интервале $[0, T)$ заданы m реализаций процесса $X(t)$ при условии:

$$x_j(t) \in G, \quad t \in [0, T), \quad j \in \overline{1, m}$$

Требуется оценить:

а) функцию распределения значений $X(\tau) - F_x(x, \tau)$, $\tau \in [T, \infty)$ или первые l моментов этого распределения;

б) функцию распределения случайного времени $T_1 - F_t(t)$ или первые p моментов этого распределения.

К прогнозированию по ансамблю относятся методы, основанные на гипотезе о сохранении во времени типа одномерного закона распределения $X(t)$ и прогнозе моментов этого распределения [2], а также методы, основанные на описании процесса детерминированной функцией времени со случайными параметрами [3, 12]. Для описания процессов с сильным «перемещиванием» используется марковская модель [3—5, 12]. При этом прогноз дрейфа параметров заключается в прогнозировании значений коэффициентов сноса и диффузии, в марковском свойстве процесса, как правило, описываются малокоррелированные изменения параметров, вызванные колебаниями условий испытаний.

Третья задача прогнозирования может быть названа индивидуальным прогнозированием II рода или индивидуальным апостериорным прогнозированием.

Известна априорная информация, позволяющая характеризовать процесс $X(t)$ на интервале $[0, \infty)$ по вероятностной мере. Апостериорной информацией является реализация процесса:

$$x(t) \in G, \quad t \in (0, T).$$

Требуется оценить:

а) функцию апостериорного распределения значений процесса в момент $\tau \in [T, \infty)$:

$$F_x^{ps}(x, \tau) = P[X_t(\tau) < x, \quad t \in \overline{1, n} / X(t) = x(t), \quad t \in [0, T)],$$

или первые l моментов этого распределения;

б) функцию апостериорного распределения величины T_1 :

$$F_t^{ps}(t) = P[T_1 < t / X(t) = x(t), \quad t \in [0, T)]$$

или первые p моментов этого распределения.

К методам апостериорного прогнозирования можно отнести следующие: метод линейной винеровской экстраполяции как стационарных [6, 7], так и нестационарных [7, 8, 11] случайных процессов, метод канонического разложения [9, 11], применение байесовской формулы при построении многомерного распределения процесса [4] и методы статистической классификации и распознавания образов [10].

Отметим некоторые особенности решения каждой задачи прогнозирования.

При индивидуальном прогнозировании I рода и прогнозировании по ансамблю может быть также использована некоторая априорная информация о процессе в интервале $[T, \infty)$, однако, в отличие от третьей задачи прогнозирования, эта информация не позволяет характеризовать процесс по вероятности (т. е. отсутствуют статистические характеристики значений $X(\tau)$, $\tau \in [T, \infty)$ и статистические характеристики связи этих значений, полученных в различные моменты времени).

В качестве априорной информации при решении задачи I рода используются такие допущения, как например непрерывность, монотонность или

интервалы монотонности, предельные скорости, возможность представления процесса полиномом n -й степени и т. д.

Априорной информацией при прогнозировании по ансамблю является, например, утверждение о сохранении типа одномерного распределения или о близости процесса к линейному, о характере моментных функций процесса и т. д.

Исходная информация при прогнозировании первых двух типов позволяет выбрать соответственно детерминированную или стохастическую модель, причем некоторые параметры модели определяются и прогнозируются с помощью только эмпирической информации, по сути дела, методами индивидуального прогнозирования I-го рода. Если априорная информация полностью отсутствует, то вид модели и ее параметры определяются и прогнозируются с помощью эмпирической информации. При этом основным принципом прогнозирования является предположение о сохранении характера процесса (вида модели и (или) ее параметров) в будущем.

Различие между прогнозированием по ансамблю и индивидуальным I рода вызвано различным характером эмпирической информации. Искомые оценки в задаче прогнозирования I рода характеризуют лишь данный объект, а не множество объектов данного вида (исключением является случай эргодичности процесса $X(t)$).

Оценки могут рассматриваться как случайные, но на пространстве событий, где событием является результат измерений или условие испытаний. Наоборот, искомые оценки, прогнозируемые при решении второй задачи, характеризуют генеральную совокупность объектов.

В отличие от первых двух групп методов, методы индивидуального прогнозирования II рода используют априорную информацию, характеризующую процесс на интервале $[0, \infty)$ по вероятностной мере. Для получения этой информации иногда приходится проводить предварительные испытания большой выборки объектов на интервале всего времени их функционирования.

Априорная информация, используемая при решении задачи II рода, позволяет определить стохастическую модель процесса на интервале времени $[0, \infty)$.

С помощью модели или непосредственно априорной информации строится алгоритм индивидуального апостериорного прогнозирования процесса, реализация которого на интервале $[0, T)$ имеет значение $x(t)$.

Алгоритм позволяет оценивать будущие значения характеристики $X(t)$ конкретного объекта при известном начальном изменении этой характеристики.

В отличие от первых двух задач, индивидуальное прогнозирование II рода основывается на предположении о сохранении в интервале прогноза $[T, \infty)$ тех физических условий, при которых получена априорная информация, лежащая в основе модели процесса и алгоритма прогнозирования.

При сравнении задач прогнозирования видно, что они отражают постепенный рост исходной информации. Если в первой задаче используется минимальная исходная информация, то в третьей задаче применяется статистический аналог физической закономерности, который устанавливается путем анализа (априорной) информации, полученной при предварительных испытаниях.

Апостериорное прогнозирование включает в себя использование детерминированной непрерывной функции времени как частный случай, когда плотность одномерного распределения процесса в любой момент t является δ -функцией.

Приведенная классификация производилась на основе уже разработанных и применяемых методов прогнозирования. Она отражает в обобщенной форме наиболее часто встречающиеся на практике задачи прогнозирования состояния различных средств измерений.

Разумеется, классификация ни в коей мере не может рассматриваться как законченная. Например, задача прогнозирования по ансамблю в будущем может трансформироваться в две задачи — прогнозирование по ансамблю

I и II рода. Искомыми оценками задачи прогнозирования по ансамблю II рода, вероятно, будут апостериорные значения некоторых статистик, определяемых для момента t по значениям m реализаций процесса $X(t)$. Однако такое дополнительное деление целесообразно лишь при появлении специальных методов решения задачи прогнозирования по ансамблю II рода. В настоящее время эта задача решается с помощью индивидуального прогнозирования II рода при последующем статистическом обобщении результатов прогнозирования каждой реализации.

Обзор методов прогнозирования позволяет сделать следующие выводы:

1. Недостаточно разработанным вопросом теории прогнозирования является статистическая проверка соответствия (непротиворечивости) эмпирической информации выдвигаемой гипотезе о модели процесса.

2. Для оценки точности прогнозирования необходимо разработать удобные для практики меры точности искомых характеристик в задачах прогнозирования и методы их определения по данным эксплуатации и испытаний средств измерений.

3. Недостаточно разработан вопрос влияния точности замеров при получении исходной информации на точность прогнозирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блинов И. Н., Гаскаров Д. В., Мозгалецкий А. В. Автоматический контроль систем управления, «Энергия», 1968, 201 с, с ил.
2. Дружинин Г. В. Надежность систем автоматики. «Энергия», 1967, 527 с, с ил.
3. Перротте А. И., Карташев К. Д., Цветаев К. Н. Основы ускоренных испытаний радиоэлементов на надежность. М., «Советское радио», 1968, 222 с, с ил.
4. Васильев Б. В. Прогнозирование надежности и эффективности радиоэлектронных устройств. М., «Советское радио», 1970, 335 с., с ил.
5. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. «Наука», 1968, 463 с., с ил.
6. Колмогоров А. И. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей. Изв. АН СССР, серия математики, 1941, т. 5, 15—29 с.
7. Яглом А. М. Экстраполирование, интерполирование и фильтрация стационарных случайных процессов с рациональной спектральной плотностью. Труды Моск. матем. общ-ва, 4, 1955, 25—37 с.
8. Современная теория систем управления, под ред. К. Т. Леондеса. М., «Наука», 1970, 511 с., с ил.
9. Кудрицкий В. Д. Каноническое представление случайных функций в задачах прогнозирования надежности. «Автоматика и телемеханика», 1970, № 1, 70—76 с.
10. Гродзенский С. Я. Прогнозирование срока службы электровакуумных приборов. Обзоры по электронной технике. Серия «Электроника СВЧ», вып. № 10 (297), ЦНИИ Электроника, 1971, 81 с, с ил.
11. Калман Р. Е., Бьюси Р. С. Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания. Тр. амер. об-ва инж.-механиков, сер. D, «Техническая механика» (русс. перев.) т. 83, № 1. Изд-во иностр. лит., 1961, с. 21—28 с ил.
12. Герцбах И. Б., Кордонский Х. Б. Модели отказов. М., «Советское радио», 1966, 165 с, с ил.
13. Бокс Г. Е., Дженкинс Г. М. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. «Мир», 1974, 384 с., с ил.
14. Brown R. L., Meyer R. F. The Fundamental theory of Exponential Smoothing, «Operations Research», 1961, No. 9, pp. 673—685.

Поступила в редакцию 15/IV—1974 г.

НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ ОЦЕНИВАНИЯ ВРЕМЕНИ ИЗМЕНЕНИЙ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК В ЗАДАННЫХ ПРЕДЕЛАХ

При использовании средств измерений приходится считаться с непостоянством значений их метрологических характеристик. Причиной изменения метрологических характеристик является воздействие влияющих величин, причем такие изменения обусловлены как колебаниями значений влияющих физических величин, так и их постоянным воздействием. В последнем случае существенные изменения метрологических характеристик происходят в течение длительных периодов времени и поэтому могут быть названы долговременными.

Долговременные изменения метрологических характеристик средств измерений обычно имеют монотонный характер. Такая особенность долговременных изменений обуславливает необходимость периодических проверок средств измерений и периодических профилактических работ по восстановлению значений метрологических характеристик. Эффективность этих мероприятий в значительной степени зависит от своевременности их проведения. Поэтому определение времени проверок и профилактических работ является одной из наиболее актуальных задач метрологии.

Очевидно, что решение этой задачи (в метрологии ее обычно рассматривают как задачу определения межповерочных интервалов) должно основываться на исследовании долговременной стабильности. В практике проектирования оказывается удобным использовать в качестве показателей долговременной стабильности математическое ожидание и дисперсию процесса долговременных изменений $Y_d(t) : M_y(t)$ и $D_y(t)$. Каким образом могут быть использованы эти показатели для определения межповерочных интервалов? Принципиальный ответ на этот вопрос заключается в указании способов их применения для определения времени нахождения процесса $Y_d(t)$ в заданной области Y_d .

Прежде всего укажем, что показатели времени нахождения случайного процесса $Y_d(t)$ с монотонными реализациями определяются на основе одномерного распределения $F(Y, t)$, или его плотности $\varphi(Y, t)$ [1]. При этом предполагается, что заданы: ширина области — поле допуска $Y_d - \Delta$ и значения верхней и нижней границ области a_b и a_n . Для симметричного поля допуска имеем $a_n = -\frac{\Delta}{2}$, $a_b = \frac{\Delta}{2}$.

Предлагаемыми показателями долговременной стабильности одномерное распределение процесса $Y_d(t)$ в общем случае описывается неполностью. Однако, применяя неравенство Чебышева, всегда можно дать оценку вероятности нахождения значений процесса $Y_d(t)$ в определенной области в момент времени t . Используя это обстоятельство, укажем способ оценки вероятности $Q(t)$ выхода процесса $Y_d(t)$ из области Y_d в момент времени t .

Оценка для $Q(t)$ может быть получена с помощью второго неравенства Чебышева. Имеем

$$P\{|Y(t) - M_y(t)| \geq k_{гр}(t) \sigma_y(t)\} < \frac{1}{K_{гр}^2(t)}, \quad (1)$$

где

$$k_{гр}(t) = \frac{|M_y(t) - a_{гр}|}{\sigma_y(t)}, \quad a_{гр} = \begin{cases} a_b & \text{при } M_y(t) > 0, \\ a_n & \text{при } M_y(t) < 0, \end{cases}$$

$$\sigma_y(t) = \sqrt{D_y(t)}.$$

Формула (1) дает оценку вероятности выхода процесса $Y_{\lambda}(t)$ за границы интервала $[a_n, a_n]$, т. е.

$$Q(t) < \frac{1}{k_{\text{гп}}^2(t)}. \quad (2)$$

С учетом характера изменения $k_{\text{гп}}^2(t)$ формулу (2) можно записать следующим образом:

$$Q(t) < \begin{cases} \frac{1}{k_{\text{гп}}^2(t)} & \text{при } k_{\text{гп}}(t) > 1, \\ 1 & \text{при } k_{\text{гп}}(t) < 1. \end{cases} \quad (3)$$

Используя формулу (3) и полагая известным допустимый уровень вероятности выхода процесса $Y_{\lambda}(t)$ за границы интервала $[a_n, a_n] - \alpha$, получим оценку межповерочного интервала из уравнения

$$Q(t) - \alpha = 0. \quad (4)$$

Оценку $Q(t)$, полученную по формуле (3), на участке для $k_{\text{гп}}(k) < 1$ можно несколько улучшить с помощью первого неравенства Чебышева. Использование этого неравенства в данном случае всегда возможно для значений долговременных изменений выходного параметра, с которым связана рассматриваемая метрологическая характеристика. В этом случае можно записать следующие неравенства

$$P[1 + Y(t) > 1 - a_n] < \frac{1 + M_Y(t)}{1 - a_n}; \quad (5)$$

$$P[1 + Y(t) > 1 + a_n] < \frac{1 + M_Y(t)}{1 + a_n}. \quad (6)$$

Обозначая

$$l_n(t) = \frac{1 + a_n}{1 + M_Y(t)}, \quad (7)$$

$$l_n(t) = \frac{1 - a_n}{1 + M_Y(t)}, \quad (8)$$

получим

$$P[1 + Y(t) > l_n[1 + M_Y(t)]] < \frac{1}{l_n(t)}; \quad (9)$$

$$P[1 + Y(t) > l_n[1 + M_Y(t)]] < \frac{1}{l_n(t)}. \quad (10)$$

Учитывая неравенства (9), (10), получим для $Q(t)$:

$$Q(t) = \begin{cases} \frac{1}{k_{\text{гп}}^2(t)} & \text{при } k_{\text{гп}}(t) > 1, \\ 1 - \left(\frac{1}{l_n(t)} - \frac{1}{l_n(t)} \right) & \text{при } k_{\text{гп}}(t) < 1, l_n > 1, \\ 1 - \left(1 - \frac{1}{l_n(t)} \right) & \text{при } k_{\text{гп}}(t) < 1, l_n < 1, l_n > 1, \\ 1 & \text{при } k_{\text{гп}}(t) < 1, l_n < 1. \end{cases} \quad (11)$$

Оценка $Q(t)$ в области $k_{гр}(t)$ по формуле (11) может быть как больше, так и меньше действительных значений $Q(t)$. Последнее будет иметь место при существенной левосторонней асимметрии распределения величины $Y_d(t)$. Это легко доказать, используя свойство первого неравенства Чебышева, позволяющего определять нижнюю границу распределений положительных величин [2].

Для определения межповерочных интервалов достаточно использовать формулу (3), так как время очередной проверки должно назначаться из условия малости $Q(t)$. Формулой (11) можно воспользоваться для оценки времени профилактических мероприятий, если, например, невозможно получить малые значения $Q(t)$ на некотором минимальном межповерочном интервале.

При некоторых законах распределения на основании предлагаемых показателей значение $Q(t)$ может быть вычислено точно. Укажем формулы для $Q(t)$ при наиболее часто используемых законах распределения: нормальное распределение:

$$Q(t) = 1 - F_n(a_n < Y(t) < a_n);$$

$$F_n(a_n < Y(t) < a_n) = \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{a_n - M_Y(t)}{\sigma_Y(t)} \right) - \Phi \left(\frac{a_n - M_Y(t)}{\sigma_Y(t)} \right) \right]; \quad (12)$$

$$\Phi \left(\frac{Y - M_Y(t)}{\sigma_Y(t)} \right) = \Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}x^2} dx; \quad (13)$$

равномерное распределение:

$$Q(t) = 1 - F_p(a_n < Y(t) < a_n);$$

$$F_p(a_n < Y(t) < a_n) = \frac{\Delta}{2\sqrt{3}\sigma_Y(t)}. \quad (14)$$

Полученные формулы могут быть использованы для средств измерения с регулируемыми параметрами их элементов. Формула для определения долговременного изменения метрологической характеристики с регулируемыми параметрами части элементов (x_j) в моменты времени $t - t_p$ (где t — момент времени, в который определяется значение долговременного изменения) имеет вид:

$$Y_d(t) = \sum_j \beta_j \int_{t-t_p}^t v_j(\tau) d\tau + \sum_i \beta_i \int_0^t v_i(\tau) d\tau + \sum_j \beta_j \delta x_j, \quad (15)$$

где β_i, β_j — коэффициенты влияния элементов средства измерения; $v_i(t), v_j(t)$ — скорости долговременных изменений нерегулируемых и регулируемых параметров соответственно; δx_j — погрешности регулирования параметров j -х элементов.

Следует отметить, что хотя обычно используют скорости изменения параметров в виде относительных значений (по отношению к номинальным значениям параметров), в формуле (15) необходимо использовать их абсолютные значения $v_j(t)$, так как для регулируемых параметров теряет смысл понятие номинального значения.

Рассмотрим способы оценки вероятности пересечения границ допуска $Y_d(t)$ в случае регулирования, например, с помощью формулы вида (3, 11). Для этого необходимо определить, как уже указывалось, математическое ожидание и дисперсию одномерного распределения $Y_d(t)$. В данном случае определение этих величин с использованием только двух первых моментов распределений величин в первой части уравнения (15) недостаточно, так как одна из случайных величин (t_p) входит в предел интегрирования.

Применим операции математического ожидания и дисперсии к обеим частям формулы (15) и, принимая во внимание независимость случайных величин в ее правой части, имеем

$$M_y(t) = \sum_j \beta_j M \left[\int_{t-t_p}^t v_j(\tau) d\tau \right] + \sum_j \beta_j M_i(t) + \sum_j \beta_j M[\delta x_j]; \quad (16)$$

$$D_y(t) = \sum_j \beta_j^2 D \left[\int_{t-t_p}^t v_j(\tau) d\tau \right] + \sum_j \beta_j^2 D_i(t) + \sum_j \beta_j^2 D[\delta x_j]. \quad (17)$$

Первые члены в правых частях формул (16, 17) в общем виде запишутся следующим образом:

$$M_j(t) = M \left[\int_{t-t_p}^t v_j(\tau) d\tau \right] = \int_0^t \int_{t-t_p}^t M[v_j(\tau) \varphi](\tau_p) d\tau_p d\tau; \quad (18)$$

$$D_j(t) = D \left[\int_{t-t_p}^t v_j(\tau) d\tau \right], \quad (19)$$

где $\varphi(\tau_p)$ — плотность распределения периода времени от последней регулировки до момента t .

В зависимости от конкретной ситуации плотность распределения $\varphi(t_p)$ очевидно может быть различной. Однако на стадии проектирования можно предположить, что t_p распределено равномерно на некотором интервале (t, t_u) длиной $\Delta t = t - t_u$, определяемом, например, периодом непрерывной работы средства измерений. В этом случае

$$\varphi(t_p) = \frac{1}{t - t_u} \quad (20)$$

и, следовательно,

$$M_j(t) = \int_{t_u}^t \int_{t-t_p}^t M[v_j(\tau)] \frac{1}{t - t_u} d\tau_p d\tau. \quad (21)$$

В тех случаях, когда $M_j(t)$ и $D_j(t)$ являются полиномами от t , то интегралы в правых частях (16) и (17) могут быть вычислены точно. Используя формулы (3) и (11), и задаваясь значениями погрешностей регулировки параметров элементов, можно решить задачу определения межповерочных интервалов с учетом подрегулировок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов О. В. Эксплуатационные допуски и надежность в радиоэлектронной аппаратуре. М., «Советское радио», 1970, 150 с., с ил.
 2. Пугачев В. С. Теория случайных функций. Физматгиз, 1960, 221 с.
- Поступило в редакцию 15/IV—1974 г.

ВЫБОР ТОЧНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ ИСПЫТАНИЯХ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ С ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИЕЙ ВЛИЯНИЯ НА СТАБИЛЬНОСТЬ

Задачей определительных испытаний на стабильность (метрологическую надежность) средств измерений является изучение дрейфа метрологических характеристик под действием старения и износа средств измерений.

Однако наблюдаемый процесс $Y(t)$ изменения значений каждой характеристики Y , кроме дрейфа $Y_d(t)$, содержит и другие аддитивные составляющие:

$$Y(t) = Y_d(t) + Y_k(t) + \varepsilon_n(t) + \varepsilon_{\text{изм}}(t), \quad (1)$$

где $Y_k(t)$ — процесс, обусловленный случайными во времени отклонениями известных влияющих физических величин Z_i , $i = 1, \dots$ (температуры, параметров энергоснабжения, режимов работы и т. д.) от своих нормальных значений Z_{i0} ;

$\varepsilon_n(t)$ — процесс, обусловленный случайными отклонениями остальных неучитываемых влияющих физических величин от средних значений, и собственными шумами испытываемого средства измерений; $\varepsilon_{\text{изм}}(t)$ — погрешность определения $Y(t)$, вызванная случайной погрешностью поверки испытываемого средства измерений.

Наличие аддитивных шумов требует различных методов организации испытаний стабильности для обеспечения достаточно точного выделения (с помощью обработки или без нее) дрейфа $Y_d(t)$ [1—4].

Метод 1. Измерение метрологической характеристики при искусственной стабилизации всех известных влияющих величин. При этом за оценку $\hat{Y}_d(t)$ дрейфа $Y_d(t)$ принимается Y в момент t :

$$\hat{Y}_d(t) = Y(t). \quad (2)$$

Метод 2. Совместное измерение естественно колеблющихся влияющих величин и метрологической характеристики с введением поправки, когда аналитическое выражение функции влияния $Y_k = Y_k(Z_1, \dots, Z_d)$ известно. Оценка $\hat{Y}_d(t)$ вычисляется по формуле

$$\hat{Y}_d(t) = Y(t) - Y_k(t). \quad (3)$$

Метод 3. Стабилизация одних и измерение других влияющих величин с введением поправки. Этот метод совмещает в себе первые два.

Метод 4. Совместное измерение естественно колеблющихся величин и метрологической характеристики с построением функции влияния по окончании испытаний стабильности (пассивный факторный эксперимент).

Метод 5. Измерение метрологической характеристики при искусственном варьировании всех влияющих физических величин с построением функции влияния по окончании испытаний стабильности (активный факторный эксперимент).

Вопрос рационального выбора технических средств стабилизации или измерений влияющих величин (средств метрологического обеспечения) является одним из основных при организации испытаний на стабильность. Между тем в практике испытаний применяется эмпирический подбор точности средств метрологического обеспечения.

В данной работе предлагается методика выбора точностей метрологического обеспечения испытаний на стабильность средств измерений при предположении о линейности функции влияния, т. е. при

$$Y_k = \sum_{i=1}^n \beta_i \Delta Z_i, \quad (4)$$

где

$$\Delta Z_i = Z_i - z_{i0}.$$

Необходимо отметить, что при отсутствии данных о функции влияния до испытаний (как при пассивном, так и при активном эксперименте) выбор точностей метрологического обеспечения невозможен. В связи с этим ниже рассматриваются лишь первые три метода организации испытаний.

Характеристики качества метрологического обеспечения должны отражать точность определения эмпирических значений $\hat{Y}_d(t)$ дрейфа $Y_d(t)$, а не точность построения моделей реализации дрейфа $Y_d(t)$, зависящую не только от точностей технических средств обеспечения испытаний, но и от точности идентификации и вычислений.

В настоящей работе предлагается характеризовать качество метрологического обеспечения величиной дисперсии случайной (во времени испытаний) погрешности определения эмпирических значений величины $Y_d(t)$: $\sigma^2(\delta Y_d(t))$, где

$$\delta Y_d(t) = \hat{Y}_d(t) - Y_d(t). \quad (5)$$

Требование к качеству метрологического обеспечения в испытаниях задается в виде предельно допускаемого значения величины $\sigma^2(\delta Y_d(t))$, т. е.

$$\sigma^2(\delta Y_d(t)) < \sigma^2. \quad (6)$$

Значение σ^2 можно выбрать на основе требования достаточно точного в определенных испытаниях на стабильность наблюдения за дрейфом $Y_d(t)$ в области допустимых значений Y .

Обозначим дисперсии случайных погрешностей стабилизации и измерений влияющих величин через $\sigma_{\delta i}^2$ и $\sigma_{\delta i}^2$, дисперсию погрешности измерений Y — через $\sigma_{\text{изм}}^2$.

Тогда задача выбора точностей средств метрологического обеспечения будет состоять в выборе дисперсий, удовлетворяющем требованию (6):

$$\sigma_{\delta i}^2, \quad i = 1, \dots, n; \quad \sigma_{\text{изм}}^2 \text{ — при первом методе испытаний;}$$

$$\sigma_{\delta i}^2, \quad i = 1, \dots, n; \quad \sigma_{\text{изм}}^2 \text{ — при втором методе испытаний;}$$

$$\sigma_{\delta i}^2, \quad i = 1, \dots, n'; \quad \sigma_{\delta i}^2, \quad i = n' + 1, \dots, n; \quad \sigma_{\text{изм}}^2 \text{ — при третьем методе испытаний.}$$

После выбора точностей производится подбор технической аппаратуры.

Планирование испытаний на стабильность начинается с предварительного исследования функции влияния методами многофакторного активного эксперимента. Такое исследование проводится за время, в течение которого дрейф характеристики пренебрежимо мал. После анализа результатов исследования необходимо получить статистические оценки b_i регрессионных коэффициентов β_i функции влияния (в нашем случае линейной по величинам Z_i), дисперсии оценок $\sigma_{\beta i}^2$ и остаточную дисперсию регрессионной модели $\sigma_{\text{ост}}^2$.

Последняя используется для вычисления дисперсии σ_n^2 процесса $\varepsilon_n(t)$ по формуле

$$\sigma_n^2 = \sigma_{\text{ост}}^2 - \sigma_{\text{изм}}^2 - \sum_{i=1}^n b_i^2 \sigma_{\delta i}^2. \quad (7)$$

где $\sigma_{\text{изм}}^2$ и $\sigma_{\delta i}^2, i = 1, \dots, n$ — дисперсия погрешностей измерения Y и дисперсии погрешностей стабилизации величин Z_i в предварительном исследовании.

Переходя к методике выбора точностей, рассмотрим сначала случай, когда погрешностью определения коэффициентов можно пренебречь.

Будем считать, что это условие выполняется, если

$$\frac{\sigma_{\delta Y_d}}{b_i} < \frac{1}{3}, \quad (8)$$

и в качестве коэффициента β_i примем его оценку b_i .

Найдем величины дисперсий $\sigma^2(\delta Y_d(t))$ погрешности оценки дрейфа $Y_d(t)$ при различных методах организации испытаний.

При первом методе в соответствии с (2) имеем

$$\hat{Y}_d(t) = Y(t) = Y_d(t) + Y_k(t) + \varepsilon_n(t) + \varepsilon_{изм}(t), \quad (9)$$

при погрешностях стабилизации

$$Y_k(t) = \sum_{i=1}^n b_i \Delta Z_i(t). \quad (10)$$

Отсюда, с учетом (5), погрешность δY_{dI} определяется выражением

$$\delta Y_{dI}(t) = \sum_{i=1}^n b_i \Delta Z_i(t) + \varepsilon_n(t) + \varepsilon_{изм}(t). \quad (11)$$

При отсутствии систематических погрешностей стабилизации Z_i и измерений Y , а также из условия статистической (во времени) независимости процессов $\varepsilon_{изм}(t)$, $\varepsilon_n(t)$, $\Delta Z_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ получим

$$M_t[\delta Y_{dI}(t)] = 0, \quad (12)$$

$$\sigma_{I}^2 = D_t[\delta Y_{dI}(t)] = \sum_{i=1}^n b_i^2 \sigma_i^2 + \sigma_n^2 + \sigma_{изм}^2. \quad (13)$$

При втором методе в соответствии с (3), с учетом случайных погрешностей δZ_i измерений $Z_i(t)$, имеем

$$\begin{aligned} \hat{Y}_d(t) &= Y(t) - \sum_{i=1}^n b_i (\Delta Z_i(t) + \delta Z_i(t)) = \\ &= Y_d(t) + \varepsilon_n(t) + \varepsilon_{изм}(t) - \sum_{i=1}^n b_i \delta Z_i(t). \end{aligned} \quad (14)$$

$$\delta Y_{dII}(t) = \sum_{i=1}^n b_i \delta Z_i(t) + \varepsilon_n(t) + \varepsilon_{изм}(t). \quad (15)$$

Отсутствие систематических погрешностей и попарная статистическая (во времени), независимость процессов:

$$\delta Z_i(t) \quad i = 1, \dots, n, \quad \varepsilon_{изм}(t), \quad \varepsilon_n(t),$$

а также малость автокорреляции их значений позволяет получить выражения:

$$M_t[\delta Y_{dII}(t)] = 0, \quad (16)$$

$$\sigma_{II}^2 = D_t[\delta Y_{dII}(t)] = \sum_{i=1}^n b_i^2 \sigma_{\delta Z_i}^2 + \sigma_n^2 + \sigma_{изм}^2. \quad (17)$$

Сравнение выражений (13) и (17) показывает, что погрешности стабилизации и погрешности измерений величины Z_i в первом и втором методах оказывают одинаковое влияние на погрешность определения дрейфа $Y_d(t)$.

Перейдем теперь непосредственно к выбору точностей. Первым шагом в выборе точностей является проверка условия

$$\sigma^2 > \sigma_n^2. \quad (18)$$

Действительно, в противном случае дисперсия σ_n^2 шума $\varepsilon_n(t)$ (уменьшить который подбором средств метрологического обеспечения невозможно) превосходит наименьший допустимый уровень σ^2 погрешностей дрейфа $Y_n(t)$; при этом даже идеальная точность стабилизации и измерений $\sigma_i^2 = \sigma_{\delta i}^2 = \sigma_{\text{изм}}^2 = 0$ не приведет к выполнению условия (6). При нарушении условия (18) необходимо дополнительно исследовать функцию влияния или изменить способ определения метрологической характеристики Y (способ измерения и описания данного метрологического свойства).

Предположим, что условие (18) выполняется. Тогда при первом методе организации испытаний неравенство (6) имеет вид:

$$\sigma^2 > \sigma_1^2 = \sigma_n^2 + \sigma_{\text{изм}}^2 + \sum_{i=1}^n b_i \sigma_i^2. \quad (19)$$

Условие (19) может быть реализовано выбором конкретных величин $\sigma_{\text{изм}}^2$ и σ_i^2 ($i = 1, \dots, n$). Наилучшим принципом выбора точностей стабилизации между различными влияющими величинами представляется принцип равных вкладов в суммарный шум, вносимых погрешностью $\varepsilon_{\text{изм}}$ и погрешностью ΔZ_i ($i = 1, \dots, n$).

Запишем (19) в виде:

$$\sigma^2 - \sigma_n^2 > \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad (20)$$

где $\xi_0 = \sigma_{\text{изм}}^2$, $\xi_i = b_i^2 \sigma_i^2$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Тогда в соответствии с принципом равных вкладов

$$\xi_i = (\sigma^2 - \sigma_n^2) / (n + 1)$$

и

$$\sigma_i^2 < \frac{\sigma^2 - \sigma_n^2}{(n + 1) b_i^2}, \quad i = 1, \dots, n \quad (21)$$

$$\sigma_{\text{изм}}^2 < \frac{\sigma^2 - \sigma_n^2}{n + 1}. \quad (22)$$

Аналогичные зависимости имеют место при втором методе организации испытаний.

Рассмотрим наиболее общий третий метод организации испытаний, когда n величин стабилизируется, а остальные $n - n'$ измеряются. В этом случае имеем

$$\sigma_{\text{III}}^2 = \sigma_n^2 + \sigma_{\text{изм}}^2 + \sum_{i=1}^{n'} b_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=n'+1}^n b_i^2 \sigma_{\delta i}^2. \quad (23)$$

Учтем также реальную на практике ситуацию, когда точность стабилизации или измерений ряда физических величин установлена заранее. Пусть n_ϕ ($n_\phi < n'$) и n_ϕ' ($n_\phi' < n - n'$) — количества влияющих величин, для которых заранее задана точность стабилизации и измерений соответственно.

Тогда из условия

$$\begin{aligned} \sigma_{III}^2 = \sigma^2(\delta Y_{дIII}(t)) = & \sigma_n^2 + \sum_{i=1}^{n_\Phi} b_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=n_\Phi+1}^{n'} b_i^2 \sigma_i^2 + \\ & + \sum_{i=n'+1}^{n+n_\Phi} b_i^2 \sigma_{\delta i}^2 + \sum_{i=n+n_\Phi+1}^n b_i^2 \sigma_{\delta i}^2 + \sigma_{изм}^2 < \sigma^2 \end{aligned} \quad (24)$$

в соответствии с принципом равных вкладов получим

$$\sigma_i^2 < \frac{\sigma^2 - \sigma_n^{2*}}{(n - n_\Phi - n_\Phi' + 1) b_i^2}, \quad i = n_\Phi' + 1, \dots, n', \quad (25)$$

$$\sigma_{\delta i}^2 < \frac{\sigma^2 - \sigma_n^{2*}}{(n - n_\Phi - n_\Phi' + 1) b_i^2}, \quad i = n' + n_\Phi' + 1, \dots, n, \quad (26)$$

$$\sigma_{изм}^2 < \frac{\sigma^2 - \sigma_n^{2*}}{n - n_\Phi - n_\Phi' + 1}. \quad (27)$$

$$\sigma_n^{2*} = \sigma_n^2 + \sum_{i=1}^{n_\Phi} b_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=n'+1}^{n+n_\Phi} b_i^2 \sigma_{\delta i}^2. \quad (28)$$

Аналогом условия (18) является неравенство

$$\sigma^2 > \sigma_n^{2*}, \quad (29)$$

которое необходимо проверить после того, как выбрана точность $n_\Phi' + n_\Phi''$ средств метрологического обеспечения.

Рассмотрим случай, когда погрешностью определения коэффициентов влияния β_i пренебречь нельзя, т. е. условие (8) не выполняется. В этом случае дисперсии σ_i^2 и σ_{II}^2 необходимо рассматривать как случайные положительные величины, зависящие от случайных оценок коэффициентов b_i . Будем характеризовать дисперсии их средними значениями $M[\sigma_i^2]$ и $M[\sigma_{II}^2]$, вычисленными по множествам наблюдаемых значений оценок b_i при определении функции влияния.

Найдем величину $M[\sigma_{II}^2]$. Имеем

$$\delta Y_{II}(t) = \hat{Y}_d(t) - Y_d(t) = Y(t) - Y_k(t) - Y_d(t),$$

где

$$Y_k(t) = \sum_{i=1}^n (\beta_i + \delta b_i) [\Delta Z_i(t) + \delta Z_i(t)],$$

и, по аналогии с (15),

$$\begin{aligned} \delta Y_{дII}(t) = \varepsilon_{изм}(t) + \varepsilon_n(t) + \sum_{i=1}^n \beta_i \delta Z_i(t) + \\ + \sum_{i=1}^n \delta b_i (\Delta Z_i(t) + \delta Z_i(t)). \end{aligned} \quad (30)$$

При обычных условиях независимости и несмещенности получим

$$M_t [\delta Y_{дП}(t)] = 0$$

и

$$\sigma_{дП}^2 = D_t [\delta Y_{дП}(t)] = \sigma_{изм}^2 + \sigma_n^2 + \sum_{i=2}^n (\delta b_i)^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n (\beta_i + \delta b_i)^2 \sigma_{\delta i}^2. \quad (31)$$

В соответствии с условиями $M[\delta b_i] = 0$, $M[\delta b_i^2] = \sigma_{b_i}^2$ находим математическое ожидание от $\sigma_{дП}^2$ по множеству погрешностей δb_i :

$$M[\sigma_{дП}^2] = \sigma_{изм}^2 + \sigma_n^2 + \sum_{i=1}^n \sigma_{b_i}^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n (\beta_i^2 + \sigma_{b_i}^2) \sigma_{\delta i}^2. \quad (32)$$

Аналогично получим

$$M[\sigma_{I}^2] = \sigma_{изм}^2 + \sigma_n^2 + \sum_{i=1}^n (\beta_i^2 + \sigma_{b_i}^2) \sigma_i^2. \quad (33)$$

Тогда для общего случая — третьего метода организации испытаний по аналогии с (25), (28), получим

$$\sigma_i^2 < \frac{\sigma^2 - \sigma_n^{2*}}{(n - n_\phi - n_\phi^* + 1)(b_i^2 + \sigma_{b_i}^2)}, \quad i = n_\phi^* + 1, \dots, n', \quad (34)$$

$$\sigma_{\delta i}^2 < \frac{|\sigma^2 - \sigma_n^{2*}|}{(n - n_\phi - n_\phi^* + 1)(b_i^2 + \sigma_{b_i}^2)}, \quad i = n' + n_\phi^* + 1, \dots, n, \quad (35)$$

$$\sigma_{изм}^2 < \frac{\sigma^2 - \sigma_n^{2*}}{n - n_\phi - n_\phi^* + 1}, \quad (36)$$

где

$$\sigma_n^{2*} = \sigma_n^2 + \sum_{i=1}^{n_\phi^*} (b_i^2 + \sigma_{b_i}^2) \sigma_i^2 + \sum_{i=n_\phi^*+1}^{n'+n_\phi^*+1} (b_i^2 + \sigma_{b_i}^2) \sigma_{\delta i}^2 + \sum_{i=n'+1}^n \sigma_{b_i}^2 \sigma_i^2. \quad (37)$$

Для вычисления величины σ_n^{2*} необходимо знать дисперсии σ_i^2 случайных нестабилизируемых процессов $Z_i(t)$, ($i = n' + 1, \dots, n$), которые следует определять при проведении предварительных испытаний.

Пример. Определяются требования к точности стабилизации и измерений влияющих величин при проведении испытаний образцов типового каскада низкочастотного усилителя с параллельно-последовательной отрицательной обратной связью на стабильность по коэффициенту усиления $K = U_{вых}/U_{вх}$.

Задана точность определения оценок дрейфа.

$$\frac{\Delta K}{K_{ном}} = 0,02,$$

откуда требование к дисперсии ΔK определяется формулой

$$\sigma^2 = (\Delta K/4)^2 = 0,6 \cdot 10^{-3}.$$

Влияющими величинами Z_1 и Z_2 в процессе испытаний являются соответственно температура T ($^{\circ}\text{C}$) и входное напряжение $U_{вх}$ (мВ). Во время испытаний предполагается стабилизировать входное напряжение и измерять

температуру. Определенный экспериментально коэффициент влияния температуры на величину K изменялся в партии образцов от 0,005 до 0,02 ($^{\circ}\text{C}$) $^{-1}$, откуда $b_{1 \max} = 0,02$ ($^{\circ}\text{C}$) $^{-1}$.

Определенный аналитически коэффициент влияния входного напряжения имеет значение

$$b_2 = -\frac{K}{U_{\text{вх}}} = -\frac{K_{\text{ном}}}{U_{\text{вх ном}}} = 0,6 \text{ (мВ)}^{-1}.$$

Будем учитывать также погрешность $\Delta K_{\text{изм}}$ определения величины K , вызванную погрешностью измерений $U_{\text{вх}}$. Остальными шумами эксперимента пренебрегаем.

Тогда наблюдаемая оценка K равна

$$K(t) = K_{\text{д}}(t) + 0,02 [Z_1(t) - 25] + 0,6 [Z_2(t) - 7,5] + \Delta K_{\text{изм}}(t).$$

Планирование метрологического обеспечения производится в соответствии с (25), (28) при условии, что $\sigma_n^2 = 0$, $n' = 1$, $n = 2$, $n_{\phi} = n'_{\phi} = 0$;

$$\sigma_{b_1}^2 = \frac{\sigma^2}{(n+1)b_1^2} = 0,5 \text{ (}^{\circ}\text{C)}^2;$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\sigma^2}{(n+1)b_2^2} = 0,55 \cdot 10^{-3} \text{ (мВ)}^2;$$

$$\sigma_{\text{изм}}^2 = \frac{\sigma^2}{n+1} = 2 \cdot 10^{-4}.$$

Выводы

1. При испытаниях средств измерений на стабильность основными методами отсеивания шумов, накладывающихся на дрейф метрологической характеристики, являются стабилизация или учет колебаний влияющих физических величин.

2. Для обоснованного выбора точностей стабилизации и измерений влияющих величин при испытаниях необходимо предварительно исследовать функцию влияния испытываемого средства измерений.

3. Точность проведения испытаний стабилизации целесообразно характеризовать дисперсией σ^2 суммарного шума дрейфа метрологической характеристики в испытаниях.

4. На основе критерия точности σ^2 и принципа равных вкладов возможно выбрать точности средств метрологического обеспечения испытаний на стабильность при линейном виде функции влияния. Дисперсии погрешностей средств обеспечения прямо пропорциональны величине σ^2 и обратно пропорциональны квадратам соответствующих коэффициентов влияния и числу величин.

5. Если функция влияния известна в смысле неравенства (8) точно, то стабилизация влияющих величин и учет их естественных колебаний в испытаниях вносят одинаковую погрешность в результат оценки дрейфа, и выбор точностей в обоих случаях идентичен.

6. Если коэффициенты функции влияния определены в смысле (8) неточно, то первый метод организации испытаний (стабилизации) требует меньшей точности средств метрологического обеспечения. При втором методе организации требование к точности метрологического обеспечения возрастает с увеличением дисперсий σ_i^2 нестабилизируемых процессов $Z_i(t)$, $i = n' + 1, \dots, n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вострокнутов Н. Н., Земельман М. А. Метрологические характеристики точных стабилизаторов напряжения и методика их исследования. «Измерительная техника», 1964, № 1, с. 38—41, с ил.
2. Долинский Е. Ф. Обработка результатов измерений. Изд-во стандартов, 1973, с. 130.
3. Федоров В. В. Планирование регрессионных экспериментов, когда одна из контролируемых переменных время. МГУ, 1970. 19 с, с ил.
4. Абуладзе И. В., Бедряевский А. И. Оценка функции влияния внешних факторов на погрешность электронизмерительного прибора. «Измерительная техника», 1973, № 6, с. 9—12, с ил.

Поступила в редакцию 15/IV 1974 г.

УДК 681.2—192.001.4 : 519.263.2

А. Э. ФРИДМАН, С. А. ЧЕТВЕРТАКОВ

ВНИИМ

ПРИМЕНЕНИЕ АПОСТЕРИОРНОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ИСПЫТАНИЙ НАДЕЖНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Проблема научно обоснованного сокращения длительности испытаний надежности является важной для любых технических средств. Особенно она важна для средств измерений, поскольку испытания их чрезвычайно трудоемки и продолжительны (год и более в связи с установленной периодичностью их поверок). Необходимость решения этой проблемы обуславливается широкими масштабами работ по государственному надзору за состоянием средств измерений, определяющими значительный экономический эффект сокращения длительности испытаний. В настоящей статье рассматривается один из возможных путей ее решения.

Известно, что отказы средств измерений по характеру своего проявления бывают внезапными и постепенными. Методы проведения испытаний с учетом внезапных отказов разработаны в теории надежности и поэтому здесь не рассматриваются. Постепенные отказы проявляются в выходе метрологических характеристик за допустимые пределы и определяют метрологическую надежность или стабильность средств измерений. Предлагаемый подход заключается в сокращении длительности испытаний с последующей экстраполяцией значений метрологических характеристик в рамках известной математической модели.

Обоснованное сокращение длительности испытаний стабильности средств измерений до величины t_c с последующей экстраполяцией их результатов в интервале $[t_c, T)$ может проводиться лишь на основе анализа априорной информации о процессе изменения метрологической характеристики $Y_d(t)$ в интервале $[0, T)$. Такую информацию можно получить только в процессе определительных испытаний, которые проводятся с целью оценки показателей надежности новых средств измерений. Поэтому определительные испытания, как правило, должны быть полными. Если в ходе определительных испытаний собрать информацию об изменении метрологических характеристик испытываемой партии, ее можно будет использовать для сокращения объема контрольных испытаний, периодически проводимых заводами-изготовителями и органами госнадзора с целью проверки соответствия надежности выпускаемых средств измерений установленным в ГОСТ и ТУ нормам.

Ниже кратко рассмотрены основные этапы определительных и контрольных испытаний. В качестве математической модели дрейфа метрологической

характеристики $Y_d(t)$ принят полином от времени со случайными коэффициентами

$$Y_d(t) = \sum_{i=0}^m \alpha_i t^i. \quad (1)$$

Проведенные исследования показали, что такая модель, обладающая рядом достоинств (простота, возможность последовательного увеличения точности и т. д.), может быть принята в качестве исходной для ряда средств измерений.

Определительные испытания

При проведении испытаний производятся периодические измерения метрологической характеристики и влияющих физических величин, вызывающих кратковременные колебания метрологических характеристик.* После введения поправок на влияющие величины результаты испытаний представляют собой кривые $Y_d(t)$, а с учетом дискретизации измерений — матрицы $Y = \|Y_d(t_j)\|$ ($j = 1, \dots, N$).

Анализ результатов испытаний производится в следующем порядке.

Определение показателей надежности. Показатели надежности определяются обычными методами (см. ГОСТ 13216—74). При этом под отказом следует понимать превышение допускаемых ТУ значений характеристики $Y_d(t)$.

Аппроксимация зависимости $Y_d(t)$ каждого образца испытываемой партии. На этом этапе определяются коэффициенты и порядок аппроксимирующих полиномов реализаций $Y_d(t)$, $j = 1, \dots, N$.

Коэффициенты $\alpha_i(m)$ определяются матричной формулой

$$\alpha_{(m)} = (t^T t)^{-1} t^T Y, \quad (2)$$

где

$$\alpha_{(m)} = \begin{pmatrix} \alpha_0(m) \\ \dots \\ \alpha_i(m) \\ \dots \\ \alpha_m(m) \end{pmatrix}; \quad t = \begin{pmatrix} 1t_1^0 & \dots & t_1^m \\ \dots & \dots & \dots \\ 1t_i^0 & \dots & t_i^m \\ \dots & \dots & \dots \\ 1t_N^0 & \dots & t_N^m \end{pmatrix}.$$

При выборе порядка полинома производится последовательное вычисление сумм квадратов

$$S_m = \alpha^T(m) t^T Y \quad (3)$$

для $m = 0, 1, 2, \dots$, и проверка условия

$$\frac{S_{m+1} - S_m}{\sigma^2(\delta Y_d(t))} < \chi^2(1; 0,95), \quad (4)$$

где $\sigma^2(\delta Y_d(t))$ — дисперсия ошибки определения значения $Y_d(t)$; $\chi^2(1; 0,95) = 3,841$ — 95%-ный квантиль распределения; χ — квадрат с одной степенью свободы.

Как только условие (4) выполнится, расчеты прекращаются и m выбирается в качестве порядка полинома. Описанный метод известен в прикладном регрессионном анализе как принцип «дополнительной суммы» [2] и осно-

* См. статью С. А. Четвертакова «Выбор точностей измерений при испытаниях средств измерений с линейной функцией влияния на стабильность» на стр. 83—90.

ван на нормальности распределения ошибок определения значений $Y_d(t_j)$. Это допущение вполне приемлемо в данном случае. Распределение ошибок $\delta Y_d(t)$ должно быть близко к нормальному, если предварительное планирование испытаний производится на основе принципа равных вкладов, обеспечивающего отсутствие доминирующих влияющих физических процессов.

Статистическая обработка после аппроксимации. Статистическая обработка результатов определительных испытаний заключается в определении порядка полинома и моментов распределений коэффициентов модели дрейфа характеристики $Y_d(t)$. Учитывая, что разброс порядка полиномов в партии изделий вызван не различием физических механизмов старения элементов средств измерений, а отклонениями технологии изготовления и условий проведения испытаний, можно предположить, что порядки полиномов должны отличаться незначительно. Тогда для партии из l изделий примем

$$m = \left(\frac{1}{l} \sum_{k=1}^l m_k \right)^* \quad (5)$$

где m_k — порядок полинома $Y_{dk}(t)$ k -го изделия;

$()^*$ — символ округления до ближайшего целого числа.

Выборочные моменты распределений коэффициентов определяются по обычным формулам:

средние значения

$$\bar{\alpha}_i = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^l \alpha_{ik}(m), \quad i = 0, 1, \dots, m; \quad k = 1, \dots, l; \quad (6)$$

дисперсии

$$S_{\alpha i}^2 = \frac{1}{l-1} \sum_{k=1}^l (\alpha_{ik}(m) - \bar{\alpha}_i)^2, \quad i = 0, 1, \dots, m; \quad k = 1, \dots, l; \quad (7)$$

коэффициенты корреляции между α_i и α_j

$$r_{ij} = \frac{1}{l S_{\alpha i} S_{\alpha j}} \sum_{k=1}^l (\alpha_{ik}(m) - \bar{\alpha}_i)(\alpha_{jk}(m) - \bar{\alpha}_j), \quad (8)$$

и т. д. Здесь $\alpha_{ik}(m)$ — коэффициент α_i полинома порядка m k -го испытываемого образца.

Определение сокращенного времени t_c проведения контрольных испытаний. Определение t_c производится по критерию точности δ предсказания показателя надежности $K^{(c)}$ в сокращенных контрольных испытаниях с учетом результатов определительных испытаний. В качестве t_c принимается наименьший из всех моментов $\tau^{(c)}$, удовлетворяющих условию: оценка $K^{(c)}$, вычисленная экстраполяцией результатов определительных испытаний на интервале $[0, \tau^{(c)})$, должна отличаться от оценки K , полученной в определительных испытаниях, на величину, меньшую δ .

Контрольные испытания

При проведении контрольных испытаний также производятся измерения метрологической характеристики и влияющих физических величин и выделяется процесс дрейфа значений метрологической характеристики $Y_d(t)$. Испытания проводятся в следующем порядке.

Определение коэффициентов модели. После проведения испытаний в течение времени t_c по формуле (2) определяются коэффициенты $\alpha_{ik}^{(c)}$, $i = 0, \dots, m$; $k = 1, \dots, l^{(c)}$ модели изменения харак-

теристик образца. При этом порядок полинома принимается равным порядку модели m , полученной в определительных испытаниях.

Проверка однородности испытываемой партии и партии, прошедшей определительные испытания.

В качестве критерия однородности принята близость соответствующих коэффициентов моделей дрейфа обеих партий. Очевидно, что это более сильное условие, чем условие близости значений $Y_d(t)$ после одинаковой наработки t , вытекающее из физических представлений об однородности. Поэтому использование этого критерия, хотя и несколько увеличивает длительность испытаний, повышает достоверность прогноза. Предлагаемая методика заключается в проверке по способу Уэлча [2] статистической незначимости разностей между средними значениями коэффициентов моделей обеих партий. Предварительно определяется выборочное среднее коэффициентов $\bar{\alpha}_i^{(c)}$ контрольной партии $\bar{\alpha}_i^{(c)}$ и его дисперсия $S^2(\bar{\alpha}_i^{(c)})$. Затем строятся $100(1-\alpha)\%$ -ные доверительные интервалы:

$$J_i = (\bar{\alpha}_i - \bar{\alpha}_i^{(c)}) \pm t_{\Phi_i} \cdot \frac{\alpha}{2} S_i, \quad i = 0, \dots, m, \quad (9)$$

где $S_i = \sqrt{S^2(\bar{\alpha}_i) + S^2(\bar{\alpha}_i^{(c)})}$ — среднеквадратическое отклонение разности $(\bar{\alpha}_i - \bar{\alpha}_i^{(c)})$

$t_{\Phi_i} \cdot \frac{\alpha}{2} - 100(1 - \frac{\alpha}{2})\%$ -ная квантиль распределения Стюдента с числом степеней свободы Φ_i ;

$$\Phi_i = S_i^4 \left/ \left(\frac{S^4(\bar{\alpha}_i)}{l} + \frac{S^4(\bar{\alpha}_i^{(c)})}{l^{(c)}} \right) \right. \quad (10)$$

Если доверительный интервал J_i накрывает нуль, считается, что разность между $\bar{\alpha}_i$ и $\bar{\alpha}_i^{(c)}$ статистически незначима. Пусть по всем $i = 0, 1, \dots, m$ разности $(\bar{\alpha}_i - \bar{\alpha}_i^{(c)})$ статистически незначимы. Тогда статистическая модель $Y_d(t)$, построенная по результатам сокращенных контрольных испытаний, не противоречит статистической модели $Y_d(t)$, построенной в определительных испытаниях. В этом случае делается вывод, что обе партии статистически однородны и экстраполяция результатов сокращенных испытаний возможна.

Если для какого-либо i доверительный интервал не содержит нуль, однородность партий не является доказанной. Тогда контрольные испытания продолжают до достижения наработки $2t_c$, и по результатам испытаний снова строится полиномиальная модель и проверяется однородность партий. Указанные операции следует продолжать до тех пор, пока однородность партий не будет подтверждена либо наработка изделий достигнет величины, установленной для определительных испытаний. В последнем случае определение показателей надежности производится обычным порядком.

Экстраполяция значений $Y_d(t)$ и определение показателей надежности партий производится экстраполяция значений характеристики каждого изделия по формуле

$$Y_{dk}^{(c)}(t) = \sum_{i=0}^m \alpha_{ik}^{(c)} t^i, \quad t \in [t_c, T). \quad (11)$$

Показатели надежности контрольной партии определяются по прогнозируемым значениям характеристики $Y_d(t)$. Так, например, вероятность безотказной работы $P(T)$ в течение времени T рассчитывается по формуле

$$P(T) = \frac{U(T)}{l}, \quad (12)$$

где $U(T)$ — число средств измерений из l испытанных, метрологические характеристики которых не вышли за допускаемые пределы по данным испытаний и прогноза $[0, t_c]$ и $[t_c, T)$. Условная средняя наработка до первого отказа определяется по формуле

$$T_{\text{ср}} = \frac{\sum_{i=1}^l t_i}{l}, \quad (13)$$

где t_i — наработка до возникновения метрологического отказа i -го изделия по данным испытаний в $[0, t_c]$ и прогноза в $[t_c, T)$; при отсутствии отказа принимается $t_i = T$.

Пример. Во ВНИИМ были проведены испытания стабильности полупроводниковых термосопротивлений МКМТ-16 в течение 1000 ч. Проведенный анализ показал, что по результатам аппроксимации зависимости от времени дрейфа сопротивления терморезисторов в течение первых 100 ч полиномом четвертой степени со случайными коэффициентами и последующего прогнозирования в соответствии с изложенным выше методом можно произвести разбраковку изделий с погрешностью, не превышающей 10%. Это позволяет в 10 раз сократить длительность контрольных испытаний.

Заключение

Один из возможных путей научно обоснованного сокращения длительности испытаний надежности средств измерений заключается в следующем:

При проведении определительных испытаний надежности новых средств измерений наряду с оценкой надежности изделий, собирается информация о дрейфе их метрологических характеристик, которая обрабатывается в рамках определенной математической модели с целью оценки моментов распределенных параметров модели.

Контрольные испытания надежности планируются сокращенными с экстраполяцией результатов испытаний в рамках математической модели дрейфа метрологических характеристик, подтвержденной определительными испытаниями. Перед экстраполяцией необходимо убедиться в однородности партий изделий, подвергавшихся определительным и контрольным испытаниям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Драйвер Н., Смит Т. Прикладной регрессионный анализ. М., «Статистика», 1973, М., 352 с.
2. Welch B. L. The Generalisation of Student's Problems when Several Different Population variances are involved. «Biometrics», 1947, No. 34 pp. 28—35.

Поступила в редакцию 15/IV—1974 г.

ВЛИЯНИЕ СБОЕВ НА МЕТРОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Характерной чертой современного развития измерительной техники является непрерывное возрастание доли элементов автоматики и вычислительной техники или дискретных элементов [1]. Переход на новую элементную базу является прогрессивным, так как позволяет повысить быстродействие, точность, надежность, уменьшить вес и габариты средств измерений и т. п. Однако он имеет и отрицательные последствия, связанные с появлением нового вида отказов — сбоев.

Под сбоем следует понимать событие, заключающееся в кратковременном нарушении работоспособности элемента вследствие временного изменения его параметров [2]. Восстанавливается работоспособность элемента самопроизвольно, без вмешательства извне. Причинами сбоев являются:

1) недостаточная надежность элементов в схеме, обусловленная постепенным изменением физических параметров под воздействием процесса старения и флуктуационных колебаний нагрузки, температуры, частоты срабатывания схемы и т. д.;

2) случайные колебания (электромагнитные наводки, броски питающего напряжения, несинхронность работы элементов и пр.), вызывающие кратковременные изменения параметров элементов.

Поэтому вероятность появления сбоев в устройстве зависит не только от надежности комплектующих элементов, но и в большой степени от принятых схемных и конструктивных решений, а также от качества изготовления. Это, наряду с многообразным и случайным характером причин сбоев, не позволило до настоящего времени разработать удовлетворительные универсальные методы оценки надежности по сбоям, а также получить достоверную информацию о надежности элементной базы.

Важной особенностью сбоев является скрытый характер их проявления. Возникновение сбоев элементов обнаружить без применения специальной аппаратуры невозможно. В то же время в результате сбоя искажается информация, циркулирующая в средстве измерений, что приводит к увеличению случайной погрешности измерения и ухудшению других метрологических характеристик.

Существующие методы аттестации средств измерений не предусматривают учет влияния сбоев, вследствие чего фактически завышаются метрологические характеристики. Очевидно, что чем больше дискретных элементов содержится в приборе, тем существеннее различия между определенными и фактическими значениями метрологических характеристик. Поэтому необходимым условием дальнейшего внедрения дискретных элементов в измерительную технику является разработка методов аналитической и экспериментальной оценки влияния сбоев на метрологические характеристики средств измерений.

Известные методы оценки надежности устройств автоматики и вычислительной техники [2, 3] не позволяют учесть специфику средств измерений. Искажение результата измерения вследствие сбоя существенно зависит от места и времени возникновения сбоя. В связи с этим для средств измерений нецелесообразно использование методов, основанных на определении частоты возникновения сбоев в устройстве. Более перспективным представляется функциональный подход, выражающийся в оценке последствий от сбоя каждого элемента в каждый различаемый момент алгоритма действия средства измерений и определении функции распределения значений метрологических характеристик как обобщающих этот анализ функционалов.

Реализация такого подхода является достаточно сложной, так как связана с проведением анализа функционирования устройства и подсчетом сумм

слагаемых, число которых превышает число элементов в схеме. Однако однородность логических функций, выполняемых элементами отдельных блоков, позволяет решать задачу в общем виде с последующим сворачиванием алгебраических сумм. Использование операции свертки дает возможность получения достаточно компактных пригодных для практики выражений для функций и моментов распределения значений метрологических характеристик исследуемых средств измерений.

Проиллюстрируем предлагаемый подход на примере анализа установки УАП-2, предназначенной для автоматической поверки электронизмерительных шкальных приборов класса 0,2 [4]. Установка производит автоматическое определение основной погрешности и вариации показаний поверяемого прибора на каждой оцифрованной отметке. Метод поверки заключается в автоматической регистрации моментов совмещения указателя поверяемого при-

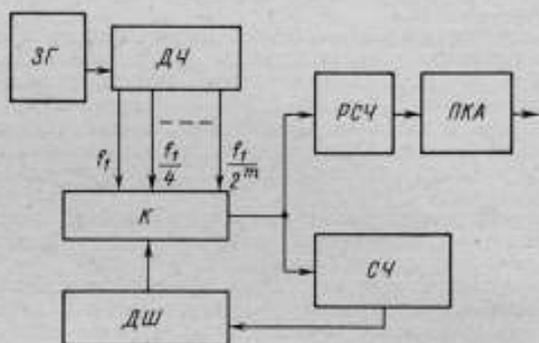


Рис. 1. Блок-схема ФВС

бора с оцифрованными отметками шкалы и измерении в эти моменты разности опорного и подаваемого на прибор входного сигналов, соответствующей погрешности прибора.

Анализ функционирования блоков, выполненных в основном на типовых дискретных элементах (счетчиках, дешифраторах и т. д.), а именно: формирователя входного сигнала (ФВС), индикатора погрешности (ИП), индикатора вариации (ИВ), показал, что сбой элементов вызывают увеличение погрешности и вариации показаний установки, причем сбой элементов ФВС приводят к увеличению динамической погрешности.

Выведем выражение для математического ожидания постоянной составляющей динамической погрешности, обусловленной сбоями ФВС.

Блок-схема ФВС, предназначенного для формирования сигнала, подаваемого на поверяемый прибор в процессе его поверки, приведена на рис. 1. Как следует из блок-схемы, узлами ФВС являются: делитель частоты (ДЧ), обеспечивающий пересчет частоты входных импульсов; реверсивный счетчик (РСЧ), осуществляющий формирование и запоминание кодов, соответствующих оцифрованным отметкам поверяемого прибора (ПП); преобразователь код-аналог ПКА; счетчик (СЧ), дешифратор (ДШ) и коммутатор (К). Совместная работа указанных узлов обеспечивает частоты импульсов на вход РСЧ с целью формирования участков кривой (рис. 2, кривая а) различной крутизны. Число и крутизна участков кривой выбраны таким образом, чтобы в момент измерения погрешности ПП, т. е. при подходе указателя ПП к оцифрованной отметке, динамическая ошибка не превышала допустимого значения. Рассмотрим, каким образом осуществляется переход от одних участков кривой к другим. На входы РСЧ и СЧ с ДЧ через коммутатор поступают последовательности импульсов различных частот f_1, f_2, \dots, f_m . Поступление импульсов с частотой f_i ($i = 1, 2, \dots, m$) и соответственно образование

участка кривой с крутизной S_i происходит до тех пор, пока на выходе $СЧ$ не образуется число N_i ($i = 1, 2, \dots, m$), определяемое схемой $ДШ$, по сигналу которого коммутатор подключает ко входам $РСЧ$ и $СЧ$ последовательность импульсов с f_{i+1} .

Формирование участка кривой с крутизной S_{i+1} , пропорциональной f_{i+1} будет продолжаться до образования на входе $СЧ$ числа N_{i+1} , и т. д. Если обозначить угловое перемещение указателя $ПП$, соответствующее поступле-

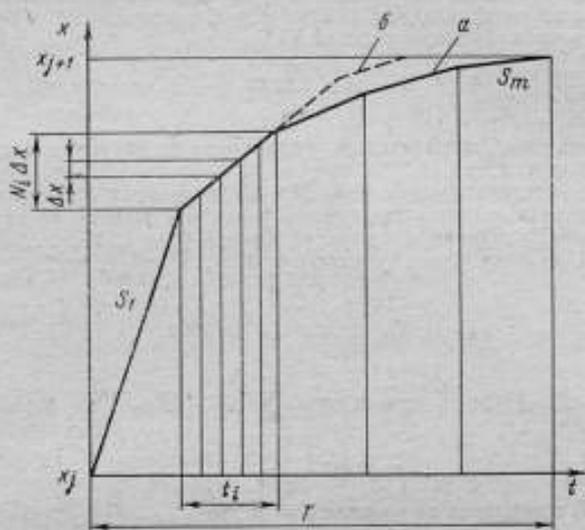


Рис. 2. Зависимость входного сигнала от времени

нию одного импульса на $РСЧ$, через Δx , то движение указателя по оси x при работе $ФВС$ без сбоев можно представить схематически рис. 3.

Предположим, что при формировании числа N_i с частотой f_i в S -м разряде счетчика $ФВС$ произошел сбой. Тогда к моменту времени, когда на выходе $РСЧ$ сформируется N_i , на выходе $СЧ$ вследствие сбоя образуется число

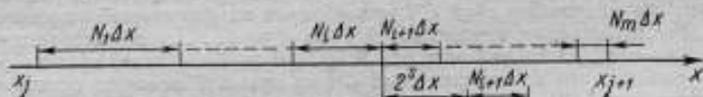


Рис. 3. Диаграмма движения указателя $ПП$ к оцифрованной отметке

$N_i + 2^S$ или $N_i - 2^S$. Ограничимся рассмотрением случая формирования числа $N_i - 2^S$, так как именно уменьшение числа N_i может привести к увеличению динамической погрешности. Поступление N_i импульсов с частотой f_i на вход $РСЧ$ приводит к образованию участка кривой с крутизной S_i и вызывает передвижение указателя на $N_i \Delta x$ со скоростью, пропорциональной S_i . После этого при функционировании $ФВС$ без сбоев указатель начинает двигаться с меньшей скоростью, пропорциональной S_{i+1} . Однако, вследствие сбоя в $СЧ$, число N_i , по которому должно произойти переключение частоты

с f_i на f_{i+1} и соответственно изменение крутизны с S_i на S_{i+1} , образуется на выходе $СЧ$ только после поступления дополнительных 2^S импульсов на входы $СЧ$ и $РСЧ$ с частотой f_i . Это вызывает продолжение формирования участка с крутизмой S_i и дополнительное перемещение указателя $ПП$, равное $2^S \Delta x$ со скоростью, пропорциональной S_i (рис. 2, кривая б). В результате указатель $ПП$ подходит к отметке $j+1$ раньше и со скоростью, пропорциональной крутизне S_j последнего l -го участка (l может принимать различные значения от i до m в зависимости от величины $2^S \Delta x$). Следствием этого является увеличение постоянной составляющей динамической погрешности Δ_l , пропорциональной крутизне последнего участка [4]:

$$\Delta_l = \frac{2\beta}{\omega_0} S_l,$$

где β , ω_0 — соответственно степень успокоения и круговая частота собственных колебаний $ПП$.

Анализ описанных последствий сбоя $СЧ$ позволяет сформулировать условия, определяющие номер последнего участка l выходного сигнала $ФВС$ при возникновении сбоя на i -м участке кривой ($i = 1, 2, \dots, m$).

Если сбой произошел на участке $i = 1, \dots, m-1$, то

$$l = i \text{ при } \sum_{j=i+1}^m N_j < 2^S, \quad (1a)$$

$$l = 1, \dots, m-1 \text{ при } \sum_{j=1}^m N_j > 2^S > \sum_{j=l+1}^m N_j, \quad (1b)$$

$$l = m \text{ при } N_m > 2^S. \quad (1b)$$

Если сбой произошел на участке $i = m$, то

$$l = m. \quad (1г)$$

Определим математическое ожидание постоянной составляющей динамической погрешности $\bar{\Delta}_{сб}$, обусловленной сбоями $СЧ$ при проверке одной отметки $ПП$:

$$\bar{\Delta}_{сб} = \sum_{l=1}^m P(l) \Delta_l, \quad (2)$$

где $P(l)$ — вероятность того, что номер последнего участка равен l при условии, что произошел сбой $СЧ$ при проверке оцифрованной отметки.

Для вычисления вероятностей $P(l)$ ($l = 1, \dots, m$) необходимо предварительно определить вероятности $P(i/T)$ ($i = 1, \dots, m$) сбоя на i -м участке при условии, что произошел сбой $СЧ$ за время T проверки отметки, а также вероятности $P(l/i)$ того, что номер последнего участка равен l при условии, что произошел сбой на i -м участке.

Примем гипотезу о пропорциональности интенсивности сбоев триггера частоте его срабатывания:

$$\lambda_s = \kappa f_s, \quad (3)$$

где κ — коэффициент пропорциональности.

Тогда вероятность сбоя s -го триггера ($s = 0, 1, \dots, n-1$) при формировании i -го участка кривой равняется

$$P_s(t_i) = \frac{\lambda_s N_i}{f_i} = \kappa \frac{f_i}{2^S} \frac{N_i}{f_i} = \kappa (0,5)^S N_i. \quad (4)$$

Вероятность сбоя $СЧ$ на i -м участке

$$P(i) = \sum_{S=0}^{n-1} \times (0,5)^S N_i = 2 \times N_i [1 - (0,5)^n]. \quad (5)$$

Вероятность сбоя $СЧ$ при проверке отметки

$$P(T) = \sum_{i=1}^m P(i) = 2 \times [1 - (0,5)^n] \sum_{i=1}^m N_i. \quad (6)$$

Из (5) и (6) определим $P(i/T)$

$$P(i/T) = \frac{N_i}{\sum_{i=1}^m N_i}. \quad (7)$$

Выражение для вероятности сбоя s -го триггера при условии, что произошел сбой на i -м участке, из (4) и (5) равняется

$$P(S/i) = \frac{0,5^{S+1}}{1 - (0,5)^n}. \quad (8)$$

Вероятности выполнения неравенств (1a—1r) с учетом (8) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} P^{(a)}(l=i/i) &= \text{Вер} \left\{ \sum_{j=i+1}^m N_j < 2^S \right\} = \\ &= \text{Вер} \{n-1 > S > a_{i+1}\} = \sum_{S=a_{i+1}}^{n-1} \frac{0,5^{S+1}}{1 - 0,5^n} = \\ &= \frac{0,5^{a_{i+1}+1} - 0,5^n}{1 - 0,5^n}, \end{aligned} \quad (9a)$$

где $a_{i+1} = \log_2 \sum_{j=i+1}^m N_j$,

и, аналогично,

$$P^{(b)}(l/i) = \frac{0,5^{a_{i+1}} - 0,5^{a_l}}{1 - 0,5^n}, \quad i=1, \dots, m-1, \quad l=1, \dots, m-1, l \neq i, \quad (9b)$$

где $a_l = \log_2 \sum_{j=1}^m N_j$;

$$P^{(b)}(l=m/i) = \frac{1 - 0,5^{a_m}}{1 - 0,5^n}, \quad i=1, \dots, m-1, \quad (9b)$$

где $a_m = \log_2 N_m$ и $P^{(r)}(l=m/i=m) = 1$, $(9r)$

По формуле полной вероятности с учетом выражений (7) и (9) вероятности $P(l)$ оказываются равными:

$$\begin{aligned}
 P(l) &= \sum_{i=1}^{l-1} P^{(6)}(l/i) P(i/T) + \\
 &+ P^{(a)}(l=i/i) P(i/T) = \frac{1}{1 - (0,5)^n} \times \\
 &\times \left[\frac{1}{\sum_{j=l+1}^m N_j} - \frac{1}{\sum_{j=l}^m N_j} - \frac{(0,5)^n N_l}{\sum_{j=1}^m N_j} \right]; \quad (10a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(l=m) &= \sum_{i=1}^{m-1} P^{(6)}(l=m/i) P(i/T) + \\
 &+ P^{(r)}(l=m/i=m) P(i=m/T) = \\
 &= \frac{1}{1 - (0,5)^n} \left[1 - \frac{1}{N_m} - \frac{(0,5)^n N_l}{\sum_{j=1}^m N_j} \right]. \quad (10b)
 \end{aligned}$$

После подстановки в (2) выражений (10) окончательно получим

$$\bar{\Delta}_{\text{сб}} = \frac{1}{1 - (0,5)^n} \sum_{l=1}^m \Delta_l \left[A_l - \frac{1}{\sum_{j=l}^m N_j} - \frac{(0,5)^n N_l}{\sum_{j=1}^m N_j} \right], \quad (11)$$

где

$$A_l = \begin{cases} \frac{1}{\sum_{j=l+1}^m N_j}, & l=1, \dots, m-1, \\ \frac{\sum_{j=1}^{m-1} N_j}{\sum_{j=1}^m N_j}, & l=m. \end{cases}$$

Аналогичным образом может быть получено выражение для функции распределения постоянной составляющей динамической погрешности

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \text{Вер} \{t > x\} = \sum_{l=x}^m P(t) = \\
 &= \frac{1}{1-(0,5)^n} \left\{ \sum_{l=x}^m \left[A_l - \frac{1}{\sum_{j=l}^m N_j} - \frac{(0,5)^n N_l}{\sum_{j=1}^m N_j} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\sum_{j=1}^m N_j - (0,5)^n N_j - \frac{\sum_{j=1}^{x-1} N_j}{\sum_{j=x}^m N_j}}{\sum_{j=1}^m N_j} \right\}. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Расчет динамической погрешности по приведенной формуле показал, что при возникновении сбоя *СЧ* во время проверки оцифрованной отметки постоянная составляющая динамической погрешности возрастает в 5–6 раз.

Аналогично были получены выражения переменной составляющей динамической погрешности из-за сбоев остальных узлов ФВС.

Выводы

1. Необходимым условием внедрения дискретных элементов в измерительную технику является разработка методов оценки влияния сбоев на метрологические характеристики средств измерений.

2. Указанную оценку можно производить путем последовательного анализа последствий отказов всех элементов устройства. Однородность логических функций элементов отдельных блоков позволяет решать задачу в общем виде и получать конкретные выражения для функций и моментов распределения значений метрологических характеристик средств измерений.

3. Рассмотренный пример показывает, что предлагаемый метод является весьма сложным и трудоемким, вследствие чего он нуждается в дальнейшем усовершенствовании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнов В. О., Безикович А. Я., Зедгинидзе Г. П. Основные задачи и перспективы работ по применению средств электроники, автоматики и вычислительной техники в метрологических исследованиях. — В сб. «Общие вопросы метрологии». Труды метрологических институтов СССР, вып. 130 (190), Изд-во стандартов, 1972, с. 130–135.

2. Шербаков О. В. К оценке надежности цифровых управляющих систем. — В сб. «Надежность и эксплуатация радиоэлектронной техники», вып. IV, Киев, Изд-во КВИРТУ, 1969, с. 34–48.

3. Сотсков Б. С. Основы теории и расчета надежности элементов и устройств автоматики и вычислительной техники. Изд-во «Высшая школа», 1970, с. с ил.

4. Прицкер В. И. Автоматическая проверка показывающих измерительных приборов в квазистатическом режиме. — В приложении к журналу «Измерительная техника» — «Метрология», 1971, № 3, с. 35–54., с ил.

Поступила в редакцию 15/IV–1974 г.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА СТАБИЛЬНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ С ЛИНЕЙНЫМ ДРЕЙФОМ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ ПОМОЩИ ПРОЦЕДУРЫ ВАЛЬДА

При испытаниях образцовых средств измерений на стабильность (надежность) иногда возникает необходимость проверить соответствие стабильности одного или нескольких экземпляров средств измерений заданным в ТУ или ТЗ нормам.

Ввиду малого числа экземпляров требования к стабильности партии (наработка на отказ, вероятность безотказной работы) заменяются требованиями стабильности каждого испытуемого экземпляра. В частности, при линейном временном дрейфе $Y_d(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t$ метрологической характеристики Y от заданных норм стабильности всегда можно перейти к значению предельной скорости дрейфа α_1 пред, при которой характеристика Y каждого испытуемого средства измерений за заданное время не выйдет из области допустимых значений.

Проверка стабильности средств измерений в настоящее время производится при помощи испытаний фиксированной длительности [1, 2] с регрессионным анализом результатов по окончании испытаний. Между тем в [3, 4] показано, что при проверке статистических гипотез о параметрах последовательный анализ, производимый по мере поступления результатов, требует для принятия решений (и окончания эксперимента) значительно меньше измерений, чем анализ по окончании испытаний.

В настоящей работе для сокращения длительности испытаний при проверке соответствия скорости дрейфа α_1 требуемым нормам предлагается применить последовательный метод Вальда, требующий наименьшего числа наблюдений для принятия решений о значениях статистически определяемых параметров.

Пусть наблюдаемое в испытаниях в момент t_i , $i = 1, 2, \dots$ значение Y для отдельного экземпляра средства измерений описывается моделью

$$Y(t_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t_i + \varepsilon(t_i), \quad i = 1, 2, \dots \quad (1)$$

где $\varepsilon(t_i)$, $i = 1, 2, \dots$ — гауссовский случайный процесс, обусловленный случайным отклонением влияющих физических величин от своих номинальных значений, а также случайной погрешностью измерений Y и собственными шумами средства измерений; при этом $M[\varepsilon(t_i)] = 0$, $M[\varepsilon(t_i)\varepsilon(t_j)] = \sigma^2 \delta_{ij}$, δ_{ij} — символ Кронекера.

Применим известную методику Вальда [3] для проверки двух простых гипотез о скорости дрейфа:

- 1) гипотезы H_0 , заключающейся в предположении $\alpha_1 = \alpha_{10}$;
- 2) гипотезы H_1 , заключающейся в предположении $\alpha_1 = \alpha_{11}$, где α_{10} и α_{11} соответственно приемочный и браковочный уровни скорости дрейфа (эти уровни всегда можно выбрать из нормы скорости дрейфа α_1 пред, $\alpha_{10} < \alpha_1$ пред $< \alpha_{11}$).

Последовательный критерий Вальда, на основе которого производится проверка гипотез, представляет собой отношение

$$\frac{f_{1n}}{f_{0n}} = \frac{f_{1n}(Y(t_1), \dots, Y(t_n)/\alpha_{11})}{f_{0n}(Y(t_1), \dots, Y(t_n)/\alpha_{10})} \quad (2)$$

где f_{jn} — в нашем случае n -мерная плотность распределения измерений в моменты t_i , $i = 1, \dots, n$ значений $Y(t_i)$ при условии, что математическое ожидание процесса изменяется с постоянной скоростью $\alpha_1 = \alpha_{1j}$, $j = 0, 1$.

Поскольку гауссовский процесс $v(t_i)$, $i = 1, 2, \dots$ не коррелирован, то случайные величины $Y(t_i)$, $i = 1, 2, \dots$ статистически независимы, и критерий отношения вероятностей имеет вид:

$$\frac{f_{1n}}{f_{0n}} = \frac{\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(Y(t_i) - \alpha_0 - \alpha_{11}t_i)^2\right]}{\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(Y(t_i) - \alpha_0 - \alpha_{10}t_i)^2\right]}, \quad (3)$$

откуда с помощью несложных преобразований можно придти к выражению

$$\frac{f_{1n}}{f_{0n}} = \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [2(\alpha_{10} - \alpha_{11})t_i(Y(t_i) - \alpha_0) + t_i^2(\alpha_{11}^2 - \alpha_{10}^2)]\right]. \quad (4)$$

Последовательная процедура Вальда заключается в том, что измерения $Y(t_n)$, $n = 1, 2, \dots$ продолжаются, пока выполняется неравенство

$$B < \frac{f_{1n}}{f_{0n}} < A, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

где A и B — выбранные константы.

В случае выполнения условия $\frac{f_{1n}}{f_{0n}} < B$ или $\frac{f_{1n}}{f_{0n}} > A$ при некотором n процесс последовательной проверки оканчивается принятием гипотезы H_0 либо H_1 .

С учетом (4) условие (5) имеет вид:

$$\sigma^2 \ln B < -\frac{(\alpha_{11}^2 - \alpha_{10}^2)}{2} \sum_{i=1}^n t_i^2 + \alpha_{11} - \alpha_{10} \sum_{i=1}^n t_i(Y(t_i) - \alpha_0) < \sigma^2 \ln A \quad (6)$$

или

$$\frac{\sigma^2 \ln B}{(\alpha_{11} - \alpha_{10}) \sum_{i=1}^n t_i^2} + \frac{\alpha_{10} + \alpha_{11}}{2} < \frac{\sum_{i=1}^n t_i(Y(t_i) - \alpha_0)}{\sum_{i=1}^n t_i^2} < \frac{\sigma^2 \ln A}{(\alpha_{11} - \alpha_{10}) \sum_{i=1}^n t_i^2} + \frac{\alpha_{10} + \alpha_{11}}{2}. \quad (7)$$

Если измерения производятся через равные интервалы времени h , то (7) можно представить следующим выражением:

$$C(n) \ln B + \frac{\alpha_{10} + \alpha_{11}}{2} < \frac{6 \sum_{i=1}^n i(Y(ih) - \alpha_0)}{hn(n+1)(2n+1)} < C(n) \ln A + \frac{\alpha_{10} + \alpha_{11}}{2}, \quad (8)$$

где

$$C(n) = \frac{6\sigma^2}{h^2(\alpha_{11} - \alpha_{10})n(n+1)(2n+1)}$$

В центре двойного неравенства (7), (8) находится наилучшая в средне-квадратическом оценка скорости дрейфа $\alpha_1(n)$, вычисленная по n измерениям, при условии, что α_0 известно. Таким образом, вычислительные операции, выполняемые на основе критерия Вальда, аналогичны вычислениям по методу наименьших квадратов.

Выбор величины A и B производится на основе заданных вероятностей ошибок первого и второго рода α и β по приближенным формулам, выведенным Вальдом [3] для проверки параметров распределения случайных величин.

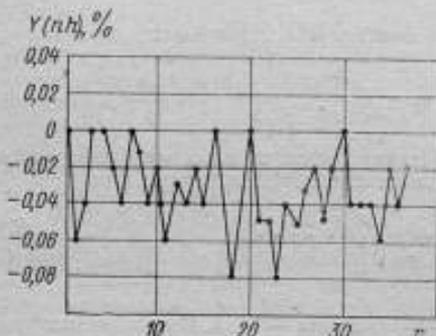


Рис. 1. Изменение приведенной погрешности во времени

ложить следующую методику проверки гипотезы $H_0: \alpha_1 = \alpha_{10}$ против гипотезы о нестабильности $H_1: \alpha_1 = \alpha_{11}$ при заданных вероятностях α и β :

1. До испытаний определяются начальное значение метрологической характеристики α_0 и теоретическая или экспериментальная оценка дисперсии σ^2 случайных флуктуаций $\epsilon(t)$ характеристики Y .

2. Выбирается интервал h , величина которого должна быть не меньше интервала корреляции процесса $\epsilon(t)$.

3. На графике строятся границы приемки $l_{(n)}$ и браковки $l^{(n)}$ как функции от n :

$$l_{(n)} = \frac{\alpha_{10} + \alpha_{11}}{2} + \frac{6\sigma^2 \ln B}{h^2(\alpha_{11} - \alpha_{10})n(n+1)(2n+1)}, \quad (11)$$

$$l^{(n)} = \frac{\alpha_{10} + \alpha_{11}}{2} + \frac{6\sigma^2 \ln A}{h^2(\alpha_{11} - \alpha_{10})n(n+1)(2n+1)}. \quad (12)$$

4. В ходе испытаний ведутся измерения $Y(nh)$, $n = 1, 2, \dots$

5. После каждого измерения по формуле (9) вычисляется текущая оценка скорости $\alpha_1(n)$.

6. Если $l_{(n)} < \alpha_1(n) < l^{(n)}$, то испытания продолжают, если $\alpha_1(n) < l_{(n)}$ или $\alpha_1(n) > l^{(n)}$, то испытания прекращаются, и по поводу испытуемого изделия принимается решение о его стабильности $\alpha_1 < \alpha_{10}$ или нестабильности $\alpha_1 > \alpha_{11}$ соответственно.

Для иллюстрации предложенной методики используется случайный ряд значений приведенной погрешности $Y(nh)$, $n = 1, 2, \dots$ аппаратуры для проверки милливольтметров постоянного тока ($h = 15$ ч), полученных при ее испытаниях на стабильность (рис. 1). Положим $\alpha = \beta = 0,2$.

$$A < \frac{1-\beta}{\alpha}, \quad (9)$$

$$B > \frac{\beta}{1-\alpha}. \quad (10)$$

Эти формулы остаются верными и при проверке гипотезы о параметрах функций математического ожидания гауссовского процесса, если начальные значения α_0 двух гипотетических функций математического ожидания совпадают [5].

На основе формулы (8) и результатов (9), (10) можно предложить гипотезы о стабильности каждого изделия.

Из требований к метрологической безотказности аппаратуры определяется норма скорости α_1 пред дрейфа погрешности Y ($лн$): $0,25 \cdot 10^{-3} \%$ /ч, исходя из которой выбираются приемочный и браковочный уровни $\alpha_{10} = 0,2 \cdot 10^{-3} \%$ /ч, $\alpha_{11} = 0,3 \cdot 10^{-3} \%$ /ч. Начальное значение приведенной погрешности определяется по результатам первой поверки $\alpha_0 = -0,06 \%$ после приработочного периода, а грубая оценка $\sigma^2 = 0,0013 (\%/ч)^2$ вычисляется из 15 наблюдений (не нанесены на графике) за первые 30 ч. По формулам (9) и (10) на графике (рис. 2) строятся границы областей приемки, браковки и продолжения испытаний, а по данным измерений Y ($лн$) на графике строятся текущие оценки $\alpha_1(n)$. Из рис. 2 видно, что решение о стабильности принимается после 10 измерений, т. е. за 150 ч наработки.

Для сравнения следует отметить, что фактические испытания указанной аппаратуры, проводимые по обычной методике, продолжались 600 ч и состояли из более чем 200 измерений (в среднем через 3 ч).

Таким образом, предложенная методика позволяет существенным образом сократить длительность испытаний отдельных средств измерений. Областью ее применения следует считать контрольные испытания мелкосерийных, уникальных средств измерений и их опытных образцов на метрологическую надежность, если имеются основания предполагать наличие линейного дрейфа характеристик или отсутствия такового вообще.

К числу недостатков предлагаемой методики следует отнести: необходимость проведения текущих вычислений оценки $\alpha_1(n)$ после каждого измерения (до 10 арифметических операций, часть результатов вычислений можно табулировать); необходимость проведения измерений через равные интервалы времени (в противном случае построение границ приемки и браковки становится слишком сложным).

Распределение метода на случай дрейфа более сложного вида наталкивается на принципиальные трудности, связанные с определением К-мерных (по числу неизвестных параметров модели дрейфа) параметрических областей стабильности и нестабильности средства измерений.



Рис. 2. Выход процесса $\alpha_1(n)$ из области продолжения испытаний в область стабильности

ЛИТЕРАТУРА

1. Вострокнутов Н. Н. и Земельман М. А. Метрологические характеристики точных стабилизаторов напряжения и методика их исследования. «Измерительная техника», 1964, № 1, с. 38—41, с ил.
2. Абуладзе И. В., Беляевский А. И. Оценка функции влияния внешних факторов на погрешности электроизмерительного прибора. «Измерительная техника», 1973, № 6, с. 9—12, с ил.
3. Вальд А. Последовательный анализ. М., Физматгиз, 1960, с. 270.
4. Леман Э. А. Проверка статистических гипотез М., «Мир», 1963, с. 483.
5. Bhattacharya R. K., Smith R. P. Sequential probability ratio test for the mean value function of a gaussian process. The Annals of Math. Stat., 1972., vol. 43, No. 6, pp. 1861—1873.

Поступила в редакцию 20/V—1974 г.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В настоящее время в советской и зарубежной печати много внимания уделяется вопросам методологии научного прогнозирования [6]. Инженерное прогнозирование базируется в основном на трех комплексных методах: 1) прогнозирование на основе количественного анализа инженерно-технической значимости изобретений; 2) прогнозирование путем выяснения полезных стратегий и 3) прогнозирование по обобщенным параметрам [1].

Особое место в указанных методах занимают вопросы прогнозирования в условиях неопределенности, что объясняется необходимостью нахождения метода прогнозирования при отсутствии достаточного количества информации [6]. Ограниченность объема информации, получаемой в результате исследования, создает трудности не только при прогнозировании, но и вообще при статистическом анализе для принятия того или иного решения. Это объясняется тем, что математические методы современного статистического анализа базируются главным образом на выводах, полученных в предположении, что исследуемая статистическая совокупность представляет собой случайную выборку из генеральной совокупности неограниченного объема, т. е. из бесконечной совокупности. В действительности же приходится сталкиваться с необходимостью прогнозирования и принятия решения по выборкам конечного, а не бесконечного объема и чаще всего анализировать «состояние природы» [9] по выборкам малого объема. В этих случаях традиционные методы статистического анализа становятся мало эффективными и могут привести к недостаточно надежным выводам [3].

В настоящее время сделаны первые шаги в решении проблемы повышения эффективности статистических методов в условиях ограниченного объема информации или в условиях неопределенности.* Впервые эта проблема была сформулирована и частично решена методом прямоугольных вкладов в 1959 г. [10]. Затем над ее дальнейшим решением работали А. Н. Свердлов и И. В. Еременко, создавшие оригинальный метод уменьшения неопределенности, изложенный в [8]. Одним из существенных недостатков указанных методов является их недостаточная теоретическая обоснованность. В процессе дальнейшего исследования был разработан и теоретически обоснован так называемый метод априорно-эмпирических функций (АЭФ) [3].

Метод АЭФ служит для построения функции распределения по результатам малого числа наблюдений случайной величины. Если случайная величина является одним из параметров научно-технического прогресса, то, определив вид распределения, мы тем самым прогнозируем этот параметр [7]. Из этого следует, что метод АЭФ можно применить к научному прогнозированию в условиях неопределенности, используя при этом байесовский подход, т. е. априорно приписывая равновероятность осуществления каждому из возможных событий.

Известно [2], что априорно-эмпирические функции распределения имеют вид:

$$F_{\omega}(x) = \omega F_A(x) + (1 + \omega) F_B(x),$$

где ω — уровень достоверности априорной информации относительно $F_A(x)$;

$F_A(x)$ — априорная функция распределения случайной величины X ;

* Под условием неопределенности в данном случае понимается равновероятность альтернатив отсутствия точных критериев для принятия решения [6].

$F_2(x)$ — эмпирическая функция распределения случайной величины X ;
 $F_*(x)$ — априорно-эмпирическая функция распределения, являющаяся смесью двух распределений — априорного и эмпирического.

Интересно отметить, что условие $\omega = 0$ соответствует частному случаю, когда априорная информация об исследуемом распределении прогнозируемой величины X отсутствует, а искомое распределение этой величины описывается только эмпирическим распределением. Этот частный, по сравнению с выражением [1], случай представляет собой классический метод математической статистики, с помощью которого обычно определяется искомое распределение наблюдаемой величины X . Такое истолкование дает объяснение факту низкой эффективности традиционного статистического анализа в условиях ограниченного объема информации, т. е. в условиях малых и квазималых выборок.

Практическое использование метода АЭФ [4] может осуществляться двумя способами — аналитическим и графическим. Аналитический способ заключается в том, что используя понятия производящей функции, получают в общем виде расчетные формулы моментов АЭФ:

$$\begin{aligned} Me^{x_s t} &= \sum_i e^{x_i t} p_{*i} = \sum e^{x_i t} [\omega P_{\alpha_i} + (1 - \omega) P_{\beta_i}] = \\ &= \omega Me^{x_{\alpha} t} + (1 - \omega) Me^{x_{\beta} t}, \end{aligned} \quad (2)$$

откуда начальный момент n -го порядка будет

$$\frac{d^{(n)} Me^{x_s t}}{dt^n} = \omega \frac{d^{(n)} Me^{x_{\alpha} t}}{dt^n} + (1 - \omega) \frac{d^{(n)} Me^{x_{\beta} t}}{dt^n}, \quad (3)$$

или
$$v_{*n} = \omega v_{\alpha n} + (1 - \omega) v_{\beta n}, \quad (4)$$

следовательно,

$$\bar{X}_* = \omega \bar{X}_{\alpha} + (1 - \omega) \bar{X}_{\beta}. \quad (5)$$

Используя известное соотношение для второго момента

$$\mu_2 = v_2 - v_1^2, \quad (6)$$

получим следующую расчетную формулу для дисперсии

$$\mu_{*2} + v_{*1}^2 = \omega (\mu_{\alpha 2} + v_{\alpha 1}^2) + (1 - \omega) (\mu_{\beta 2} + v_{\beta 1}^2). \quad (7)$$

Графический способ позволяет построить искомую функцию распределения и затем по ней определить все необходимые данные. [2]. Способ основан на соотношении (1) и следующих предположениях относительно искомой функции плотности распределения:

А.

$$f_*(x) > 0 \quad \text{при} \quad a - \frac{\Delta}{2} < x < b + \frac{\Delta}{2}; \quad (8)$$

$$f_*(x) \equiv 0 \quad \text{при} \quad x < a - \frac{\Delta}{2} \quad \text{и} \quad x > b + \frac{\Delta}{2}, \quad (9)$$

где a и b — конечные числа, а Δ — интервал дискретности, который определяется точностью наблюдения случайной величины X .

Б. $f^*(x)$ является ограниченной функцией в интервале $\left[a - \frac{\Delta}{2}, b + \frac{\Delta}{2} \right]$ и имеет конечное число точек разрыва, т. е. удовлетворяет условиям Дирихле.

Предположение Б отражает фактическую ступенчатую форму функции плотности распределения результатов наблюдений (например, погрешностей измерения), так как практически они всегда округляются с дискретностью,

соответствующей пределу точности отсчитывания измерительного прибора. Внутри интервала округления (интервала дискретности) естественно считать распределение реализаций равномерным. Таким образом, способ АЭФ учитывает интервалы дискретности и равномерно распределяет индивидуальную информацию, заключенную в отдельных реализациях x на интервале $\left[x_i - \frac{\Delta}{2}, x_i + \frac{\Delta}{2} \right]$, так как все реализации, попавшие в точку x_i , фактически распределены в указанном интервале равномерно (в том числе и одиночная реализация).

Графический способ АЭФ предусматривает следующий порядок действий:

1. Задаются видом априорной функции распределения $F_a(x)$ или априорным распределением*

$$P_a = \{P_{a_i}\}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^m P_{a_i} = 1. \quad (10)$$

2. Задаются коэффициентом достоверности ω информации о предполагаемом виде априорного распределения. При прогнозировании в условиях неопределенности этот коэффициент обычно принимают равным 0,5.

3. Определяют интервал $[a, b]$ и интервал дискретности Δ путем уточнения области существования априорного и эмпирического распределений. Следует заметить, что область, определяющая интервал $[a, b]$, является совокупностью интервалов существования априорного и эмпирического распределений и непрерывна.

4. Вычисляют интервал $\left[a - \frac{\Delta}{2}, b + \frac{\Delta}{2} \right]$, определяющий область существования функции.

5. В интервале $\left[a - \frac{\Delta}{2}, b + \frac{\Delta}{2} \right]$ строят** априорную функцию распределения $F_a(x)$, при этом

$$F_a\left(x = a - \frac{\Delta}{2}\right) = 0; \quad (11)$$

$$F_a\left(x = b + \frac{\Delta}{2}\right) = 1. \quad (12)$$

6. В интервале функции строят график учета характера априорной функции распределения $F_a(x)$, представляющий собой линию, проведенную через точки

$$y_j = \omega F_a(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (13)$$

где ω — принятый уровень достоверности априорной информации;

k — количество точек, необходимых для более точного построения графика учета. Величина k зависит от характера $F_a(x)$.

В случае равномерного распределения (при прогнозировании в условиях неопределенности) график учета является прямой линией, проведенной через точки $A\left[a - \frac{\Delta}{2}, 0\right]$ и $B\left[b + \frac{\Delta}{2}, \omega\right]$.

* При прогнозировании в условиях неопределенности на первом этапе используют равномерное распределение, исходя из байесовского подхода к решению поставленной задачи, т. е. априорно приписывая равновероятность осуществления любому из возможных событий.

** При прогнозировании в условиях неопределенности вначале строят равномерную функцию распределения, а на последующем этапе строят функцию $F_a(x)$, полученную в результате использования байесовского подхода.

7. Вычисляют величину приращения δ эмпирической функции распределения при одной реализации случайной величины X по формуле:

$$\delta = \frac{1 - \omega}{n}, \quad (14)$$

8. В интервале $\left[a - \frac{\Delta}{2}, b + \frac{\Delta}{2} \right]$ проводят сетку из $(l + 1)$ линий,

первая из которых является линией учета характера функции $F_n(x)$, построенной при выполнении п. 6. Остальные линии смещены одна относительно другой на расстояние

$$r_i = m_i \delta, \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad (15)$$

где m_i — число реализаций, равных по значению величине x_i . Последняя линия проходит через точки $C \left[a - \frac{\Delta}{2}, 1 - \omega \right]$ и $D \left[b + \frac{\Delta}{2}, 1 \right]$. Следует отметить, что при прогнозировании в условиях неопределенности указанная сетка представляет собой линии, которые расположены параллельно линии учета и смещены друг от друга на расстояние r_i , определяемое из соотношения (15).

9. В точках $x_i \pm \frac{\Delta}{2}$ восстанавливают перпендикуляры к оси абсцисс.

10. Находят точки пересечения перпендикуляров: в точках $x_i - \frac{\Delta}{2}$ с i -ми линиями сетки; в точках $x_i + \frac{\Delta}{2}$ с $(i + 1)$ -ми линиями сетки.

11. Проводят ломаную линию от точки $A \left[a - \frac{\Delta}{2}, 0 \right]$ до точки $D \left[b + \frac{\Delta}{2}, 1 \right]$, соединив последовательно все точки пересечения. Например, от точки A указанная линия должна идти по линии учета до точки пересечения ее с перпендикуляром, восстановленным из точки $x_1 - \frac{\Delta}{2}$. Затем, по прямой линии до точки пересечения 2-й линии учета с перпендикуляром, восстановленным из точки $x_1 + \frac{\Delta}{2}$ и далее по 2-й линии учета до пересечения со следующим перпендикуляром и т. д., вплоть до точки B .

Найденная таким образом ломаная линия и будет искомой функцией (априорно-эмпирической) распределения $F_n(x)$. Этим заканчивается первый этап анализа в условиях неопределенности,* после чего используют п. 1 и вновь выполняют все действия, изложенные в пп. 1—11**. На этом заканчивают определение искомой функции распределения в условиях неопределенности и приступают к дальнейшему анализу полученного графика. Все участки графика являются наклонными линиями, поэтому определение параметров, квантилей и толерантных пределов искомого распределения не представляет трудностей. Искомые квантили являются ординатами точек пересечения перпендикуляров, восстановленных из соответствующих точек на оси

* В тех случаях, когда априорно известен предлагаемый вид функции распределения $F_n(x)$, условия неопределенности нет. Тогда используют ту же методику определения функции распределения, ограничиваясь одним циклом построений.

** Для обработки последующих результатов x_{n+1}, x_{n+2}, \dots , которые не были известны до получения функции $F_n(x)$.

абсциссе с полученной ломаной линией. Изложенный способ позволяет получить искомые квантили или толерантные пределы с любой заданной точностью, что достигается соответствующим изменением масштаба осей координат.

Существует возможность решения обратной задачи, когда по заданному значению квантиля или предела отыскивается значение X , удовлетворяющее поставленным требованиям.

Следует заметить, что метод АЭФ является в достаточной степени общим и в качестве частных случаев включает в себя метод прямоугольных вкладов [10], метод уменьшения неопределенности и классический, основанный на соотношении

$$F_n(x) = F_n(x/x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X < x/x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 0 & \text{если } x < x_1, \\ \frac{m}{n}, & \text{если } x_m < x < x_{m+1}, \quad 1 < m < n-1 \\ 1, & \text{если } x > x_n, \end{cases} \quad (16)$$

где $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$ — вариационный ряд наблюдаемых реализаций случайной величины X .

В вычислительном центре ВНИИМ осуществлена проверка эффективности метода АЭФ по сравнению с классическим методом, основанным на соотношении (16). Оценка эффективности производилась по формуле

$$W = 1 - \frac{D_*(x)}{D_3(x)}, \quad (17)$$

где $D_*(x)$ — дисперсия выборки, полученная по отклонениям АЭФ распределения от истинного;

$D_3(x)$ — дисперсия выборки, полученная по отклонениям эмпирической функции (16) от истинной.

Результаты исследования представлены в таблице.

Назначенный уровень достоверности априорной информации	Объем выборки	Равномерное распределение	Нормальное распределение
0,4	1	Не определялось	0,785
	2	То же	0,759
	3	0,714	0,813
	6	0,796	0,805
	10	0,854	0,826
0,5	1	Не определялось	0,845
	2	То же	0,845
	3	0,789	0,854
	6	0,788	0,880
	10	0,818	0,887
0,6	1	Не определялось	0,891
	2	То же	0,896
	3	0,866	0,916
	6	0,873	0,931
	10	0,877	0,944

Проверка производилась для равномерного закона распределения в интервале (0,1) и для нормального закона распределения $N(0,1)$. Проведенное исследование показало высокую эффективность метода АЭФ [5].

Использование дополнительных особых условий позволяет производить статистический анализ квазимальных выборок ($n < 3$) симметричных распределений методом АЭФ [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гмошинский В. Г. Методические основы инженерного прогнозирования. — В сб. «Прогнозирование научно-технического прогресса». Иркутск, ЦНТИ, 1970, с. 7—9.

2. Демаков И. П., Потепун В. Е. Графо-аналитический метод построения полумпирических функций распределений малых выборок. — В сб. «Общие вопросы метрологии». Труды метрологических институтов СССР, вып. 130 (190), 1972, с. 119—125, с ил.

3. Демаков И. П., Потепун В. Е. Статистические методы определения законов распределения при анализе точности надежности промышленных изделий по результатам эксперимента. Л., «Знание», ЛДНТП, 1970, 40 с.

4. Демаков И. П. Новые принципы контроля процессов и сложных систем в условиях ограниченного объема информации. Сб-к докладов Всесоюзного совещания по автоматизации химических процессов, г. Дзержинск, филиал ОКБА, М., 1970, 12 с.

5. Демаков И. П., Леринц В. А., Князян Ш. Л. К вопросу об эффективности метода априорно-эмпирических функций при статистическом анализе малых выборок. Труды XVIII конференции ЕрПИ им. К. Маркса, Ереван, ЕрПИ, 1971, с. 85—87.

6. Зверьков В. С. Прогноз и неопределенность. — В сб. «Прогнозирование научно-технического прогресса». Иркутск, ЦНТИ, 1970, с. 35—36.

7. Зверьков В. С., Казаков О. А., Щербаков А. В. Применение байесовой процедуры в научно-техническом прогнозировании. — В сб. «Прогнозирование научно-технического прогресса». Иркутск, ЦНТИ, 1970, с. 33—34.

8. Рябинин И. А. Теория и расчет надежности судовых электроэнергетических систем. Л., «Судостроение», 1967, 364 с., с ил.

9. Чернов Г., Мозес Л. Е. Элементарная теория статистических решений (пер. с англ.) М., «Советское радио», 1963, 406 с.

10. Чавчанидзе В. В., Кумсшвили В. А. Об определении законов распределения на основе малого числа наблюдений. — В сб. «Применение вычислительной техники для автоматизации производства», под ред. В. В. Солодовникова, Машгиз, 1961, с. 129—139.

Поступила в редакцию 15/IV—1974 г.

УДК 621.317.725.083.92—193 : 517.5

Ю. Г. БАЛАГЕЗЯН, Л. Г. ТУЛЬЧИН

ВНИИМ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА ПРИ ОЦЕНКЕ КАЧЕСТВА ЦИФРОВЫХ ВОЛЬТМЕТРОВ

Одной из актуальных задач научно-технического прогресса является задача оценки качества промышленных изделий. В настоящее время разработан ряд математических моделей оценок уровня качества, анализ которых произведен в работе [1]. Как следует из указанной работы, основными недостатками, присущими этим моделям, являются: отсутствие учета статистической взаимосвязи между показателями и определение коэффициентов ве-

сомости показателей экспертным путем. Применение факторного анализа позволяет получить критерии, лишенные этих недостатков.

Построим критерии оценки качества при помощи факторного анализа на примере цифровых вольтметров. Этот процесс состоит из четырех этапов:

- 1) вычисление оценок факторных нагрузок A при помощи алгоритма, разработанного в [2];
- 2) геометрическая интерпретация выделенных факторов с использованием некоторых эвристических процедур и методов вращения;
- 3) оценка значений факторов;
- 4) построение критериев оценки качества.

Будем характеризовать качество цифрового вольтметра шестью основными единичными показателями: погрешностью измерения, нижним пределом измерения, разрешающей способностью, выходным сопротивлением, временем измерения, верхним пределом измерения, которые обозначим P_1, P_2, \dots, P_6 .

Рассмотрим выборку, состоящую из 20 приборов (табл. 1). Корреляционная матрица системы показателей P_1, P_2, \dots, P_6 приведена в табл. 2.

Таблица 1

Цифровой вольтметр	Погрешность измерения, %	Нижний предел измерения, В	Разрешающая способность, мкВ	Входное сопротивление, Ом	Время измерения, с	Верхний предел измерения, В
ЦВ1	0,015	0,3	30	10^9	0,02	1000
ЦВ2	0,05	1	100	10^8	0,02	1000
ЦВ3	0,1	1	500	$2 \cdot 10^9$	0,1	1000
ЦВ4	0,2	0,16	100	10^7	0,3	1600
ЦВ5	0,004	1	1	10^9	1,1	1000
ЦВ6	0,003	0,02	0,1	10^9	0,001	1000
ЦВ7	0,01	0,01	0,1	10^7	0,011	100
ЦВ8	0,006	0,1	1	10^7	1,6	1000
ЦВ9	0,0	1	10	10^9	0,2	1000
ЦВ10	0,003	1	10	$2 \cdot 10^{10}$	0,02	1000
ЦВ11	0,01	1	50	$2 \cdot 10^{10}$	0,02	1000
ЦВ12	0,02	0,2	10	10^7	0,1	2000
ЦВ13	0,005	0,1	1	10^9	0,1	1000
ЦВ14	0,02	0,1	10	10^9	0,1	1000
ЦВ15	0,1	0,32	100	10^8	1,0	10000
ЦВ16	0,05	3	500	10^7	0,005	1000
ЦВ17	0,1	1	1000	10^8	0,05	1000
ЦВ18	0,1	0,2	100	10^8	0,33	1000
ЦВ19	0,1	1,8	1000	10^9	0,08	1000
ЦВ20	0,1	0,1	100	10^9	0,2	1000

В начале анализа выдвинем гипотезу H_0 о том, что изучение взаимозависимости между шестью показателями цифровых вольтметров можно свести к двум некоррелированным простым факторам против альтернативной гипотезы H_1 , не выдвигающей этого числа простых факторов. Для вычисления оценок факторных нагрузок воспользуемся итерационным алгоритмом, предложенным в работе [2]. Результаты приведенных вычислений представлены в табл. 3.

Таблица 2

1,000	0,0548	0,459	-0,304	-0,0244	0,277
0,0548	1,000	0,588	0,148	-0,199	-0,0374
0,459	0,588	1,000	-0,176	-0,225	-0,0282
-0,304	0,148	-0,176	1,000	-0,208	-0,0448
-0,0244	-0,199	-0,225	-0,208	1,000	0,0295
0,277	-0,0374	-0,0282	-0,0448	0,0295	1,000

Таблица 3

Показатели качества	$\varphi = 0$		$\varphi = 12$	
	Нагрузка на фактор f_1 σ_{11}	Нагрузка на фактор f_2 σ_{22}	Нагрузка на фактор f_1 σ'_{11}	Нагрузка на фактор f_2 σ'_{22}
Погрешность измерения	0,608	0,594	0,718	0,455
Нижний предел измерения	0,577	-0,501	0,460	-0,610
Разрешающая способность	0,894	-0,139	0,845	-0,322
Входное сопротивление	-0,20	-0,363	-0,271	-0,313
Время измерения	-0,211	0,208	-0,163	0,247
Верхний предел измерения	0,066	0,314	0,130	0,293

Для проверки гипотезы H_0 при заданном уровне значимости $\alpha = 0,05$ воспользуемся формулой

$$\chi^2 = N' \cdot \sum_{i,j} \bar{b}_{ij}^2$$

где \bar{b}_{ij} — элемент матрицы $\bar{B} = D^{-2} (B_0 - AA')$;
 D^2 — остаточные дисперсии;

B_0 — исходная корреляционная матрица со значениями общности* на главной диагонали;

$$N' = N - \frac{1}{6} (2n + 5) - \frac{2}{3} k;$$

N — число элементов выборки;

n — число наблюдаемых показателей;

k — число простых факторов.

Число степеней свободы определяется из равенства

$$V = \frac{1}{2} [(n - k)^2 - n - k].$$

Проведенные вычисления показали, что $\chi^2_{\text{эмп}} = 2,106$, это значительно меньше $\chi^2_{\text{табл}} = 9,488$ [3]. Таким образом, гипотеза H_0 принимается.

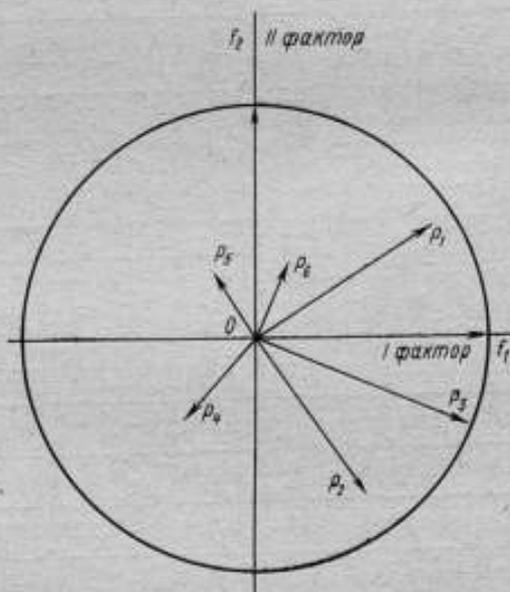


Рис. 1. Графическая иллюстрация результатов

На рис. 1 представлена графическая иллюстрация результатов, приведенных в табл. 3. На рисунке по оси абсцисс отложены нагрузки на первый фактор, а по оси ординат — нагрузки на второй фактор. Согласно выдвинутой гипотезе базисные оси взяты ортогональными друг другу. Из рисунка видно, что в пространстве простых факторов (f_1, f_2) показатели P_1, \dots, P_n изображаются векторами. Их длина равна общности соответствующего показателя. Так как длина каждого фактора равна 1 [3], то все векторы, изо-

* Общность — часть единичной дисперсии параметра P_i , которую можно выразить как

$$h_i^2 = \sum_{r=1}^k a_{ir}^2$$

бражающие P_1, \dots, P_n , лежат внутри круга единичного радиуса. Близость концов этих векторов к окружности свидетельствует о полноте проявления двух простых факторов в данном показателе, а их длина — о важности данного показателя в оценке качества прибора. Таким образом, на основании графического представления можно судить о важности того или иного показателя при оценке качества. Кроме того, по рис. 1 можно судить о статистической взаимосвязи между рассматриваемыми показателями, поскольку величина косинуса между векторами (P_j, P_l) является коэффициентом корреляции

$$\cos(P_j P_l) = r_{jl},$$

где r_{jl} — коэффициент корреляции между показателями P_j и P_l .

Так, например, как видно из рис. 1, имеется существенная отрицательная корреляционная связь между показателями «погрешность измерения» и «входное сопротивление».

Анализ факторных нагрузок показал, что первый фактор интерпретируется как «метрологический» фактор, так как на него влияют большие положительные нагрузки от первых трех показателей, характеризующих метрологические свойства цифрового вольтметра.

С целью выявления дальнейших взаимосвязей между факторами и показателями и более четкой интерпретации факторов будем производить ортогональное вращение системы координат на рис. 1. При этом в основном преследуют две цели:

1) более рациональное распределение нагрузок на первый фактор с точки зрения его интерпретации;

2) возможность интерпретации второго фактора как динамического, для чего необходимо получение более высокой нагрузки a_{i2} по сравнению с a_{i1} , где $i = 1, 2, \dots, 6$; $i \neq 5$.

Как показало вращение, требуемое соотношение между нагрузками на фактор f_1 достигается при угле вращения $\varphi = 12^\circ$. Противоположный знак величинами четвертой нагрузки на первый фактор показывает, что для улучшения метрологических свойств прибора требуется увеличивать входное сопротивление, а погрешность, нижний предел измерения и разрешающую способность уменьшать.

В результате проведенного вращения не удалось получить высокую нагрузку a_{52} . Это подтверждает положение (см. рис. 1) о малых требованиях к быстродействию цифрового вольтметра, а следовательно, о небольшой значимости этого показателя. Анализ результатов вращения показал, что в системе некоррелированных факторов (f_1, f_2) второй фактор вообще не удается интерпретировать.

Для интерпретации второго фактора было решено осуществить переход к системе коррелированных факторов f_1 и f_2 . Переход осуществляется путем определения матрицы преобразований, с помощью которой могут быть получены как элементы структуры S (т. е. коэффициенты корреляции между показателями и факторами), так и модели (факторные нагрузки) B в новой косоугольной системе координат (в ортогональной системе координат структура совпадает с моделью). Попутно могут быть получены коэффициенты корреляции между факторами f_1 и f_2 .

Вначале осуществим разбиение показателей на группы, число которых равно числу факторов. Определение этих групп может быть осуществлено либо исходя из физических соображений, либо методами кластерного анализа (теории классификаций), изложенного в [4]. В приводимом примере принята следующая группировка: $J_1 = (P_1, P_2, P_3)$ — показатели, характеризующие метрологические свойства прибора, $J_2 = (P_4, P_5, P_6)$ — остальные показатели.

Введем составные переменные v_1 и v_2 :

$$v_1 = P_1 + P_2 + P_3;$$

$$v_2 = P_4 + P_5 + P_6.$$

Дисперсии составных переменных v_s ($s = 1, 2$) определим по формуле

$$\sigma_{v_s} = \sqrt{\sum_{j,k} r_{jk}}, \quad j, k \in J_s. \quad (1)$$

где r_{jk} — коэффициент корреляции между показателями P_j и P_k .
Пользуясь формулой (1), получим

$$\sigma_{v_1} = 2,353, \quad \sigma_{v_2} = 0,1304.$$

Составные переменные v_1 и v_2 должны быть представлены как линейные комбинации факторов f_1 и f_2 , причем веса в этих линейных комбинациях являются коэффициентами корреляций составных переменных с факторами f_1 и f_2 . Коэффициенты корреляции переменной v_s с любым из факторов определяются из равенства

$$r_{v_s f} = \frac{\sum_j r_{jf}}{\sigma_{v_s}}, \quad f \in J_s.$$

где r_{jf} — коэффициенты корреляции показателя P_j с фактором f .
Линейные комбинации факторов f_1 и f_2 будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{v_1}{\sigma_{v_1}} = 0,774f_1 - 0,335f_2; \\ u_2 &= \frac{v_2}{\sigma_{v_2}} = 0,253f_1 + 4,141f_2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Перейдем теперь к определению элементов матрицы преобразований M . Так как коэффициенты в линейных выражениях (2) являются координатами точек v_1 и v_2 , то деление на соответствующие расстояния этих точек от начала координат дает направляющие косинусы прямых t_1 и t_2 , проходящих через эти точки. Эти направляющие косинусы и образуют элементы матрицы преобразований:

$$M = \begin{bmatrix} 0,911764 & -0,060993 \\ -0,410539 & 0,998312 \end{bmatrix}.$$

Как известно [3], $\Phi = M' \cdot M$ — дает величину коэффициента корреляции между факторами t_p и t_q ($p, q = 1, 2$). Указанные коэффициенты корреляции приведены в матрице:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1,000000 & -0,465458 \\ -0,465458 & 1,000000 \end{bmatrix}$$

Элементы структур вычисляются из равенства: $S = A \cdot M$

$$S' = \begin{bmatrix} 0,468 & 0,670 & 0,903 & -0,118 & -0,250 & -1,002 \\ 0,410 & -0,637 & -0,373 & -0,296 & 0,256 & 0,284 \end{bmatrix}$$

Для завершения перехода к коррелированным факторам t_1 и t_2 необходимо определить также и косоугловую факторную модель B (т. е. факторные нагрузки) (рис. 2). Эта матрица определяется из равенства: $B = S \cdot M^{-1}$

$$B' = \begin{bmatrix} 0,844 & 0,477 & 1,307 & -0,326 & -0,167 & 0,166 \\ 0,801 & -0,415 & 0,060 & -0,448 & 0,178 & 0,361 \end{bmatrix}$$

Осуществляя интерпретацию первого и второго фактора, можно по коэффициенту корреляции между ними определять, как влияет изменение одного из них на другой. В предлагаемом примере первый фактор остается

метрологическим, а второй интерпретировать также не удалось. Это окончательно свидетельствует о малой важности показателей P_4, P_5, P_6 при оценке качества.

На следующем этапе определим оценки значений факторов. Уравнение, связывающее любой фактор f_i и n параметров (P_1, P_2, \dots, P_n) , будем искать в виде

$$\bar{f}_i = \beta_{i1}q_1 + \beta_{i2}q_2 + \dots + \beta_{in}q_n, \\ i = 1, 2, \dots, n,$$

где β_{ij} — определяется из табл. 2 и 3, согласно [3];
 q_i — нормированная оценка P_i .

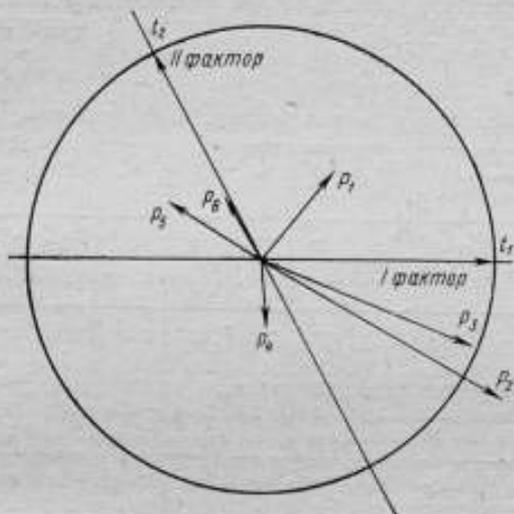


Рис. 2. Косоугольная факторная модель

Величина q_i определяется по формулам:

$$q_i = \lg \left(\frac{10P_i}{P_i^6} \right), \quad (3)$$

$$q_i = \lg \left(\frac{10P_i^6}{P_i} \right), \quad (4)$$

где P_i^6 — базовый показатель качества, определяемый как наилучший показатель данной группы приборов.

Целесообразность выбора в качестве модели единичных показателей формул (3) и (4) объясняется тем, что выбор линейных моделей $\frac{P_i}{P_i^6}$ или $\frac{P_i^6}{P_i}$ приводит к значительным погрешностям при построении критерия (так как диапазон изменения единичных показателей достигает нескольких порядков).

Вид моделей критериев качества, полученных с помощью методов факторного анализа, и их обоснования приведены в работе [5]. Для цифровых вольтметров целесообразно использовать критерий

$$K = f_1.$$

Тогда

$$K = 0,1435q_1 + 0,305q_2 + 0,583q_3 + 0,00914q_4 + 0,0078q_5 + 0,0673q_6. \quad (5)$$

Пренебрегая, ввиду их малости, последними тремя слагаемыми равенства (5), получим

$$K' = 0,1435q_1 + 0,305q_2 + 0,583q_3. \quad (6)$$

Для цифровых вольтметров, указанных в табл. 1, были вычислены величины критерия (6) и пронумерованы в порядке убывания величин критерия, т. е. приборам с самой высокой величиной критерия присваивается ранг 1, следующему 2 и т. д. Полученные результаты, а также результат опроса экспертов о качестве указанных приборов представлены в табл. 4. Из таблицы следует, что ранги приборов, полученные с помощью критерия (6), хорошо согласуются с рангами, определенными экспертами (коэффициент корреляции $r = 0,905$).

Таблица 4

Сравнительные данные ранжирования приборов

Ранги приборов по величине фактора	10	16	17	15	5	1	2	4	9	8
Ранги приборов, представленные экспертами	9-10	12	18	17	4	1	3	5-6	7	5-6
Цифровые вольтметры	ЦВ1	ЦВ2	ЦВ3	ЦВ4	ЦВ5	ЦВ6	ЦВ7	ЦВ8	ЦВ9	ЦВ10
Ранги приборов по величине фактора	11	7	3	6	13-14	18	19	13-14	20	12
Ранги приборов, представленные экспертами	9-10	11	2	8	13	15-16	19	15-16	20	14
Цифровые вольтметры	ЦВ11	ЦВ12	ЦВ13	ЦВ14	ЦВ15	ЦВ16	ЦВ17	ЦВ18	ЦВ19	ЦВ20

Таким образом, предлагаемый метод позволяет: построить объективный критерий оценки качества; учесть статистическую взаимосвязь между единичными показателями; исключить необходимость участия экспертов при определении коэффициентов весомости.

Разработанный метод может быть использован для оценки качества различных видов изделий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркович А. Б., Подлужный Н. М., Тульчин Л. Г. Выбор критерия при оценке качества сложных измерительных приборов. В сб. «Качество и надежность». Вып. 2., ЦНИИТЭИ приборостроения. М., 1974, с. 6-15.
2. Балагезин Ю. Г., Мельническая Ж. С. Ускоренные испытания на надежность и факторный анализ результатов и наблюдений. ЛДНТП, 1972, 24 с.
3. Харман Г. Современный факторный анализ. М., «Статистика», 1972, 566 с.

4. Райская Н. Н. и др. Кластерный анализ и его применение. «Заводская лаборатория», 1972, том XXXVIII, № 10, с. 8—16.

5. Тульчин Л. Г. Разработка критериев оценки качества электроизмерительных приборов на основе метода главных факторов. Труды ВНИИЭП, № 20, 1974, с. 162—172, с ил.

Поступила в редакцию 15/IV 1974 г.

УДК 658.513.5 : 681.2—192

Б. И. КОЗЛОВ, А. Э. ФРИДМАН

ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ НА НАДЕЖНОСТЬ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Одним из путей повышения надежности средств измерений является априорный анализ условий эксплуатации и ее рациональной организации [1]. Такой анализ является основой для планирования эксплуатации.

Обычно под планированием эксплуатации понимается установление количественных норм и правил расходования материальных ресурсов, а также развернутых во времени алгоритмов действий обслуживающего персонала, направленных на поддержание работоспособности технических средств в процессе их хранения и использования.

Применительно к средствам измерений такое планирование заключается в разработке комплекса организационно-технических мероприятий с целью обеспечения надежности средств измерений, в частности, в обосновании организации функционирования и обслуживания средств измерений, поверочных работ, профилактического обслуживания, текущих ремонтов, снабжения ЗИП.

Очевидно, что конкретные задачи планирования эксплуатации не одинаковы для средств измерений различного назначения и различных условий применения. Это вызывает необходимость рассматривать вопросы эксплуатации непосредственно в процессе проектирования. Однако в настоящее время в НИИ и КБ, разрабатывающих измерительную технику, этим вопросам, как правило, уделяется недостаточное внимание.

При этом понятие «условия эксплуатации» трактуется неточно. Под условиями эксплуатации следует понимать не только климатические, механические и прочие воздействия окружающей среды, но и всю совокупность факторов, изменяющих техническую эффективность средств измерений в период эксплуатации, в том числе и организацию технического обслуживания. Сведение же условий эксплуатации лишь к воздействию окружающей среды приводит к тому, что при проектировании условия технического обслуживания не рассматриваются и не учитываются. Схемные и конструктивные решения принимаются без учета таких факторов, как количество и квалификация обслуживающего персонала, интенсивность эксплуатации средств измерений, организация текущих, средних и капитальных ремонтов, периодичность и объем профилактических проверок, организация поверок и межповерочные интервалы, ограничения по количеству запасных элементов и расходных материалов и т. п. В итоге не используются какие-либо возможности для повышения технической эффективности измерительной техники за счет рациональной организации ее эксплуатации. Приведем ряд примеров.

Пример 1. Установка для поверки вольтметров и амперметров постоянного и переменного тока имеет расчетную интенсивность отказов $\lambda = 0,0041/\text{ч}$, что соответствует наработке на отказ $T = 250$ ч. Поскольку в техническом задании требуется не менее 500 ч для наработки на отказ, то очевидна необходимость доработки схемы или конструкции прибора с целью повышения

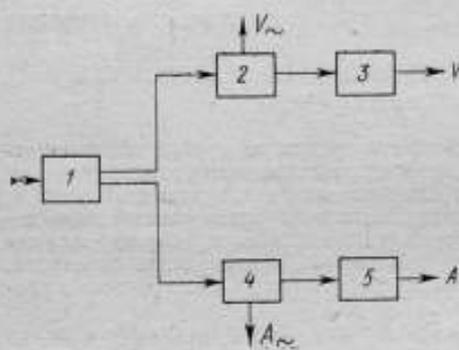
надежности. Однако анализ показывает, что это необходимо не во всех случаях.

На рис. 1 приведена блок-схема надежности установки, которая состоит из пяти узлов — групп элементов, работающих при поверке: 1 — любых приборов; 2 — вольтметров; 3 — вольтметров постоянного тока; 4 — амперметров; 5 — амперметров постоянного тока.

Интенсивности отказов узлов составляют:

$$\lambda_1 = 0,0004 \text{ 1/ч}, \lambda_2 = 0,0007 \text{ 1/ч}, \lambda_3 = 0,0016 \text{ 1/ч}, \lambda_4 = 0,0003 \text{ 1/ч}, \lambda_5 = 0,0010 \text{ 1/ч}.$$

Интенсивность отказов установки должна определяться [с] учетом потока приборов, поступающих на поверку, по формуле:



$$\lambda = P_{в\sim} \lambda_{в\sim} + P_{в-} \lambda_{в-} + P_{а\sim} \lambda_{а\sim} + P_{а-} \lambda_{а-}, \quad (1)$$

где $\lambda_{в-} = \lambda_2 + \lambda_3 = 0,0011 \text{ 1/ч}$ — интенсивность отказов при поверке вольтметров переменного тока;

$\lambda_{в\sim} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0,0027 \text{ 1/ч}$ — при поверке вольтметров постоянного тока;

$\lambda_{а-} = \lambda_1 + \lambda_4 = 0,0007 \text{ 1/ч}$ — при поверке амперметров переменного тока;

$\lambda_{а\sim} = \lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_5 = 0,0017 \text{ 1/ч}$ — при поверке амперметров постоянного тока;

$P_{в\sim}, P_{в-}, P_{а\sim}, P_{а-}$ — вероятности поступления на поверку соответствующего средства измерений.

Зная процентное соотношение между поступающими на поверку приборами, можно определить значения λ и T . Например, пусть

$$P_{в\sim} = P_{в-} = P_{а\sim} = P_{а-} = 0,25.$$

Тогда $\lambda = 0,0015 \text{ 1/ч}$ и $T = 650 \text{ ч}$, что удовлетворяет требованиям технического задания.

Пример 2. Обеспечение требуемой надежности средств измерений в течение длительного времени связано с проведением регулярных установок нуля, в процессе которых устраняются последствия дрейфа метрологических характеристик. Так, если вероятность безотказной работы в течение времени t равняется $P(t)$, то при условии проведения через промежутки τ устано-

вок нуля она составит $[P(\tau)]^{\frac{t}{\tau}}$, что для «стареющих» изделий значительно больше величины $P(t)$ (рис. 2). Обоснование оптимального интервала между соседними установками нуля должно производиться по установленной в ТЗ нижней границе вероятности безотказной работы $P_{\text{доп}}(t)$ исходя из условия

$$P_{\text{доп}}(t) < [P(\tau)]^{\frac{t}{\tau}} \quad (2)$$

и ограничений, накладываемых условиями эксплуатации. Определение τ в процессе разработки позволяет увязать требования надежности и организации эксплуатации. Пусть, например, для некоторого средства измерений заданы $T = 500 \text{ ч}$, $P_{\text{доп}}(t) = 0,9$, а по условиям эксплуатации удобно проводить установку нуля в начале каждой смены, т. е. через восемь часов. Тогда в соответствии с (2) прибор должен работать без отказов в течение

восьми часов с вероятностью, не меньшей $P(8) = 0,9983$. Проводя аналитическую оценку либо испытания макета или опытного образца, можно проверить, удовлетворяется ли это требование.

Пример 3. Организация текущего мелкого ремонта измерительной техники непосредственно на предприятиях позволяет существенно повысить коэффициент ее использования и в то же время несколько снизить требования к безотказности. В частности, в соответствии с [3], при ремонте изделия на месте можно в качестве показателя надежности применять коэффициент готовности $K_T = \frac{T}{T+T_n}$ (T_n — среднее время восстановления), а не T . Очевидно, что гораздо легче обеспечить требования по K_T , чем по T .

Пусть, например, требуется обеспечить наработку на отказ $T = 5000$ ч, но среднее время восстановления при ремонте централизованными организациями составляет $T_n = 200$ ч, и, следовательно, коэффициент готовности прибора равен $K_T = 0,96$. Если же организовать ремонт прибора на предприятии и обеспечить $T_n = 8$ ч, то с той же эффективностью будет функционировать средство измерений, имеющее наработку на отказ $T = 200$ ч.

Пример 4. Нормирование ЗИП и расходных материалов имеет особенно важное значение для сложных средств измерений, применяемых в специфических условиях эксплуатации, когда накладываются жесткие ограничения на габариты и вес.

В ряде случаев эти ограничения могут привести к снижению требований к надежности.

Функция готовности изделия, эксплуатирующегося в таких условиях, определяется по формуле [2]

$$K_{r_n}(t) = e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^n F(j, n, q) \left(\frac{\lambda \mu}{\mu - \lambda} \right)^j \frac{t^j}{j!} + e^{-\mu t} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+1} F(j+2, n+2, q) \times \frac{(\lambda \mu)^{j+1} t^j}{(\mu - \lambda)^{j+2} j!}, \quad (3)$$

где

$$F(i, m, q) = \sum_{s=0}^{m-i} (-1)^s C_{2s-1}^i q^s;$$

λ, μ — интенсивность отказов, восстановления соответственно;

n — число ремонтов изделия, обеспеченных ЗИП и расходными материалами.

На рис. 3 представлен график зависимости функции готовности изделия от числа n при $\lambda = 0,05$ 1/ч, $\mu = 1$ 1/ч, $t = 100$ ч. График показывает, что стандартное условие $K_{r_n}(t) > 0,9$ выполняется при $n > 8$.

Если же по условиям эксплуатации невозможно обеспечить требуемое число ремонтов, график и зависимость (3) необходимо использовать для обоснования снижения требований надежности.

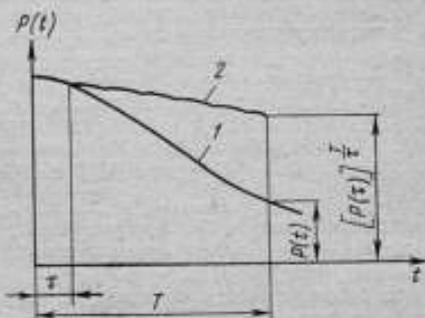


Рис. 2. Вероятность безотказной работы средств измерений

1 — эксплуатация без установок нуля; 2 — эксплуатация с установками нуля через промежутки времени τ

Рассмотренные примеры показывают целесообразность исследования организации эксплуатации в процессе разработки средств измерений. Важным условием решения этой проблемы является обеспечение единства методологического подхода на основе стандартизации необходимого и доста-

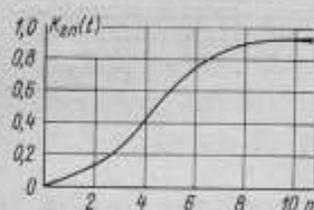


Рис. 3. График функции готовности $K_{гн}(t)$

точного количества показателей качества эксплуатационного обслуживания средств измерений. Включение в технические задания и технические условия этих показателей делает необходимым планирование эксплуатационных мероприятий в процессе проектирования, что обеспечит согласование принимаемых схемных и конструктивных решений с условиями эксплуатации разрабатываемых средств измерений. Учет показателей эксплуатационного обслуживания значительно повысит точность оценки надежности и технической эффективности средств измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнов В. О., Козлов Б. И., Татиевский А. Б., Фридман А. Э. Проблема и специфика надежности технических средств. «Измерительная техника», 1969, № 3, с.
2. Падерно И. П., Фридман А. Э. К расчету надежности ремонтируемых устройств автономных объектов. — В сб. «Исследования надежности технических средств измерений». Труды метрологических институтов СССР, вып. 127 (187) «Энергия» 1971, с. 5—18, с ил.
3. МУ 3—69 Методика выбора номенклатуры нормируемых показателей надежности технических устройств. М., Изд-во стандартов, 1970, 37 с.

Поступила в редакцию 15/IV 1974 г.

УДК 681.2—192.001.57 : 539.4.015.1 : 519.2

А. И. ЧУДНОВСКИЙ, Ю. Л. ШРАЙБЕР

ВНИИМ

ПОСТРОЕНИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НАДЕЖНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ РАЗРУШЕНИЯ

Для определения вероятности отказа средства измерения должны быть заданы вероятности отказов составляющих его элементов. Для средств измерений, особенно эталонных и образцовых, наиболее опасными являются постепенные отказы — отказы по точности, под которыми понимают изменение метрологических характеристик, выходящее за пределы заданных допусков. Прежде всего это касается таких элементов средств измерений, как измерительные преобразователи, чувствительные элементы и др.

Определение искомых вероятностей отказов существующими расчетными методами не может быть осуществлено вследствие отсутствия исходных данных по отказам отдельных деталей и узлов. Вместе с тем и экспериментальные методы не получили еще достаточного развития в данной области.

Наиболее перспективным, по-видимому, является метод, основанный на анализе физико-химических процессов, происходящих в материале, а также в областях контакта различных деталей, и построение на его основе физических моделей надежности. К упомянутым процессам относятся: ста-

рение, возникновение и накопление повреждений, усталость, диффузия и др. При исследовании надежности средств измерений этот метод представляется наиболее целесообразным ввиду конструктивной простоты их элементов, которая позволяет выделить один или несколько процессов, определяющих надежность рассматриваемой системы.

Надежность механических систем обычно формулируется в виде определенных условий, накладываемых на деформативные или прочностные характеристики деталей или конструкций. Анализ таких условий может быть произведен с помощью методов теории упругости, ползуучести и др. при заданных механических свойствах материалов, составляющих элементы конструкции. Механическое свойство материала — широко распространенное, но нечетко определенное понятие. Это относится прежде всего к свойствам составных (композитных) материалов.

В настоящей статье предлагается определение понятия «свойство материала». В качестве примеров рассматриваются деформативность, прочность и симметрия стохастических композитов. Определения строятся в вероятностных терминах, что связано как с особенностями проблемы надежности, так и с сущностью понятия «свойство материала».

Заметим, что среди свойств материала четко прослеживается определенная иерархия по степени первичности. В частности, механические свойства являются производными от химического состава, структуры, размеров и взаимного расположения отдельных компонентов, технологии изготовления и других немеханических свойств среды.

Обычно механические свойства различных сред изучаются в опытах над макроскопическими образцами. Результаты таких опытов зависят не только от свойств материала, но и от размеров и формы образцов. Вместе с тем понятие «свойство материала» воспринимается как не зависящее от образцов и присущее всем образцам, изготовленным из определенного (в отношении физико-химических свойств, более первичных, чем механические свойства) материала. Такое представление может быть формализовано следующим образом.

Множество всех образцов разобьем на классы эквивалентности по ряду немеханических признаков материала: химический состав, технология изготовления и т. п. Значение параметра λ , характеризующего механическое свойство Λ , будем называть параметром материала при условии, что значения этого параметра не зависят от формы и размеров образцов и для всех образцов соответствующего класса эквивалентности совпадают с точностью до нормативных допусков.

Пусть $F(\lambda)$ — функция распределения вероятностей значений параметра λ , построенная по данным статистического анализа представительной выборки образцов из некоторого класса эквивалентности, и $F_V(\lambda)$ — функция распределения вероятностей значений того же параметра, построенная по данным обследования объемов V , выделенных из отдельного образца. Для сравнения функций распределения воспользуемся каким-либо критерием согласия:

$$\kappa [F(\lambda), F_V(\lambda)] \rightarrow R, \quad (1)$$

где R — множество действительных чисел.

Если значение критерия согласия κ меньше нормативного κ^* , то имеет место эргодичность. Это означает, что выводы статистического анализа ансамбля образцов в пределах требуемой точности согласуются с результатами обследования объемов.

Наименьший объем, для которого имеет место эргодичность по критерию κ по отношению к свойству Λ , будем называть **характерным объемом** V_A^* для свойства Λ :

$$V_A^* = \inf_V \{ V : \kappa [F(\lambda), F_V(\lambda)] < \kappa^* \}. \quad (2)$$

В дальнейшем под свойствами материала будем понимать статистические оценки средних значений свойств соответствующего характерного объема. Отметим, что характерный объем (2) может быть определен не для всякого свойства Λ . В тех случаях, когда эргодичность отсутствует (например, при наличии масштабного эффекта), свойства материала определены быть не могут. В подобных случаях условно вводится характерный объем, свойства которого, дополненные правилами пересчета (критериями подобия) на свойства образцов, достаточны для практических задач. Свойства такого условного характерного объема совместно с критериями подобия позволяют обобщить понятие «свойство материала». В частности, прочностные свойства материала могут быть определены лишь в таком обобщенном смысле.

Приведенное определение свойств материала является конструктивным и может быть использовано для вычисления так называемых эффективных свойств композитных материалов.

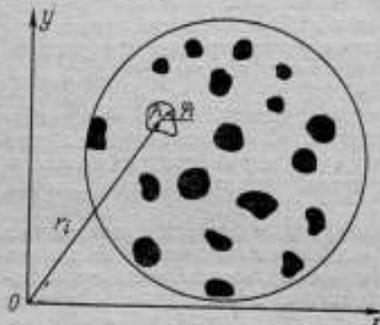


Рис. 1. Стохастическая структура

К наиболее общим свойствам композитов относятся геометрические (структурные) свойства, определенные взаимным расположением и формой включений. В качестве характеристики геометрических свойств введем параметр структуры s следующим образом. Пусть характерный объем V_s^k содержит N включений, каждое из которых характеризуется положением геометрического центра M_i (r_i) ($r_i \in V_s^k \subset E_3$, где E_3 — трехмерное евклидово пространство), и функцией формы $\rho_i \in \Pi$, определенной в локальной системе координат, жестко связанной с радиусом-вектором r_i . В качестве примера на рис. 1 приведена плоская структура. Форма включений здесь описывается функциями $\rho_i(\varphi_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$), определенными в полярных системах координат с полюсами в точках M_i , и полярными осями, совпадающими с r_i по направлению. Класс непрерывных периодических функций $\Pi = \{\rho_i(\varphi_i), i = 1, \dots, N\}$ с периодом 2π определяется степенью гладкости контуров включений.

Геометрическая структура характерного объема (материала) полностью определяется параметром структуры

$$s = \{r_1, r_2, \dots, r_N, \rho_1(\varphi_1), \rho_2(\varphi_2), \dots, \rho_N(\varphi_N)\}. \quad (3)$$

(В том случае, когда включения анизотропны и существенна ориентация, параметр структуры дополняется соответствующими характеристиками).

В соответствии с принятым определением, под свойствами материала будем понимать свойства характерного объема, осредненные по случайным реализациям структуры s . Для каждой конкретной реализации структуры средний по объему V параметр λ , характеризующий свойство Λ , определяется равенством

$$\langle \lambda(s) \rangle_V = \frac{1}{V} \int_V \lambda(s) dV. \quad (2)$$

При этом соответствующий параметр λ материала со случайной структурой определяется как среднее по множеству реализаций случайных структур S :

$$\langle \lambda \rangle(s) = \int_{(s)} \langle \lambda(s) \rangle_V dF(s) = \int_{(s)} \frac{1}{V} \int_V \lambda(s) dV dF(s). \quad (5)$$

Разобьем объем V на N элементарных ячеек (по числу включений) объемом ΔV_k ($k = 1, 2, \dots, N$), в частности, это могут быть области, аналогичные ячейкам Вигнера—Зейтца в регулярных структурах.

При изучении определенного свойства Δ характерного объема проведем факторизацию множества элементарных ячеек по признаку сходства по свойству Δ с эталонными ячейками. Эталонные ячейки удобнее выбирать в виде ячеек Вигнера—Зейтца регулярных или квазирегулярных структур. Квазирегулярные структуры могут быть получены из регулярных путем возмущения параметра структуры. Сходство с эталонными ячейками по напряжениям, деформациям или энергии может быть установлено экспериментально, например оптическим методом, или теоретически путем численного решения соответствующих задач.

Предположим, что среди N элементарных ячеек можно выделить m типов. Тогда

$$\langle \lambda \rangle = \sum_{k=1}^m c_k \langle \lambda_k \rangle, \quad m < N, \quad (6)$$

где

$$c_k = \int_{(S)} \sum_{i=1}^{n_k} \frac{\Delta V_i(s)}{V_{\Delta}^k} dF(s) = \frac{\langle \Delta V_k \rangle}{V_{\Delta}^k};$$

c_k — средняя по множеству реализаций структуры S концентрация ячеек k -го типа;

n_k — число элементарных ячеек k -го типа и $\langle \lambda_k \rangle$ — среднее значение параметра λ по элементарным ячейкам k -го типа.

Формула (6), представляющая собой специфическое правило смеси удобна для вычисления параметров, характеризующих различные свойства материалов. В том случае, когда характерный объем выбран по структуре s , осреднение по множеству структур может быть заменено осреднением по характерному объему $V = \max [V_{\Delta}^k, V_s^k]$. В качестве иллюстрации правила смеси (6) рассмотрим несколько примеров.

Эффективные упругие свойства. Четырехвалентные тензоры эффективных упругих модулей L_s и эффективных упругих податливостей G_s определяются соотношениями

$$\langle T_{\sigma} \rangle = L_s : \langle T_{\epsilon} \rangle; \quad (7)$$

$$\langle T_{\epsilon} \rangle = G_s : \langle T_{\sigma} \rangle. \quad (8)$$

Здесь T_{σ} , T_{ϵ} — детальные поля тензоров напряжений и деформаций;

$\langle T_{\sigma} \rangle$ и $\langle T_{\epsilon} \rangle$ — средние значения T_{σ} и T_{ϵ} .

Одно из этих средних задается условиями нагружения, а другое — определяется одним из равенств

$$\left. \begin{aligned} \langle T_{\sigma} \rangle &= \frac{1}{V} \int_V T_{\sigma} dV; \\ \langle T_{\epsilon} \rangle &= \frac{1}{V} \int_V T_{\epsilon} dV. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

В каждой точке материала матрицы (композитный материал представляет собой материал матрицы с включениями из другого материала) предполагается справедливым закон Гука:

$$T_{\epsilon} = G : T_{\sigma}. \quad (10)$$

В рассматриваемом примере предполагается заданным $\langle T_{\sigma} \rangle$. В этом случае из (8) — (10) следует уравнение для тензора эффективных упругих податливостей:

$$G_2 : \langle T_{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \int_V G : T_{\sigma} dV \quad (11)$$

(под V в данном случае понимается площадь рассматриваемой плоской фигуры — см. рис. 1).

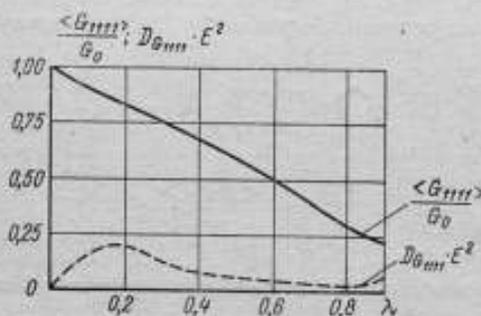
Определим эффективные упругие свойства стохастического композита, представляющего собой статистически изотропную смесь элементарных ячеек, обладающих симметрией квадрата. Форма включений предполагается круговой.

Компоненты тензора G_1 эффективных упругих податливостей композитной среды с включениями, расположенными в узлах квадратной решетки, определяются численно путем решения соответствующей задачи теории упругости [1].

Эффективные свойства изотропной смеси, согласно (6), представляются в виде

$$G_2 = \sum_{k=1}^N c(\varphi_k) G_1(\varphi_k) \approx \int_0^{2\pi} G_1(\varphi) \rho(\varphi) d\varphi, \quad (12)$$

Рис. 2. Зависимость $\langle G_{1111} \rangle / G_0$ и $D_{G_{1111}} \cdot E^2$ от размера включения λ



где угол φ_k характеризует ориентацию k -й ячейки относительно некоторой фиксированной координатной системы. В этой формуле суммирование заменено интегрированием, так как число N достаточно велико. Условие изотропии означает, что

$$\rho(\varphi) = \text{const} = \frac{1}{2\pi}.$$

На рис. 2 приводятся зависимости среднего значения и дисперсии эффективного модуля Юнга от концентрации включений.

Статистическая симметрия. В некоторых случаях коэффициенты c_k в формуле (6) могут определяться с помощью интегральных характеристик структуры. В частности, при изучении симметрии стохастической структуры (рис. 1) будем сравнивать ее с регулярными структурами, обладающими симметрией квадрата, прямоугольника и шестиугольника. Рассмотрим преобразование параметра структуры s с помощью элемента α ортогональной группы O :

$$\alpha s = (\alpha r_1, \alpha r_2, \dots, \alpha r_N, \rho_1(\varphi_1), \dots, \rho_N(\varphi_N)). \quad (13)$$

Оценим функции распределения $F(s)$ и $F(\alpha s)$ и сравним их с помощью критерия согласия χ :

$$\chi[F(s), F(\alpha s)] = \chi_s(\alpha). \quad (14)$$

Значение критерия согласия зависит для данной структуры только от преобразования α . Если $\chi_s(\alpha) < \chi_s^*$, структура αs статистически не отличается от s и, следовательно, элемент α является элементом симметрии. При этом разным элементам $\alpha \in O$ соответствует разный уровень согласия χ . Определим на ортогональной группе O функцию правдоподобия $l(\alpha)$ того,

что данная структура по критерию χ инвариантна относительно преобразования α :

$$l(\alpha) = \begin{cases} \chi^* - \chi_s(\alpha), & \text{если } \chi^* - \chi_s(\alpha) > 0, \\ 0, & \text{если } \chi^* - \chi_s(\alpha) < 0. \end{cases} \quad (15)$$

Эту функцию после соответствующей нормировки можно трактовать как вероятность того, что изменение структуры, вызванное преобразованием α , не может быть обнаружено с помощью критерия χ . При конкретном построении функции (15) для плоской структуры, приведенной на рис. 1, воспользуемся критерием χ_v^2 с уровнем значимости $\varepsilon = 0,05$. Контуры включений обозначаются путем расположения на каждом из них шести точек.

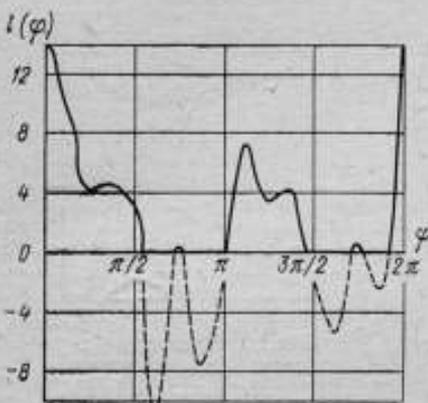


Рис. 3. Функция правдоподобия стохастической структуры

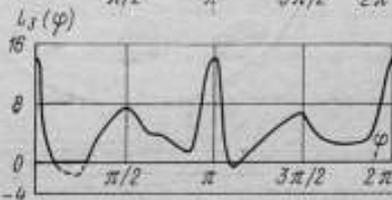
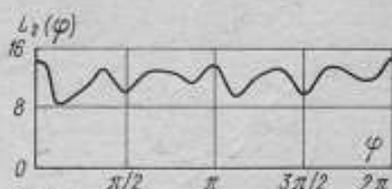
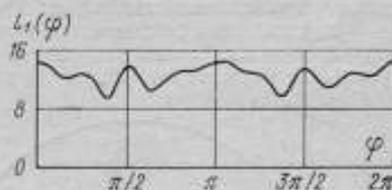


Рис. 4. Функции правдоподобия регулярных структур

Далее разобьем область, в которой находится аклюция, на k подобластей ($k = 8$). В качестве преобразований α рассматриваются вращения φ $\varphi = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4, 5\pi/6, \pi, 7\pi/6, 5\pi/4, 4\pi/3, 3\pi/2, 5\pi/3, 7\pi/4, 11\pi/6, 2\pi$.

Для каждого из вращений вычисляется функция

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(v_i - v_i^*)^2}{v_i}, \quad (16)$$

где v_i — наблюдаемая частота попадания в i -ю область (число точек в i -й области) после поворота,

v_i^* — наблюдаемая частота попадания в i -ю область до поворота.

На рис. 3 приведен график функции $l(\varphi)$. В качестве χ^* (φ) принималось значение $\chi_{0,05}^2 = 14,07$.

Далее проведено аналогичное обследование структур, соответствующих известным точечным группам Q_j . Функции правдоподобия $L(Q_j(\varphi))$, соответствующие возможным точечным группам симметрии, приведены на рис. 4.

Целью этих построений является установление сходства данной случайной структуры с регулярными или квазирегулярными структурами. Рассматривая функции правдоподобия, соответствующие регулярным (квазирегулярным) структурам, как базисные, можно говорить о представлении

$$l(\alpha) = \sum_j a_j L(Q_j). \quad (17)$$

Здесь a_j — постоянные числа, которые могут быть найдены, например, по методу наименьших квадратов.

В указанном примере в качестве базисных рассматривались функции правдоподобия, соответствующие квадратной, шестиугольной и прямоугольной (отношение сторон 1:2) решеткам. Коэффициенты a_j получены следующие

$$\begin{aligned} a_1 &= -0,78; & a_2 &= 0,6; \\ a_3 &= 1,18. \end{aligned} \quad (18)$$

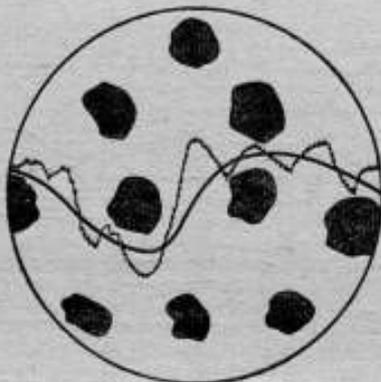


Рис. 5. Модель разрушения стохастического компонента

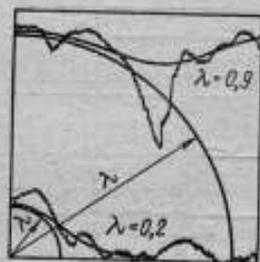


Рис. 6. Элементы базисных как функции размера включения

Как известно, для исчерпывающего представления о структуре, наряду с анализом точечных групп, необходимо провести анализ групп трансляций и неэлементарных трансляций.

Инвариантность по критерию к стохастической структуре относительно преобразований $\alpha \in O$ будем называть статистической симметрией.

Статистическая симметрия характеризуется функцией правдоподобия (15), определенной на элементах ортогональной группы.

Прочность. Согласно экспериментальным данным, прочностные свойства образцов существенно зависят от их размеров и формы (масштабный эффект). В связи с этим соответствующие свойства материала могут быть определены лишь условно. Здесь не будут обсуждаться законы, связывающие разрушение малой области образца (условного характерного объема) с разрушением образца в целом. Анализ их должен быть предметом самостоятельного исследования [2]. Рассмотрим лишь вероятность разрушения условного характерного объема. Разрушение такого объема будем понимать как элементарный акт макроразрушения и представим в виде разделения объема на части по некоторой поверхности D , причем разрушение по двум и более поверхностям будем считать несовместными событиями.

Вероятность разрушения может быть представлена в виде интеграла по множеству Ω возможных поверхностей разделения объема

$$P(A) = \int_{\Omega} P(A/D) d\mu(\Omega). \quad (19)$$

Здесь $\mu(\Omega)$ — мера на множестве Ω ; $P(A/D)$ — условная вероятность того, что разрушение происходит по поверхности $D \in \Omega$. $P(A/D)$ представляет собой некоторый функционал от поверхности D и напряжений, действующих в точках этой поверхности. Интегрированию в (19) должно предшествовать описание множества поверхностей отрыва и построение меры на нем и, кроме того, построение функционала $P(A/D)$, определяющего условную вероятность разрушения по некоторой поверхности D .

Представим Ω в виде объединения непересекающихся множеств:

$$\Omega = \bigcup_p \Omega_p = \bigcup_p \{D_p\}, \quad (20)$$

где Ω_p — множество возможных поверхностей отрыва, образованных в результате случайных отклонений от некоторой детерминированной гладкой кривой — базовой поверхности этого множества.

Обследование реальных поверхностей разрушения показывает, что подходящей мерой на множестве поверхностей является мера Винера [3].

Базовая поверхность $\langle D \rangle$, описываемая в плоском случае уравнением $y = \langle y(x) \rangle$, трактуется как математическое ожидание случайной поверхности D , описываемой уравнением $y = y(x)$. В связи с этим в результате усреднения на совокупности параметров, определяющих $\langle y(x) \rangle$, исключены случайные параметры. В том случае, когда включения являются более прочными, чем матрица, разрушение происходит по материалу матрицы, и, следовательно, базовые поверхности огибают включения (рис. 5). Возможные реализации поверхностей отрыва показаны на рис. 5 тонкими линиями.

Для определения базовых поверхностей формулируется вариационный принцип: базовыми являются поверхности, которым соответствует минимальный энергетический барьер разрушения. Энергетический барьер разрушения может быть представлен в виде функционала

$$U(\langle D \rangle) = \int_{\langle D \rangle} \Phi(T_\sigma, T_\sigma^*) d\mu(D), \quad (21)$$

где T_σ и T_σ^* — тензоры напряжений до и после разрушения в точках поверхности отрыва.

В простейшем случае этот функционал может быть конкретизирован следующим образом:

$$\Phi = \gamma - \Delta W, \quad (22)$$

где γ представляет собой плотность поверхностной энергии, а

$$\Delta W = \frac{1}{2} (T_\sigma : G : T_\sigma - T_\sigma^* : G : T_\sigma^*)$$

— изменение плотности упругого потенциала при разрушении. Тензор напряжений T_σ^* удовлетворяет условию

$$T_\sigma^* \cdot n = \frac{1}{2} (1 - \text{sign}(n \cdot T_\sigma \cdot n)) \cdot T_\sigma \cdot n, \quad (23)$$

где n — нормаль к базовой поверхности.

Решение описанной вариационной задачи проводилось численно методом динамического программирования для случая изотропной смеси элементарных ячеек, обладающих симметрией квадрата. На рис. 6 представлена четверть элементарной ячейки, где показаны участки базовых в зависимости от размеров включений и реализации случайных поверхностей отрыва.

Вероятность элементарного акта разрушения, т. е. отрыва по случайной поверхности D , как обычно, представим в виде:

$$P(A/D) = \exp\left(-\frac{1}{kT} U(D)\right), \quad (24)$$

где k — постоянная Больцмана;
 T — абсолютная температура;

$$U(D) = U(\langle D \rangle) - \int_{(D)} F[y(x) - \langle y(x) \rangle] d\mu(\Omega). \quad (25)$$

Выражение (25) отражает предположение о том, что значение функционала на случайной поверхности всегда меньше значения функционала на базовой (реально разрушения по базовой поверхности никогда не происходит). Кроме

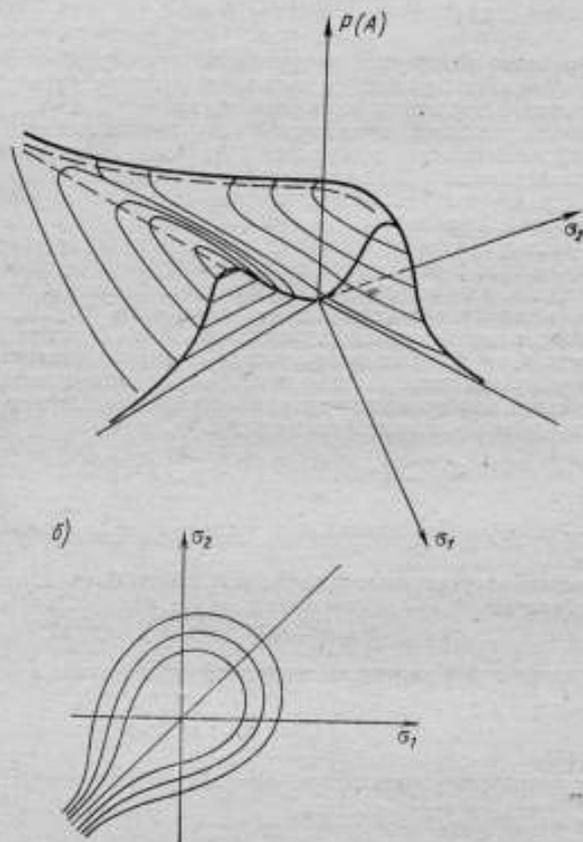


Рис. 7. Плотность вероятности разрушения (а) и поверхности равных уровней вероятности разрушения (б)

того, в (25) предполагается однозначная связь значений функционала с геометрией реальной поверхности отрыва. Подстановкой (24) в (19) определяется вероятность разрушения условного характерного объема. На рис. 7 представлена плотность распределения вероятности разрушения в пространстве главных напряжений.

Полученный результат может быть использован при оценивании надежности конструкции в целом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки. М., «Наука», 1970, 556 с, с ил.
2. Чудновский А. И. О разрушении макротел. — В сб. «Исследования по упругости и пластичности», ЛГУ, 1973, № 9, с. 3—43, с ил.
3. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. М., «Наука», 1965, 406 с.

Поступила в редакцию 15/IV—1974 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
I. Надежность сложных измерительных систем	
• Б. И. Козлов, И. П. Кузьмин. Статистическое моделирование функционирования измерительных систем одного класса	5
• Л. В. Разубаева. Топологический способ анализа надежности измерительных систем	11
• А. И. Губинский, В. Г. Позник, В. И. Еремеев, Т. Ф. Борисова. Графо-операционный метод определения функции готовности измерительных систем	16
• А. И. Губинский, В. Г. Пантелей, Л. В. Разубаева. Топологическая формула для определения средней наработки системы до первого отказа	21
• А. И. Губинский, В. Г. Пантелей, Л. В. Разубаева. Использование свойства изоморфизма графов при решении уравнений Колмогорова—Чепмена	26
• Б. И. Козлов, П. И. Падерно, Л. Л. Песочинский, А. Э. Фридман. Применение марковских и полумарковских процессов для описания функционирования измерительных систем	31
• Б. И. Козлов, А. Э. Фридман. Методика аналитической оценки технической эффективности измерительных систем	39
• И. П. Падерно. Метод расчета надежности систем со структурами мостового вида при двух типах отказов элементов	46
• Б. И. Козлов, А. Э. Фридман. Перспективы исследований метрологической надежности технических средств измерений	54
• М. А. Кузьмина, И. П. Кузьмин. Определение вероятности безотказной работы многоканальной информационной системы	56
• Б. И. Козлов. Влияние ремонтпригодности и безотказности на качество функционирования многоканальных систем	61
• П. И. Падерно. Применение ЭЦВМ для определения надежности сложных измерительных систем	64
• Б. Л. Рывкин. Оценка стабильности измерительной системы	71
II. Постепенные отказы и сбои	
• С. А. Четвертаков. Классификация методов прогнозирования временного дрейфа параметров средств измерений по критерию объема исходной информации	75
• Б. В. Тюков. Некоторые способы оценивания времени изменений метрологических характеристик в заданных пределах	79
• С. А. Четвертаков. Выбор точностей измерений при испытаниях средств измерений с линейной функцией влияния на стабильность	83
• А. Э. Фридман, С. А. Четвертаков. Применение апостериорного прогнозирования при проведении испытаний надежности средств измерений	90
• Л. В. Разубаева, А. Э. Фридман. Влияние сбоев на метрологические характеристики средств измерений	95
• С. А. Четвертаков. Статистическая проверка стабильности средств измерений с линейным дрейфом метрологических характеристик при помощи процедуры Вальда	102
• И. П. Демаков. Об одном методе прогнозирования в условиях неопределенности	106
• Ю. Г. Балагезян, Л. Г. Тульчин. Использование факторного анализа при оценке качества цифровых вольтметров	111
• Б. И. Козлов, А. Э. Фридман. Влияние условий эксплуатации на надежность средств измерений	119
• А. И. Чудновский, Ю. Л. Шрайбер. Построение физической модели надежности средств измерений методами теории разрушения	122

УДК 681.2/3.001.57 : 518.5

Статистическое моделирование функционирования измерительных систем одного класса. Козлов Б. И., Кузьмин И. П. «Исследования в области надежности средств измерений». Труды метрологических институтов СССР, вып. 173 (233), 1975, с. 5—11.

Рассмотрена формализация процесса функционирования многоканальных измерительных систем, имеющих структурную избыточность и некоторые ограничения возможности восстановления работоспособности в процессе функционирования. Построен моделирующий алгоритм, позволяющий определить на ЭЦВМ показатели надежности систем этого класса. Приведен пример моделирования. Ил. 2. Библ. 1.

УДК 681.2/3—192 : 517.9

Топологический способ анализа надежности измерительных систем. Разубаева Л. В. «Исследования в области надежности средств измерений». Труды метрологических институтов СССР, вып. 173 (233), 1975, с. 11—16.

Предлагается топологический способ определения показателей надежности измерительных систем, описываемых уравнениями Колмогорова—Чепмена. Способ основан на отыскании прадеревья графа состояний системы и позволяет повысить эффективность расчета показателей надежности при использовании ЭЦВМ. Библ. 5.

УДК 518.4 : 681.2/3—192

Графо-операционный метод определения функции готовности измерительных систем. Губинский А. И., Позник В. Г., Еремеев В. И., Борисова Т. Ф. «Исследования в области надежности средств измерений». Труды метрологических институтов СССР, вып. 173 (233), 1975, с. 16—20.

Предлагается графо-операционный метод определения функции готовности измерительных систем, позволяющий значительно увеличить эффективность расчетов путем введения дополнительных топологических построений в графе состояний системы. Метод иллюстрируется примером. Ил. 4. Библ. 3.

УДК 519.217 : 681.2/3—192

Топологическая формула для определения средней наработки системы до первого отказа. Губинский А. И., Пантелей В. Г., Разубаева Л. В. «Исследования в области надежности средств измерений». Труды метрологических институтов СССР, вып. 173 (233), 1975, с. 21—26.

Предлагается способ определения средней наработки системы до первого отказа для случая однородного марковского процесса перемещения системы в пространстве состояний, основанный на структурном анализе графа состояний системы. Приводится пример расчета. Ил. 2. Библ. 3.

УДК 519.422 : 518.42

Использование свойства изоморфизма графов при решении уравнений Колмогорова—Чепмена. Губинский А. И., Пантелей В. Г., Разубаева Л. В. «Исследования в области надежности средств измерений». Труды метрологических институтов СССР, вып. 173 (233), 1975, с. 26—31.

Рассматриваются принципы использования свойства изоморфизма графов, позволяющий значительно повысить эффективность процедуры решения уравнений Колмогорова—Чепмена топологическими методами. Принцип иллюстрируется примерами. Ил. 5. Библ. 7.

УДК 519.217 : 681.2/3—192

Применение марковских и полумарковских процессов для описания функционирования измерительных систем. Козлов Б. И., Падерно П. И., Песочинский Л. Л., Фридман А. Э. «Исследования в области надежности средств измерений». Труды метрологических институтов СССР, вып. 173 (233), 1975, с. 31—39.

Проанализированы особенности измерительных систем. Показано, что для исследования надежности и технической эффективности измерительных систем применение традиционных методов, связанных с составлением графа состояний, является нецелесообразным.

Исследован принципиально новый подход к оценке надежности и технической эффективности мультимодальных систем, заключающийся в укрупнении состояний. Доказан ряд теорем относительно условий, которым должен удовлетворять исходный процесс для того, чтобы укрупненный процесс являлся марковским или полумарковским. Библ. 2.

УДК 681.2/3—192.001.57 : 519.217

Методика аналитической оценки технической эффективности измерительных систем. Козлов Б. И., Фридман А. Э. «Исследования в области надежности средств измерений». Труды метрологических институтов СССР, вып. 173 (233), 1975, с. 39—46.

Приведена методика расчета технической эффективности измерительных систем по упорядоченной математической модели их функционирования. Рассмотрены случаи расчета марковской и полумарковской математических моделей. Методика иллюстрируется примером расчета типовой структуры. Ил. 2.

УДК 681.2/3—192.001.24 : 519.422

Метод расчета надежности систем со структурами мостового вида при двух типах отказов элементов. Падерно И. П. «Исследования в области надежности средств измерений». Труды метрологических институтов СССР, вып. 173 (233), 1975, с. 46—56.

Приводится аналитический метод расчета систем со структурами мостового вида при двух типах отказов элементов, основанный на эквивалентном (в отношении надежности) изоморфном преобразовании (трансфигурация) их структур, позволяющем уменьшить число входящих в них элементов, и, в конечном счете, преобразовать эти структуры в последовательно-параллельный вид. Определяются условия целесообразности таких трансфигураций и условия эквивалентности отдельных структур. Приводится уравнение эквивалентности при трансфигурациях и расчетные формулы. Приводится пример расчета по описанному методу. Ил. 5. Библ. 1.

УДК 681.2.0190.3

Перспективы исследований метрологической надежности технических средств измерений. Козлов Б. И., Фридман А. Э. «Исследования в области надежности средств измерений». Труды метрологических институтов СССР, вып. 173 (233), 1975, с. 54—56.

Анализируются особенности и перспективные направления исследований метрологической надежности средств измерений. Выбл. 2.

УДК 519.251.4/5: 681.2/3-182

Определение вероятности безотказной работы многоканальной информационной системы. Кузьмина М. А., Кузьмин И. П. «Исследования в области надежности средств измерений». Труды метрологических институтов СССР, вып. 173 (233), 1975, с. 56—61.

Формулируется понятие отказа информационной системы, на вход которой поступает поток заявок, обладающих r признаками.

Выведены формулы для расчета вероятности безотказной работы системы для двух случаев: 1) восстановление системы невозможно, распределение значений каждого признака заявок равновероятно; 2) восстановление системы возможно, значения признаков заявок распределены неравномерно. Ил. 1. Библ. 2.

УДК 681.2/3-192

Влияние ремонтпригодности и безотказности на качество функционирования многоканальных систем. Козлов Б. И. «Исследования в области надежности средств измерений». Труды метрологических институтов СССР, вып. 173 (233), 1975, с. 61—64.

Исследуется зависимость показателей качества функционирования многоканальных измерительных систем, связующих в процессе работы три состояния, от показателей ремонтпригодности и безотказности. Получены аналитические выражения для этой зависимости.

УДК 518.5 : 681.2/3-192.001.57

Применение ЭЦВМ для определения надежности сложных измерительных систем. Падерно И. П. «Исследования в области надежности средств измерений». Труды метрологических институтов СССР, вып. 173 (233), 1975, с. 64—70.

Рассматриваются измерительные системы (ИС) со структурами двух видов. Для измерительной системы, граф структуры которой является деревом, построены математическая модель и алгоритм расчета технической эффективности, которые позволяют уменьшить объем исходных данных для проведения расчетов на ЭЦВМ. Разработаны алгоритм построения математической модели иерархической структуры и алгоритм расчета показателей надежности и технической эффективности ИС с иерархической структурой на ЭЦВМ. Показано, как произвольная ступенчатая структура может быть сведена к иерархической. Ил. 4. Библ. 3.

УДК 389.14 : 681.2/3-192

Оценка стабильности измерительной системы. Рывкин Б. Л. «Исследования в области надежности средств измерений». Труды метрологических институтов СССР, вып. 173 (233), 1975, с. 71—74.

Произведена оценка внутренней стабильности измерительной системы на стадии ее проектирования. Приведены рекомендации по нормированию характеристик нестабильности и определению межповерочного интервала измерительной системы по допустимой погрешности нестабильности. Ил. 3. Библ. 5.

УДК 519.283.001.33 : 53.08

Классификация методов прогнозирования временного дрейфа параметров средств измерений по критерию объема исходной информации. Четвертаков С. А. «Исследования в области надежности средств измерений». Труды метрологических институтов СССР, вып. 173 (233), 1975, с. 75—78.

На основании обзора методов экстраполяции процессов изменения параметров средств измерений и других технических устройств проводится классификация этих методов по критерию объема используемой исходной информации. Все методы делятся на три группы в соответствии с типами задач прогнозирования: индивидуальное прогнозирование I и II рода и прогнозирование по ансамблю.

Рассматриваются особенности решения задач. Указываются наиболее актуальные направления развития теории прогнозирования. Библ. 14.

УДК 389.14 : 53.08.019

Некоторые способы оценивания времени изменений метрологических характеристик в заданных пределах. Тюков В. В. «Исследования в области надежности средств измерений». Труды метрологических институтов СССР, вып. 173 (233), 1975, с. 79—82.

Предлагаются способы оценки межповерочных интервалов на основе использования показателей долговременной стабильности при проектировании средств измерений.

Предложен способ, учитывающий возможность подрегулировок средств измерений в процессе их эксплуатации. Библ. 2.

УДК 53.088.001.4 : 519.241

Выбор точностей измерений при испытаниях средства измерений с линейной функцией влияния на стабильность. Четвертаков С. А. «Исследования в области надежности средств измерений». Труды метрологических институтов СССР, вып. 173 (233), 1975, с. 83—90.

При испытаниях средства измерений на стабильность для уменьшения погрешностей временного дрейфа метрологических характеристик используются средства стабилизации и измерений влияющих физических величин.

Для линейной функции влияния испытываемого средства измерений разработана методика выбора точностей технических средств на основе критерия дисперсии суммарной погрешности оценок дрейфа и принципа равных вкладов каждой влияющей величины в суммарную погрешность. Библ. 5.

УДК 681.2-192.001.4 : 519.263.2

Применение апостериорного прогнозирования при проведении испытаний надежности средств измерений. Фридман А. Э., Четвертаков С. А. «Исследования в области надежности средств измерений». Труды метрологических институтов СССР, вып. 173 (233), 1975, с. 90—94.

Рассмотрена проблема сокращения длительности испытаний надежности средств измерений. Изложен метод сокращения длительности контрольных испытаний, заключающийся в определении параметров математической модели и прогнозировании будущих значений метрологических характеристик на основе полученной модели. Для полиномиальной модели дрейфа метрологических характеристик приведена методика проведения испытаний. Библ. 2.

УДК 519.211 : 53.088/089

Влияние сбояв на метрологические характеристики средства измерений. Разубаева Л. В., Фридман А. Э. «Исследования в области надежности средств измерений». Труды метрологических институтов СССР, вып. 173 (233), 1975, с. 95—101.

Рассматривается учет сбоев дискретных элементов при оценке метрологических характеристик средств измерений. Предлагается метод, заключающийся в последовательном анализе последствий сбоев всех элементов и спорадичности зависимостей для распределения значений метрологических характеристик. Метод иллюстрируется расчетом математического ожидания динамической погрешности автоматизированной поверочной установки. Ил. 3. Библ. 4.

УДК 389.14 : 681.2-192.001.4 : 519.24

Статистическая проверка стабильности средства измерений с линейным дрейфом метрологических характеристик при помощи процедуры Вальда. Четвертаков С. А. «Исследования в области надежности средств измерений». Труды метрологических институтов СССР, вып. 173 (233), 1975, с. 102—105.

Рассматривается статистическая проверка значения скорости временного дрейфа метрологической характеристики средства измерений при испытаниях на надежность.

Применена теория проверки двух простых гипотез о статистических параметрах на основе последовательного критерия отношения вероятностей, которая позволяет со-

кратить длительность контрольных испытаний на надежность мелкосерийных и уникальных средств измерений, имеющих линейный дрейф метрологических характеристик. Ил. 2. Библ. 5.

УДК 519.27 : 519.251.8

Об одном методе прогнозирования в условиях неопределенности. Демаков И. П. «Исследования в области надежности средств измерений». Труды метрологических институтов СССР, вып. 173 (233), 1975, с. 106—111.

Излагаются результаты, полученные в области статистического анализа малого числа наблюдений. Рассматривается порядок построения функции распределения наблюдаемой случайной величины.

Предложенный метод основан на теории априорно-эмпирических функций АЭФ. Исследование показало, что использование метода АЭФ в условиях неопределенности априорной информации о предполагаемом виде искомой функции распределения весьма эффективно по сравнению с известными статистическими методами построения функций распределения. Библ. 10.

УДК 621.317.725.083.92-192 : 517.5

Использование факторного анализа при оценке качества цифровых вольтметров. Балагеев Ю. Г., Тульчин Л. Г. «Исследования в области надежности средств измерений». Труды метрологических институтов СССР, вып. 173 (233), 1975, с. 111—119.

Изложены основные принципы построения критерия качества изделий, основанных на использовании факторного анализа методом максимального правдоподобия.

Построена модель оценки уровня качества цифровых вольтметров постоянного тока. Табл. 4. Ил. 2. Библ. 3.

УДК 658.513.5 : 681.2-192

Влияние условий эксплуатации на надежность средств измерений. Козлов Б. И., Фридман А. Э. «Исследования в области надежности средств измерений». Труды метрологических институтов СССР, вып. 173 (233) 1975, с. 119—122.

Рассматриваются вопросы планирования эксплуатационных мероприятий в процессе разработки средств измерений. Обсуждается понятие «условия эксплуатации». Приводятся примеры влияния организации эксплуатации средств измерений на показатели надежности. Ил. 3. Библ. 3.

УДК 681.2-192.001.57 : 539.4.015.1 : 519.2

Построение физической модели надежности средств измерений методами теории разрушения. Чудновский А. И., Шрайбер Ю. Л. «Исследования в области надежности средств измерений». Труды метрологических институтов СССР, вып. 173 (233), 1975, с. 122—131.

Дано определение понятия «свойство материала» в вероятностных терминах. Рассмотрены упругие свойства, симметрия и прочность материалов со случайной структурой.

Построена модель разрушения характерного объема композитного материала, позволяющая обоснованно выбирать вероятность отказа первичного элемента в задачах надежности.

Предлагаемый подход базируется на изучении физических процессов, определяющих нестабильность рассматриваемого свойства материала.

Ил. 7. Библ. 3.

ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ НАДЕЖНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Труды метрологических институтов СССР

Выпуск 173 [233]

Редактор Г. А. Митарчук Технический редактор З. Г. Вагер Корректор Н. Л. Перскова
Сдано в набор 10/III 1975 г. Подписано в печать 11/VII 1975 г. М-24 118. Формат 60 × 90/16.
Бумага типографская № 2. Печ. л. 8,5 Уч.-изд. л. 12. Тираж 1000 экз. Заказ № 510
Цена 1 р. 20 к.

Ленинградская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном Комитете
Совета Министров СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли,
196126, Ленинград, Ф-126, Социалистическая ул., 14.

Цена 1 р. 20 к.